

# 1 Turbulence d’ondes dans les plaques minces en vibration : effet de l’amortissement

T. Humbert<sup>1,2</sup>, C. Josserand<sup>1</sup>, O. Cadot<sup>2</sup>, & C. Touzé<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut D’Alembert, UMR 7190 CNRS-UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France.

<sup>2</sup> Unité de Mécanique (UME), ENSTA ParisTech, 828 Bd des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex, France  
thomas.humbert.box@gmail.com

**Résumé.** L’effet de l’amortissement sur le régime de turbulence d’ondes dans les plaques minces en vibration est étudié. Une méthode expérimentale permettant une mesure précise de la dissipation du système à toutes les échelles est premièrement introduite. Des dispositifs pratiques permettant d’accroître l’amortissement expérimentalement sont ensuite présentés. Il en résulte une augmentation significative de la pente des spectres de puissance de la vitesse transverse de telle sorte que les lois de puissance observées ne correspondent pas à des gammes inertielles. En introduisant les lois de puissance mesurées en fonction de la fréquence pour l’amortissement dans un code numérique, des conclusions similaires sont tirées.

**Abstract.** The effect of damping on the wave turbulence regime in thin vibrating plates is studied. An experimental method, allowing precise measurement of dissipation in the system at all scales, is first introduced. Practical experimental devices for augmenting the dissipation are shown. This results in a significant increase in the steepness of the power spectral density of the normal velocity so that the observed power laws are not inertial ranges. By using the measured damping power-laws in numerical simulations, similar conclusions are drawn out.

## 1.1 Introduction

La théorie de la turbulence d’ondes (ou turbulence faible) a pour but de décrire le comportement à long terme de systèmes faiblement non linéaires où l’énergie est échangée par les différentes échelles, prédisant à long terme l’établissement de spectres de Kolmogorov-Zakharov, par analogie avec la turbulence hydrodynamique [1,2,3]. Un grand nombre d’applications a été étudié depuis le contexte initial des ondes à la surface de l’eau [4,5,6,7] jusqu’à par exemple l’optique nonlinéaire [8] ou les ondes Alfvén dans un plasma [9].

La turbulence d’ondes dans les plaques minces élastiques a été étudiée théoriquement en 2006 [10] en considérant les équations de Von Kármán pour une plaque d’épaisseur  $h$ , de coefficient de Poisson  $\nu$ , de densité  $\rho$  et de module d’Young  $E$ . Celles-ci s’écrivent

$$\rho h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 \zeta + \mathcal{L}(\chi, \zeta), \quad (1.1)$$

$$\Delta^2 \chi = -\frac{Eh}{2} \mathcal{L}(\zeta, \zeta), \quad (1.2)$$

où  $\zeta$  est le déplacement transverse et  $\chi$  la fonction d’Airy. L’opérateur  $\mathcal{L}$  est bilinéaire symétrique, et s’écrit en coordonnées cartésiennes :  $\mathcal{L}(f, g) = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$ . Une telle dynamique entraîne des ondes dispersives régies par la relation de dispersion  $\omega_{\mathbf{k}} = hc \|\mathbf{k}\|^2$  avec  $c = \sqrt{E/12\rho(1-\nu^2)}$ . De là, en opérant les développements classiques de la turbulence d’ondes, les solutions hors-équilibre de l’équation cinétique correspondante ont été établies dans [10]. Ce sont bien les spectres de Kolmogorov-Zakharov caractérisés par la relation entre la densité spectrale de puissance  $P_v$  de la vitesse  $v$  et la fréquence,

$$P_v \propto \epsilon_f^{\frac{1}{3}} \log^{\frac{1}{3}} \left( \frac{fc}{f} \right), \quad (1.3)$$

