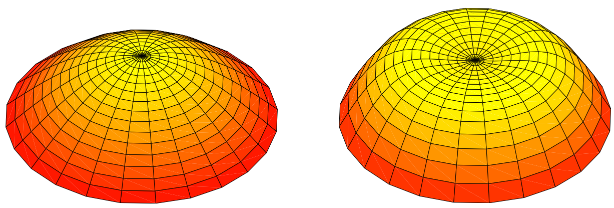
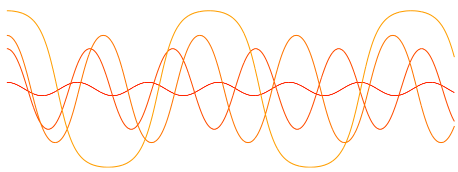
Modes non-linéaires :
Définitions et applications

JOURNÉE NATIONALE

Organisée sous la parrainage du
Groupe Scientifique et Technique “Bruit et Vibrations”





Le 18 Novembre 2005,

Conservatoire National des Arts et Métiers,
192 rue Saint-Martin, 75003 Paris

INTRODUCTION

Les problèmes mécaniques rencontrés en ingénierie contemporaine comportent de nombreuses non-linéarités :

- ▹ vibrations de grande amplitude (non-linéarités géométriques),
- ▹ problèmes de frottements et de contacts aux interfaces entre les composants d'un système,
- ▹ lois de comportement non-linéaires des matériaux utilisés.

Ces problèmes sont non seulement difficiles à modéliser, mais aussi difficiles à résoudre, si bien que diverses stratégies ont longtemps été de mise soit pour éviter ces comportements, soit pour les traiter de manière simplifiée. Or les progrès de l'étude et la fabrication des matériaux conduisent les ingénieurs à utiliser de plus en plus souvent des structures souples et flexibles, ou des matériaux dont la loi de comportement ne peut être considérée comme linéaire. Si bien qu'aujourd'hui, il est devenu difficile de faire l'impasse sur des modèles proprement posés, souvent non-linéaires, nécessitant l'utilisation de méthodes de résolution appropriées.

C'est dans ce cadre-là que des recherches sont menées afin d'étendre les notions de modes de vibration aux problèmes non-linéaires, amenant à définir des *modes non-linéaires*, qui font l'objet de cette journée de présentation. Les champs d'application des *modes non-linéaires* peuvent être regroupés dans deux grandes familles.

La formulation de modèles d'ordre réduits. Afin de simplifier les dynamiques à traiter sans pour autant perdre la physique du problème, les modes non-linéaires s'avèrent être un outil efficace. Appliqués à des codes de calcul par éléments finis, ces développements seront à mêmes, dans le futur, de réduire considérablement les temps de calcul.

Le contrôle passif de vibrations par transfert d'énergie. Dans ce cadre-là, les non-linéarités géométriques de certaines structures minces sont mises à profit afin de construire des absorbeurs de vibrations non-linéaires : l'énergie est transférée du système vibrant à amortir vers le second, dans lequelle elle est finalement dissipée.

Les objectifs de la journée sont d'une part de rappeler les notions essentielles définissant les modes non-linéaires, d'autre part de proposer des exemples concrets d'applications.

La matinée sera consacrée aux définitions. Un panorama des différents types de non-linéarité que l'on rencontre en dynamique, ainsi que leurs modélisations, sera proposé. Ensuite, les définitions d'un mode non-linéaire seront établies, et on verra sur quel type de problèmes particuliers cet outil est à-même d'apporter une solution efficace.

L'après-midi sera consacré aux applications. Seront montrés successivement : des exemples de réduction de modèles sur des structures couramment utilisées en ingénierie, du contrôle passif par transfert d'énergie, ainsi que des modèles de résolution pour les problèmes de frottements rencontrés dans les freins et les trains d'atterrissage.

Cette journée d'étude est ouverte aussi bien aux universitaires qu'aux industriels désireux d'élargir leurs connaissances ou souhaitant se renseigner sur des techniques innovantes et encore peu connues. Dans les présentations, l'accent est délibérément mis sur les cas pratiques où ces techniques ont déjà montré tout leur potentiel.