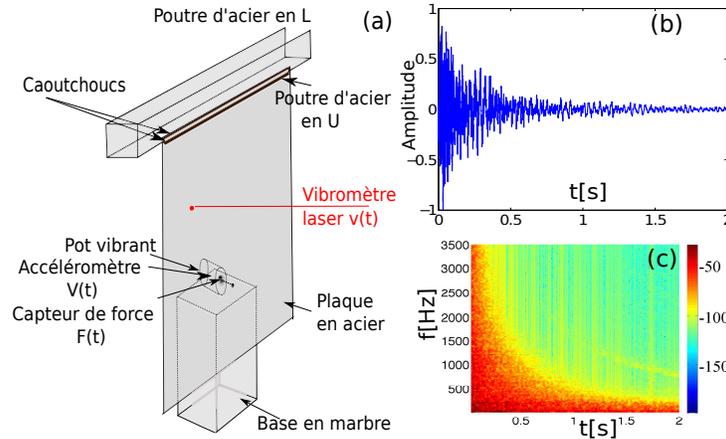
où  $\epsilon_f$  est le flux d'énergie circulant le long de la cascade jusqu'à ce qu'il soit dissipé aux abords de  $f_c$ , la fréquence de coupure du spectre. De tels spectres ont été observés numériquement [10] en injectant de l'énergie aux basses fréquences (grandes échelles) et en dissipant aux hautes fréquences (petites échelles). Les deux études expérimentales indépendantes effectuées peu après [11,12], bien que présentant des spectres de turbulence, ne retrouvent par contre pas les spectres prédits théoriquement et numériquement. En effet, les deux expériences ont mesuré des spectres de puissance de la forme

$$P_v \propto \epsilon_I^{\frac{1}{2}} \left( \frac{f}{f_c} \right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ avec } f_c \propto \epsilon_I^{1/3} \quad (1.4)$$

Trois causes principales ont alors été évoquées pour expliquer les différences entre spectres théoriques et expérimentaux : 1) la taille finie du système expérimental [13,14] ; 2) une séparation incorrecte des échelles temporelles linéaires et nonlinéaires [15] ; 3) la dissipation car elle peut affecter la fenêtre de transparence où il y a dynamique de cascade. La théorie de turbulence faible requiert que les échelles dissipatives soient largement séparées des échelles de forçage afin que l'énergie circule de façon conservative dans une gamme inertielle d'échelles. Or, dans les solides, la dissipation agit à toutes les échelles [16] de telle sorte que cette hypothèse puisse être fortement questionnée. Le but de cette étude est donc de quantifier à la fois expérimentalement et numériquement l'influence de la dissipation sur les spectres de turbulence.

Cette contribution est organisée de la façon suivante : une méthode expérimentale, permettant une mesure précise de la dissipation du système à toutes les échelles est premièrement introduite. Dans un second temps, différents régimes de dissipation sont étudiés via la dépendance du coefficient d'atténuation en fonction de la fréquence et les spectres de turbulence. Une comparaison avec des simulations numériques est également reportée en utilisant les lois de dissipation mesurées expérimentalement.

## 1.2 Méthode expérimentale



**Figure 1.1.** (a) Montage expérimental : la plaque d'acier est encastrée et forcée par un pot vibrant. Un capteur de force et un accéléromètre enregistrent la force et la vitesse à l'injection, un vibromètre laser enregistre la vitesse transverse de la plaque à un point donné. (b) Amplitude de la réponse impulsionnelle comme une fonction du temps pour la plaque en configuration 2SP (voir texte). (c) Spectrogramme (en dB) de la réponse impulsionnelle (b) en fonction du temps  $t$  et de la fréquence  $f$ .

La plaque est composée d'acier avec  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $E = 210 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.3$ , la vitesse des ondes étant donc  $c = 1570 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette plaque a pour dimensions latérales  $2 \times 1 \text{ m}$  et une épaisseur de

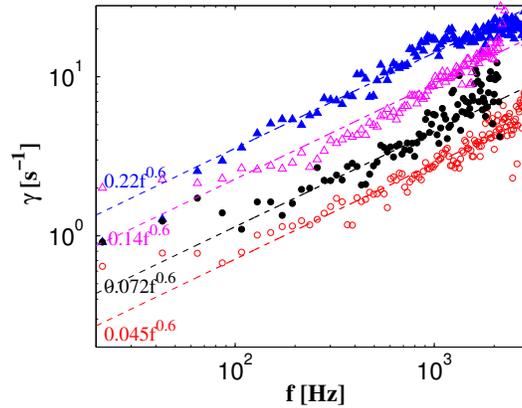
$h = 0.5\text{mm}$ . Elle pend sous son propre poids grâce à un encastrement comme décrit par la Figure 1.1(a). Un pot-vibrant LDS V455MS est placé à mi-largeur de la plaque et 62cm du bas. Un capteur de force Bruel & Kjaer Type 8230-002 est monté entre le pot-vibrant et la plaque afin de mesurer la force appliquée  $F(t)$ . Un accéléromètre Bruel & Kjaer Type 4517 monté sur le pot-vibrant donne la vitesse d'injection  $V(t)$ .  $V(t)$  et  $F(t)$  permettent de déduire la puissance injectée moyenne

$$\epsilon_I = \frac{\langle F(t).V(t) \rangle}{\rho S}, \tag{1.5}$$

où les crochets dénotent une moyenne temporelle et  $S$  la surface de la plaque. Celle-ci est mise en régime turbulent grâce à un forçage sinusoïdal de fréquence correspondant à un des premiers modes de la plaque à  $f_0 = 30\text{Hz}$ . Un vibromètre laser Polytec OFV 056 mesure la vitesse transverse  $v(t)$  à un point situé à 1m du bas de la plaque et à 40cm du bord gauche (voir Figure 1.1(a)). Les données acquises sont échantillonnées à 22kHz. Les spectres de puissance sont moyennés en temps sur des fenêtres d'1s sur 180s, de telle sorte que la résolution fréquentielle soit 1Hz.

L'amortissement naturel de la plaque (configuration  $N$ ) a été augmenté en utilisant deux techniques différentes. La première consiste à ajouter un amortissement homogène en peignant une (configuration  $1SP$ ) ou les deux ( $2SP$ ) faces de la plaque. La seconde méthode consiste à placer des amortisseurs sur tous les bords libres de la plaque naturelle dans le but d'atténuer les ondes réfléchies (configuration  $ED$ ). Ces amortisseurs ont une forme cylindrique, un diamètre de 1.7cm, et sont généralement utilisés pour l'isolation thermique de tuyaux hydrauliques. Chaque configuration est caractérisée par une mesure d'amortissement dans le régime linéaire.

A cause de la grande densité modale de la plaque expérimentale, une mesure fondée sur la réponse impulsionnelle est la plus appropriée. Cependant, et ce du fait de la grande taille système, la technique classique utilisant un marteau d'impact mène à un rapport signal-sur-bruit trop faible. La réponse impul-



**Figure1.2.** Evolution du facteur d'amortissement  $\gamma$  en fonction de la fréquence. Cercles rouges vides : configuration  $N$ , cercles noirs pleins :  $1SP$ , triangles magentas vides :  $2SP$ , triangles bleus pleins :  $ED$ . Lignes pointillées + équations : lois de puissance estimées en vue des simulations numériques.

sionnelle  $y_I(t)$  est donc ici construite à partir de la réponse  $y(t)$  à un signal d'excitation large bande  $x(t)$  et du filtre inverse  $x(T-t)E(t)$ , où  $E(t)$  dépend de l'excitation choisie  $x(t)$  afin de remplir la condition  $x(t) \otimes x(T-t)E(t) = \delta$ , où  $T$  est la longueur du signal,  $\delta$  le delta de dirac et  $\otimes$  le produit de convolution. Il vient alors

$$y_I = y(t) \otimes x(T-t)E(t). \tag{1.6}$$

La méthode développée dans [17] pour l'acoustique des salles et adaptée aux plaques réverbérantes dans [18] consiste en l'utilisation d'un sinus glissant logarithmique

$$x(t) = \sin\left[\frac{2\pi f_1 T}{\ln(f_2/f_1)}(e^{\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1)} - 1)\right], \quad (1.7)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont respectivement la plus petite et la plus grande fréquence du signal. Dans ce cas

$$E(t) = e^{\frac{t}{T} \ln(f_2/f_1) \left(\frac{-6}{\log_{10}(2)}\right)}. \quad (1.8)$$