Ce fascicule propose un résumé d'une page de chacune des présentations de la journée, ainsi qu'une bibliographie commentée, dont le but est d'aider et d'orienter les auditeurs soucieux d'en savoir plus vers les publications existantes.

Paris, le 15 Novembre 2005,
Les organisateurs :

Olivier THOMAS
(CNAM-LMSSC),

Cyril TOUZÉ
(ENSTA-UME).

PANORAMA DES NON-LINÉARITÉS RENCONTRÉES EN VIBRATION

Olivier Thomas[♯] **Fabrice Thouverez**[♭]

[♯] Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSc),
Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM),
2 rue Conté, 75003 Paris,
olivier.thomas@cnam.fr

[♭] Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS),
École Centrale de Lyon
36 avenue Guy de Collongue, BP 163, 69131 Ecully Cedex,
Fabrice.Thouverez@ec-lyon.fr

L'objectif de cette présentation est de proposer un classement en trois grandes familles des non-linéarités que l'on rencontre usuellement en mécanique et en dynamique. Seront définies et commentées :

Les non-linéarités géométriques. Elles apparaissent dans des structures ou des mécanismes soumis à des mouvements de grande amplitude. Leur fondement physique ainsi que leur principales manifestations seront rappelés à la fois dans le cas de mécanismes composés de solides rigides et pour des structures minces déformables. Trois exemples seront présentés :

- ▷ un pendule bi-articulé,
- ▷ un système à deux barres articulées constituant un ressort purement non-linéaire utilisé dans des absorbeurs de vibrations non-linéaires,
- ▷ une coque sphérique mince en vibrations de grande amplitude.

Ces systèmes permettront de mettre en évidence les principaux effets des non-linéarités géométriques : la distortion harmonique des oscillations, la dépendance des fréquences d'oscillations libre en fonction de l'amplitude, des réponses quasi-périodiques et chaotiques avec sensibilité aux conditions initiales, échanges d'énergie entre modes et bifurcations.

Les non-linéarités matérielles. Elles proviennent d'une relation de comportement non-linéaire du matériaux : la relation entre les contraintes et les déformations dans le matériau est non-linéaire. Trois exemples seront présentés.

- ▷ Les matériaux élasto-plastiques. C'est le cas usuel de loi de comportement non-linéaire, qui ne sera qu'évoqué car il a peu d'applications en vibrations du fait de son irréversibilité.
- ▷ Les matériaux de type élastomère, en général très dissipatifs.
- ▷ Les alliages à mémoire de forme, qui commencent à être étudiés et utilisés en contrôle de vibrations, notamment du fait de l'hystérésis associée à leur comportement, qui produit de l'amortissement.

Les non-linéarités de contact. Dans cette troisième famille, on classe toutes les non-linéarités liées au contact entre solides. Trois grandes familles seront évoquées.

- ▷ Le contact entre solides à travers une surface de dimensions réduite pour lequel le modèle associé aux loi de Hertz est en général utilisé.
- ▷ Le frottement sec, qui produit une relation entre les efforts de contact et la vitesse de glissement fortement non-régulière.
- ▷ Les contacts intermittents.

Pour chacune des non-linéarités, des exemples pratiques seront proposés, et le caractère régulier ou non-régulier de la non-linéarité sera défini et précisé.

DÉFINITION DES MODES NON-LINÉAIRES

Bruno Cochelin

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), CNRS - UPR 7051,
Ecole d'Ingenieur Généraliste de Marseille (EGIM),
Technopole de chateau Gombert, 13383 Marseille cedex 13

bruno.cochelin@egim-mrs.fr

L'objet de cet exposé est de définir et d'illustrer la notion de modes non-linéaires pour des systèmes mécaniques qui présentent des équations du mouvement régulières. Un exemple caractéristique est celui des structures élastiques minces (poutres, plaques, coques) qui effectuent des oscillations d'amplitudes finies (non-linéarité géométrique) au voisinage de positions d'équilibre stables : les non-linéarités sont alors de type polynomiales, quadratiques et cubiques. L'accent est mis volontairement sur l'évolution de la définition et du calcul des modes non-linéaires depuis les travaux fondateurs de Rosenberg (1962) jusqu'à nos jours.

Dans une première partie, on présente les notions de "vibrations à l'unison" et de "lignes modales", introduites en 1962-1966 par Rosenberg et ses collaborateurs, pour des systèmes masses-ressorts conservatifs avec des forces de rappels impaires. Outre la présentation des équations qui définissent ces mouvements modaux non linéaires, on effectue des simulations numériques simples pour illustrer le concept de ligne modale.

La seconde partie de l'exposé concerne la généralisation due à Shaw et Pierre (1991-1994). Le mode non-linéaire est défini comme l'ensemble des mouvements qui se situent dans un sous-espace invariant de dimension 2 de l'espace des phases, tangent à l'origine (i.e. pour des amplitudes de vibrations nulles) aux sous-espaces propres du système linéaire sous-jacent. On étend ainsi la notion de *mode* à une classe plus large de mouvements, en faisant de l'invariance la clé d'une redécomposition en sous-espaces qui seront courbés. Cette définition, plus générale et qui s'appuie sur le formalisme des systèmes dynamiques, permet de traiter des forces de rappels quelconques et d'inclure de l'amortissement, ou des termes gyroscopiques. Là encore, des simulations numériques sur un système élémentaire à deux degrés de liberté permettent de visualiser les modes non linéaires.

Enfin, comme une motivation à l'étude de ces modes non-linéaires, on montrera par des simulations numériques que, comme pour les systèmes linéaires, les résonances principales se produisent dans le voisinage immédiat des modes non-linéaires. Quelques méthodes de calculs des modes non-linéaires seront également abordées.

QUELQUES PROBLÈMES INDUSTRIELS EN DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE

Stéphane Andrieux

LANSID, Laboratoire de Mécanique des structures industrielles durables, CNRS-UMR 2832
EDF, Électricité de France, Division Recherche et Développement,
1, avenue du Général De Gaulle, 92141 Clamart
stephane.andrieux@edf.fr

Certains problèmes industriels nécessitent de prendre en compte des non linéarités, souvent localisées. Il s'agit en particulier pour EDF d'analyser des désordres ou des scénarios non prévus à la conception, conception réalisée dans l'immense majorité des cas en ne prenant en considération que des comportements linéaires.

Parmi quelques cas de problèmes en cours d'analyse ou encore ouverts, on présente :

- L'analyse du comportement vibratoire de rotors de turbines de grands groupes turbo alternateurs ou d'arbre de pompes primaires présentant des fissurations et la recherche de descripteurs pertinents pour leur surveillance en service : la non linéarité provient ici la réouverture-fermeture progressive de fissures lors de la rotation de l'arbre ;
- Le comportement vibratoire des grappes de commande des cœurs des centrales à eau pressurisée (non linéarité de contact frottement) ;
- Les questions de vibrations de structures de génie civil microfissurées pour la vérification des sollicitations subies par les matériels dans la phase post pics d'un séisme intervenant sur une installation industrielle (non linéarité dues à un comportement asymétrique en traction-compression ou en flexion).

La prise en compte des non linéarités permet de tenter de comprendre les phénomènes observé mais également de dégager ou d'identifier des marges vis à vis du dimensionnement initial, marges indispensables à la maîtrise du vieillissement des installations ou à la réponse à des exigences accrues pour leur exploitation.

NONLINEAR NORMAL MODES OF A ROTATING HELICOPTER BLADE

Christophe Pierre[♭] **Dongying Jiang**[♯] **Steve Shaw**[§]

[♭] Dean, Faculty of Engineering,
Canada Research Chair in Structural Dynamics and Vibration,
McGill University, Montréal, Québec
christophe.pierre@mcgill.ca

[♯]MKP Structural Design Associates, Inc. ,
Ann Arbor, Michigan,

[§] Department of Mechanical Engineering,
Michigan State University, East Lansing, Michigan

This research aims at the implementation of new model reduction methods for a nonlinear rotating blade system, based on a nonlinear modal analysis methodology. Invariant manifolds in the systems phase space are used to define nonlinear normal modes of motion for the nonlinear vibratory blade system. A numerical Galerkin technique is utilized to solve for the invariant manifolds, which allows one to construct nonlinear normal modes and carry out nonlinear mode-based model reduction for motions in strongly nonlinear regions of the phase space.