Le sinus glissant logarithmique est particulièrement intéressant pour les systèmes non linéaires car il permet de faire une claire distinction entre les composantes linéaires et non linéaires du signal enregistré. Dans le signal résultant  $y_I(t)$ , la réponse linéaire commence à  $t = T$  alors que les contributions de chaque harmonique produite par la distorsion non linéaire arrivent avant  $t = T$ . Dans notre cas, même pour les plus faibles amplitudes de  $x(t)$ , les distorsions sont toujours observées. Nous vérifions que la réponse impulsionnelle linéaire ne dépend pas de l'amplitude du signal d'excitation, confirmant la précision de la technique. La Figure 1.1(b) montre la réponse impulsionnelle de la configuration *2SP*. Le facteur d'amortissement est alors calculé à partir de la Transformée de Fourier à Court Terme (Figure 1.1(c)). L'énergie décroît de façon exponentielle avec le temps, et plus rapidement pour les hautes fréquences que pour les basses. Le facteur d'amortissement est donné pour chaque bande de fréquence par la pente de la décroissance exponentielle.

La Figure 1.2 montre l'évolution du facteur d'amortissement  $\gamma$  pour les quatre conditions expérimentales. Il est intéressant de noter que malgré les différentes sources d'atténuation, les facteurs d'amortissement présentent tous un comportement qui peut être caractérisé par une dépendance à la fréquence sous forme d'une loi de puissance avec un exposant proche de  $0.6 \pm 0.05$ . Grâce à cette remarque, une loi générale d'amortissement peut être fixée pour l'analyse

$$\gamma(f) = \alpha f^{0.6}. \quad (1.9)$$

Nous pouvons alors déterminer pour chaque configuration le coefficient  $\alpha$  permettant la meilleure interpolation. Les quatre configurations sont alors discriminées par un coefficient relatif  $\gamma_*$ , rapport du paramètre  $\alpha$  avec celui du cas naturel  $\alpha_N$  :

$$\gamma_* = \frac{\alpha}{\alpha_N}. \quad (1.10)$$

Les facteurs d'amortissement  $\gamma_*$  sont reportés pour chaque configuration dans la Table 1.1 montrant une variation de l'atténuation d'un facteur 1 à 5.