This method seamlessly interfaces with the finite element model (FEM) of a prototype of an active twist rotor (ATR) rotorcraft blade, which features significant nonlinear behavior due to rotation, large deformation, and complex blade geometry and materials. The nonlinear normal mode corresponding to the first-order bending motion of the ATR blade is successfully constructed, and a single-DOF reduced-order model is obtained from the corresponding invariant manifold. This reduced-order model accurately and efficiently represents the nonlinear dynamics of the ATR blade in its first-order bending mode.

Numerical time simulations on the invariant manifold show that the lead-lag and axial elongation motions are essential in capturing the bending-dominated blade motion accurately. Due to the generality of the proposed methodology, the invariant-manifold-based model reduction methodology can be conveniently extended to more complete rotating blade models, including those with aerodynamic coupling.

MODÈLES D'ORDRE RÉDUIT POUR LES VIBRATIONS NON-LINÉAIRES GÉOMÉTRIQUES DE COQUES MINCES

Cyril Touzé[♭] **Olivier Thomas**[♯] **Marco Amabili**[§]

[♭] Unité de mécanique (UME)
École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA),
Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau Cedex,
cyril.touze@ensta.fr

[♯] Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSc),
Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM),
2 rue Conté, 75003 Paris,
olivier.thomas@cnam.fr

[§] Dipartimento di Ingegneria Industriale,
Università degli Studi di Parma,
Parco Area delle Scienze 181/A, 43100 Parma, Italie
marco@me.unipr.it

L'étude des vibrations de grande amplitude (non-linéarité géométrique) de coques minces présente de nombreuses difficultés, tant du point de vue théorique (complexité des équations, convergence des solutions) que phénoménologique (richesse des comportements possibles). Dans cette présentation, nous nous attacherons à montrer comment l'utilisation des *modes non-linéaires* permet, grâce à la réduction de la dimension des équations à traiter, de déduire des résultats hors de portée d'une étude "classique" utilisant les modes linéaires.

Tout d'abord, la méthodologie employée pour le calcul des *modes normaux non-linéaires* est rappelée. Elle est fondée sur la théorie des formes normales : un changement de variables non-linéaire, permettant de passer de l'espace des modes linéaires à celui des *modes non-linéaires*, est défini, de telle sorte que le calcul présente des ressemblances avec celui utilisé au stade linéaire. Il sera ensuite démontré qu'une troncature selon les modes non-linéaires donnera de meilleurs résultats qu'une usuelle troncature linéaire par la méthode de Galerkin. La méthode sera ensuite appliquée à deux cas différents.

Tout d'abord le cas d'une coque sphérique faiblement courbée sera traité. La réduction, permise par les modes non-linéaires, permet d'effectuer une étude paramétrique du type de non-linéarité de la coque, en fonction de sa courbure. Par type de non-linéarité, on entend le type de dépendance de la fréquence d'oscillation avec l'amplitude. Si la fréquence augmente avec l'amplitude, on parlera de mode "raidissant" (*hardening behaviour* en anglais), sinon de mode "assouplissant" (*softening behaviour*). Alors que la prédiction de ce type de non-linéarité est une des données premières caractérisant le comportement de la coque, les méthodes linéaires ne permettait pas de donner cette simple information à cause de la complexité mise en jeu. La puissance de la réduction offerte par l'introduction des modes non-linéaires sera donc ici soulignée.

Ensuite, le cas d'une coque cylindrique, remplie d'un liquide (eau) au repos, sera montré. L'étude des solutions vibratoires au voisinage d'une des permières fréquences d'un mode asymétrique sera menée. Un modèle utilisant 16 modes linéaires, pour lequel la convergence est obtenue, donnera une solution de référence, montrant des couplages entre les deux configurations du mode. Ce modèle sera réduit à 2 modes non-linéaires, diminuant drastiquement la complexité mise en jeu, et on montrera que les solutions présentent un excellent accord qualitatif et quantitatif. Enfin, une autre méthode de réduction, la méthode de Karhunen-Loève (*Proper Orthogonal Decomposition (POD)* en anglais), sera comparée, montrant qu'il faut alors 3 modes dans ce cas-là pour retrouver la dynamique originale, et un temps de calcul beaucoup plus long pour construire le modèle réduit.

VIBRATIONS DE FREINS AÉRONAUTIQUES

Jean-Jacques Sinou [♭] **Fabrice Thouverez**[♭] **Louis Jézéquèl** [♭]
Olivier Dereure[♯] **Guy-Bernard Mazet**[♯]

[♭] Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS),
Équipe D2S, UMR CNRS 5513,
École Centrale de Lyon,
36 avenue Guy de Collongue, BP 163, 69131 Ecully Cedex,
Jean-Jacques.Sinou@ec-lyon.fr

[♯] Messier-Bugatti, Division Freinage Aéronautique,
Zone Aéronautique Louis Bréguet, BP 40, 78140 Vélizy-Villacoublay.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes - Ecole Centrale de Lyon et Messier-Bugatti - Division Freinage Aéronautique. Nous présentons ici un travail de modélisation adapté à la caractérisation des phénomènes instables pouvant apparaître sur des freins aéronautiques. Notre but est d'obtenir des modèles de comportement de structures non-linéaires complexes permettant de prédire aussi bien les fréquences d'instabilité que les niveaux vibratoires associés.

La détermination des zones d'instabilité et des fréquences associées ainsi que les phénomènes physiques influants sur la stabilité du système s'effectue à partir de l'analyse des valeurs propres complexes du système linéarisé. L'obtention des amplitudes vibratoires est effectuée sur le système non-linéaire complet au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Ces cycles limites peuvent être obtenus par l'intermédiaire d'une intégration temporelle du système, mais cela nécessite un coût numérique et un temps de calcul trop important et prohibitifs. Afin d'éviter ceci, nous proposons la mise en place de deux approches non-linéaires.

Une extension de la méthode de la variété centrale par l'utilisation des approximants de Padé et de la méthode de la balance harmonique. Par l'intermédiaire de cette approche, on réalise une réduction de la taille du système dynamique non-linéaire (méthode de la variété centrale), une simplification des termes non-linéaires avec une augmentation du domaine de validité de la solution (approximants de Padé) et une recherche de solution sous forme prédéfinie telle qu'une série de Fourier tronquée (méthode de la balance harmonique),

Une nouvelle approche itérative non-linéaire se basant sur la notion de mode non-linéaire instable. Cette approche permet d'obtenir de façon simple et efficace les niveaux vibratoires. Elle utilise le suivi du mode non-linéaire instable du système linéaire équivalent et la recherche de la solution périodique associée par suivi de la valeur propre du mode non-linéaire instable.

CONTRÔLE PASSIF PAR TRANSFERT D'ÉNERGIE

Emmanuel Gourdon **Claude-Henri Lamarque** **Stéphane Pernot**

ENTPE/DGCB/LGM – URA 1652 CNRS,
Rue Maurice Audin, 69518 Vaulx en Velin Cedex,
gourdon@entpe.fr, lamarque@entpe.fr, pernot@entpe.fr

On s'intéresse à l'étude d'absorbeurs passifs non linéaires. En effet, par couplage très faible d'une structure existante (linéaire ou linéarisée, par exemple un bâtiment, un tablier de pont, une aile d'avion, une machine-outil, une structure mécanique,...voire non linéaire), avec une petite structure annexe à comportement non linéaire (et dimensionnée de façon adéquate) : il est possible de :

1. très peu modifier les caractéristiques de la structure existante (fréquences et modes propres en particulier) ;

2. créer un *mode de vibration non linéaire* tel que, sous la moindre sollicitation (instationnaire entre autre comme un choc ou comme les séismes) exercée sur la structure linéaire, celle-ci vibre moins que sans le couplage.
Il se produit une résonance de la petite structure annexe ajoutée qui va concentrer l'essentiel des vibrations, le phénomène de *pompage énergétique* transférant l'énergie de la structure primaire vers la structure non linéaire.

Ces absorbeurs passifs non linéaires se révèlent être à meilleure efficacité que les absorbeurs passifs linéaires classiques tels les amortisseurs de Frahm très répandus dans l'industrie (masse ajoutée plus faible et amortissement plus rapide des vibrations, élargissement de la zone fréquentielle où l'atténuation est efficace) pour équiper notamment les structures du Génie Civil (bâtiments, ouvrages d'art) et Génie Mécanique afin d'amortir les vibrations en cas de sollicitations externes (chocs, vibrations, vent, séisme...).