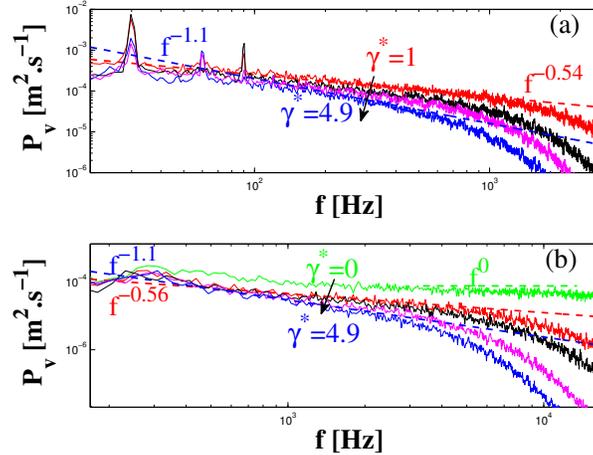
**Table 1.1.**  $\gamma_*$

Configuration	$N$	<i>1SP</i>	<i>2SP</i>	<i>ED</i>
$\gamma_*$	1	1.6	3.1	4.9

Les simulations numériques des équations de plaque de von Kármán sont effectuées à l'aide d'une méthode pseudo-spectrale déjà introduite dans [10]. Nous simulons une plaque avec des conditions aux limites périodiques et les mêmes propriétés mécaniques que celle utilisée expérimentalement ( $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$  et  $h = 0.5 \text{ mm}$ ), mais une surface de  $62 \text{ cm} \times 62 \text{ cm}$ . La plaque simulée est plus petite que dans les expériences pour prendre en compte les conditions aux limites différentes de telle sorte que le numérique doit être comparé avec le centre de la plaque uniquement.  $256 \times 256$  modes spatiaux sont résolus, en bon accord quantitatif avec la gamme de fréquence résolue expérimentalement. Les mêmes coefficients d'atténuation que dans l'expérience sont pris et l'injection est faite dans la gamme de fréquence [65 : 230] Hz.

### 1.3 Résultats

Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés en parallèle pour les quatre configurations. De plus, le cas idéal  $\gamma_* = 0$  est considéré numériquement comme témoin des prédictions théoriques de la turbulence d'ondes.



**Figure 1.3.** Densités spectrales de puissance de la vitesse transverse pour les quatre configurations. Lignes pointillées rouges + équations : plus petite pente. Lignes pointillées bleues + équations : plus grande pente. (a) Expériences : pour  $\gamma_* = 1$  (rouge)  $\epsilon_I = 0,56 \cdot 10^{-3} m^3 s^{-3}$ , pour  $\gamma_* = 1.6$  (noir)  $\epsilon_I = 0,54 \cdot 10^{-3} m^3 s^{-3}$ , pour  $\gamma_* = 3.1$  (magenta)  $\epsilon_I = 0,52 \cdot 10^{-3} m^3 s^{-3}$ , et pour  $\gamma_* = 4.9$  (bleu)  $\epsilon_I = 0,48 \cdot 10^{-3} m^3 s^{-3}$ . (b) Numérique : pour  $\gamma_* = 0$  (vert)  $\epsilon_I = 0,057 m^3 \cdot s^{-3}$ , autres cas  $\epsilon_I = 0,024 m^3 \cdot s^{-3}$ .

La Figure 1.3(a) présente les densités spectrales de puissance de la vitesse transverse pour les quatre configurations expérimentales et des puissances injectées similaires. Il est important de premièrement noter que tous les spectres présentent un comportement turbulent puisque toute la gamme de fréquence est remplie par un important couplage nonlinéaire entre les modes de vibration, couplage engendrant un processus de cascade des grandes aux petites échelles. Tous les spectres se comportent approximativement comme des lois de puissance dans la gamme de cascade avec des exposants qui deviennent clairement plus petits quand  $\gamma_*$  augmente. Pour la plaque naturelle, l'exposant  $-0.5$  est consistant avec les résultats précédents [11,12]. Pour la plaque la plus amortie, l'exposant est presque deux fois plus élevé.

La Figure 1.3(b) montre les densités spectrales de puissance de la vitesse normale simulées numériquement pour des puissances injectées plus grandes. Des spectres similaires sont trouvés, avec des comportements en lois de puissance munies d'exposants atteignant presque les mêmes valeurs qu'expérimentalement. Pour le cas théorique  $\gamma_* = 0$  avec un amortissement seulement aux petites échelles (formellement uniquement après une fréquence critique  $f_c$  correspondant à la longueur d'onde de coupure  $\lambda_c \sim 1\text{cm}$ ), le spectre est presque plat comme attendu par la théorie de turbulence d'onde.

Ces résultats montrent clairement que la pente des spectres turbulents de plaques minces en vibration présente une forte dépendance avec l'amortissement, indiquant que ce phénomène constitue un facteur important des différences entre spectres théoriques et expérimentaux.

### 1.4 Conclusions et perspectives

L'effet de l'amortissement sur le comportement turbulent de plaques en vibration a été investigué à la fois expérimentalement et numériquement. L'augmentation de la dissipation entraîne une augmentation considérable de la pente des spectres de puissance. Bien que la présence d'un régime turbulent dans lequel

un processus de cascade est impliqué ne soit pas remis en cause, notre analyse souligne qu'une comparaison directe entre les spectres de turbulence mesurés et les prédictions théoriques n'est pas approprié. En effet, le comportement des lois de puissance indique que le flux d'énergie n'est pas constant car la dissipation à toutes les échelles ne peut être négligée. Un tel effet n'est pour le moment pas pris en compte dans la théorie de turbulence d'ondes et des avancées théoriques dans cette direction seraient utiles afin de fournir un cadre permettant une comparaison intéressante entre théorie et expériences.