Ils possèdent aussi une meilleure robustesse (toujours bonne efficacité avec faibles changements des paramètres de la structure initiale). Utilisant une simple raideur non-linéaire (non-linéarité géométrique à l'aide de ressorts par exemple), ces amortisseurs sont pratiques à implémenter. De plus, les amortisseurs passifs linéaires classiques de type Frahm déjà existant modifient les caractéristiques de la structure principale (les modes propres sont généralement modifiés) ce qui peut poser de nombreux problèmes.

Après avoir montré le principe du pompage énergétique avec l'étude de la résonance de modes non linéaires, le phénomène est étudié d'une part en régime instationnaire (pendant le transitoire avec des impulsions) et en régime stationnaire d'autre part (avec des excitations périodiques). Ces absorbeurs passifs à raideur non linéaire sont notamment comparés aux absorbeurs classiques existants pour mettre en évidence les intérêts d'un tel dispositif ajouté pour atténuer les vibrations d'une structure quelconque.

BIBLIOGRAPHIE SÉLECTIVE :
MODES NON-LINÉAIRES EN THÉORIE DES VIBRATIONS

1 Livres

La plupart des idées utilisées pour la définition des *modes non-linéaires* trouvent leur origine dans la théorie des systèmes dynamiques. A ce titre, les ouvrages classiques de mathématiques suivants sont incontournables, puisqu'ils contiennent tous les outils nécessaires à la compréhension.

Le livre de Guckenheimer et Holmes, par son équilibre entre développements mathématiques et exemples physiques simples, est devenu la référence standard :

▷ J. Guckenheimer et P. Holmes : Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, Springer-Verlag, 1983.

Les ouvrages suivants de Iooss et Joseph, et Iooss et Adelmeyer en constituent un excellent complément pour certains développements mathématiques très utiles :

▷ G. Iooss et D.D. Joseph : Elementary stability and bifurcation theory, Springer, 1980.
▷ G. Iooss et M. Adelmeyer : Topics in bifurcation theory, World Scientific, second Edition, 1998.

Des ouvrages moins récents font toujours référence, comme par exemple celui-ci d'Arnol'd, disponible en français :

▷ V. I. Arnol'd : Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires, Mir/Librairie du Globe, Moscow/Paris, 1980.

Enfin, les lecteurs francophones auraient tort de se priver de la lecture de l'ouvrage de Paul Manneville, qui, bien que traitant essentiellement des fluides pour les applications, présente très clairement les résultats élémentaires de la théorie des systèmes dynamiques :

▷ P. Manneville : Instabilités, Chaos et Turbulence, Éditions de l'École Polytechnique, 2004.

En ce qui concerne la littérature mécanique, on trouve actuellement deux livres dont certaines parties sont entièrement dévolues aux modes non-linéaires. Cependant, comme le sujet connaît encore actuellement des développements, ils ne présentent pas le sujet de manière exhaustive. Le livre de Vakakis *et al.* met en exergue des développements qui poursuivent les idées de Rosenberg :

▷ A. F. Vakakis and L. I. Mikhlin and Y. V. Philipchuck and A. A. Zevin : Normal modes and localization in non-linear systems, Wiley interscience, 1996.

Alors que les ouvrages de Nayfeh insistent essentiellement sur les résultats obtenus à l'aide de méthodes perturbatives, ils fournissent cependant un certain nombre de comparaisons entre méthodes, ce qui est appréciable. On peut citer :

▷ A. H. Nayfeh : Nonlinear interactions : analytical, computational and experimental methods, Wiley series in nonlinear science, 2000.

2 Articles

2.1 Définitions des modes non-linéaires

L'article "fondateur" de Rosenberg est intéressant pour le côté historique des développements de la théorie :

▹ R. M. Rosenberg : On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, **9**, pp. 155-242, 1966.

Son approche a été poursuivie par Vakakis :

▹ A.F. Vakakis, Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory : an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **11**(1), pp. 3-22, 1997.

Ainsi que R. Rand, qui propose une méthode géométrique dans :

▹ R. H. Rand, A direct method for non-linear normal modes, *International Journal of Non-linear Mechanics*, **9**, pp. 363-368, 1974.