Nos recherches actuelles tentent de comprendre pourquoi des différences sont observées quant à la dépendance des spectres avec la puissance injectée. En effet, alors que la théorie et les simulations numériques en présence d'amortissement présentent une dépendance en puissance  $1/3$ , les expériences sont plutôt favorables à une loi en fonction de la racine carrée de la puissance injectée. La première interprétation pourrait être que les expériences sont dominées par des interactions à trois ondes alors que la théorie considère des interactions à quatre ondes. Mais là encore, l'importance de l'amortissement dans la dynamique de notre système ainsi que la dépendance de la fréquence de coupure avec la puissance injectée rendent incertaine la comparaison entre les observations expérimentales et les prédictions théoriques.

## Références

1. V. E. ZAKHAROV, V. S. LVOV, G. FALKOVICH, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I : Wave Turbulence* Springer, (1992).
2. A.C. NEWELL, B. RUMPF, Wave Turbulence, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **43** 59-78 (2011).
3. S. NAZARENKO, *Wave Turbulence* Springer (1899).
4. K. HASSELMANN, On the Non-Linear Energy Transfer in a Gravity-Wave Spectrum, *J. Fluid Mech.*, **15**, 273-281 (1962).
5. V.E. ZAKHAROV, N.N. FILONENKO, Energy Spectrum for Stochastic Oscillations of the Surface of a Liquid, *Sov. Phys. Dokl.*, **11**, 881-884 (1967).
6. P. JANSSEN, Nonlinear Four-Waves Interactions and Freak Waves, *Journal of Physical Oceanography*, **33**, 863-884 (2003).
7. E. FALCON, C. LAROCHE, S. FAUVE, Observation of Gravity-Capillary Wave Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **98**, (2007).
8. S. DYACHENKO, A.C. NEWELL, A. PUSHKAREV, V.E. ZAKHAROV, Optical Turbulence : Weak Turbulence, Condensates and Collapsing Filaments in the Nonlinear Schrödinger Equations, *Physica D*, **57**, 96-150 (1992).
9. S. GALTIER, S.V. NAZARENKO S.V., A.C. NEWELL, A. POUQUET, A Weak Turbulence Theory for Incompressible Magnetohydrodynamics, *J. Plasma Phys.*, **63**, (2000).
10. G. DÜRING, C. JOSSEMAND, S. RICA, Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, (2006).
11. A. BOUDAUD, O. CADOT, B. ODILLE, C. TOUZÉ, Observation of Wave Turbulence in Vibrating Plates, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, (2008).
12. N. MORDANT, Are There Waves in Elastic Wave Turbulence?, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, (2008).
13. B. MIQUEL, N. MORDANT, Nonstationary Wave Turbulence in an Elastic Plate, *Phys. Rev. Lett.*, **107**, (2011).
14. E. KARTASHOVA, Weakly Nonlinear Theory of Finite-Size Effects in Resonators, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 2013-2016 (1994).
15. B. MIQUEL, N. MORDANT, Nonlinear Dynamics of Flexural Wave Turbulence, *Phys. Rev. E.*, **84**, (2011).
16. A. CHAIGNE, C. LAMBOURG, Time-Domain Simulation of Damped Impacted Plates, *JASA*, **109**, 569-590 (2001).
17. A. FARINA, *Simultaneous Measurement of Impulse Response and Distortion with a Swept-Sine*, *Technique Audio Engineering Society Convention 108 AES*, (2000).
18. K. ARCAS, *Simulation numérique d'un réverbérateur à plaque* Thèse de l'école polytechnique, (2009).