La définition en terme de variété invariante, qui utilise au mieux les développements des systèmes dynamiques (en particulier le théorème de réduction à la variété centrale), a été proposée par Shaw et Pierre :

▹ S. W. Shaw and C. Pierre, Non-linear normal modes and invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration*, **150**(1), pp. 170-173, 1991.

▹ S.W. Shaw and C. Pierre, Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of Sound and Vibration*, **164**(1), pp. 85-124, 1993.

2.2 Méthodes de Calcul

2.2.1 Techniques asymptotiques

Les premiers travaux de Shaw et Pierre proposaient un développement asymptotique pour le calcul des variétés invariantes. Outre l'article cité précédemment de 1993, on peut noter :

▹ N. Boivin, C. Pierre et S. W. Shaw : Non-linear normal modes, invariance, and modal dynamics approximations of non-linear systems, *Nonlinear Dynamics*, **8**(3), pp. 315 - 346, 1995.

La théorie des formes normales, introduite par Poincaré, permet, dans le contexte des systèmes vibratoires, de définir et calculer les modes non-linéaires via un développement asymptotique. Jézéquèl et Lamarque en utilisent la formulation en terme de nombres complexes :

▹ L. Jézéquèl et C.H. Lamarque : Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory, *Journal of Sound and Vibration*, **149**(3), pp. 429-459, 1991.

Alors que Touzé *et al.* proposent une formulation réelle qui permet de conserver des oscillateurs tout au long du calcul :

▹ C. Touzé, O. Thomas et A. Chaigne : Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes, *Journal of Sound and Vibration*, **273**(1-2), pp. 77-101, 2004.

▹ C. Touzé, O. Thomas et A. Huberdeau : Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures, *Computers and Structures*, **82**(31-32), pp. 2671-2682, 2004.

L'arsenal des développements perturbatifs a été mis a profit, entre autre par Nayfeh et ses collaborateurs, afin de calculer les premiers termes des développements des solutions oscillatoires le long des variétés invariantes. Outre le livre de Nayfeh déjà cité, on peut mentionner :

▹ A. H. Nayfeh and S. A. Nayfeh : On nonlinear modes of continuous systems, *Journal of Vibration and Acoustics*, **116**, pp. 129-136, 1994.

▹ A. H. Nayfeh and W. Lacarbonara : On the discretization of distributed-parameter systems with quadratic and cubic nonlinearities, *Nonlinear Dynamics*, **13**, pp. 203-220, 1997.

▹ W. Lacarbonara, G. Rega and A. H. Nayfeh : Resonant non-linear normal modes. Part I : analytical treatment for structural one-dimensional systems, *International Journal of Non-linear Mechanics*, **38**(6), pp. 851-872, 2003.

▹ W. Lacarbonara et R. Camillacci : Nonlinear normal modes of structural systems via asymptotic approach, *International Journal of Solids and Structures*, **41**(20), pp. 5565-5594, 2004.

Enfin, King et Vakakis proposent une méthode de calcul utilisant la conservation de l'énergie du système :

▹ M. E. King et A. F. Vakakis : Energy-based formulation for computing nonlinear normal modes in undamped continuous systems, *Journal of Vibration and Acoustics*, **116**(3), p. 332-340, 1994.

2.2.2 Techniques numériques

Afin de s'affranchir des limitations dues aux développements asymptotiques, les derniers travaux de Shaw et Pierre proposent un calcul numérique de la variété invariante :

▹ E. Peshek, C. Pierre et S. W. Shaw : A new Galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration*, **249**(5), pp. 971-993, 2002.

▹ D. Jiang, C. Pierre et S. W. Shaw : The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance, *International Journal of Non-linear Mechanics*, **40**(5), pp. 729-746, 2005.

Ce qui leur permet d'appliquer la méthode au cas d'un forçage harmonique, au prix de temps de calcul longs :

▹ D. Jiang, C. Pierre et S. W. Shaw : Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation, *Journal of Sound and Vibration*, **288**(4-5), pp. 791-812, 2005.

L'article suivant de Slater propose une méthode de calcul numérique qui utilise des idées que l'on retrouve dans les méthodes de continuation :

▹ J.C. Slater : A numerical method for determining nonlinear normal modes, *Nonlinear Dynamics*, **10**, pp.19-30, 1996.

Bellizzi et Bouc expriment les modes non-linéaires en postulant une formulation qui étend la notion de mode linéaire. Le problème non-linéaire résultant de cette formulation est ensuite résolu numériquement :

▹ S. Bellizzi et R. Bouc : A new formulation for the existence and calculation of nonlinear normal modes, *Journal of Sound and Vibration*, **287**(3), p. 545-569, 2005.

Leur approche est comparée aux résultats donnés par une méthode de continuation, toujours pour le cas conservatif :

▹ R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc et B. Cochelin : Two methods for the computation of non linear modes of vibrating systems at large amplitude, *Computers and Structures*, à paraître, 2005.

Dans un ordre d'idée très proche des variétés invariantes présentées ci-dessus, les travaux de Sinha et Butcher portent sur le cas des systèmes forcés paramétriquement, pour lesquels ils développent des méthodes semblables, via la transformation de Lyapunov-Floquet puis une troncature selon les variétés invariantes :

- ▹ S. C. Sinha, S. Redkar et E. A. Butcher : Order reduction of nonlinear systems with time periodic coefficients using invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration*, **284**(3-5), p. 985-1002, 2005.
- ▹ S. C. Sinha, S. Redkar, V. Deshmukh et E. A. Butcher : Order reduction of parametrically excited nonlinear systems : Techniques and applications, *Nonlinear Dynamics*, **41**, pp.237-273, 2005.

2.2.3 Éléments finis

De nombreux travaux sont actuellement menés sur des applications des idées précédentes pour des modèles traités en éléments finis. Les articles correspondants utilisent les concepts de Méthode de Galerkin non-linéaire, ou méthode de Galerkin post-traitée, afin de fournir des approximations plus justes des modes non retenus, via des variétés invariantes ou inertielles. Les trois articles suivants de mathématiciens en fondent les principes :

- ▹ M. Marion et R. Temam : Nonlinear Galerkin methods : The finite element case, *Numerische Mathematik (Historical Archive)*, **57**(1), pp. 205 - 226, 1990.
- ▹ B. Garcia-Archilla, J. Novo et E. S. Titi : Postprocessing the Galerkin Method : a Novel Approach to Approximate Inertial Manifolds, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**(3), pp.941-972, 1998.
- ▹ L. G. Margolin, E. S. Titi, S. Wynne : The postprocessing Galerkin and nonlinear Galerkin methods : a truncation analysis point of view, *SIAM Jounral of numerical analysis*, **41**(2), pp. 695-714, 2003.

Ces méthodes ont été appliquées en mécanique vibratoire dans les articles suivants :

- ▹ C. Sansour, P. Wriggers et J. Sansour : A finite element post-processed Galerkin method for dimensional reduction in the nonlinear dynamics of solids. Applications to shells, *Computational Mechanics*, **32**, pp. 104-114, 2003.
- ▹ H.G. Matthies et M. Meyer : Nonlinear Galerkin methods for the model reduction of nonlinear dynamical systems, *Computers and Structures*, **81**(12), pp. 1277-1286, 2003.
- ▹ C. R. Laing, A. Mc Robie et J. M. T. Thompson : The post-processed Galerkin method applied to non-linear shell vibrations, *Dynamics and Stability of Systems*, **14**(2), pp 163 - 181, 1999.

Enfin, l'approche par variété invariante de Shaw et Pierre est interfacée avec des éléments finis dans :

- ▹ P. Apiwattanalunggarn, S. Shaw, C. Pierre et D. Jiang : Finite-Element-Based Nonlinear Modal Reduction of a Rotating Beam with Large-Amplitude Motion, *Journal of Vibration and Control*, **9**(3-4), pp. 235-263, 2003.

2.3 Applications

La plupart des articles cités précédemment contiennent déjà des applications, où le but recherché est essentiellement de réduire la dynamique des systèmes étudiés. C'est d'ailleurs sur le thème des modèles d'ordre réduit que les modes non-linéaires ont été intialement conçus. En sus des articles précédents, les deux articles suivants donnent un bon panorama des méthodes existantes, en considérant d'autres techniques que les modes non-linéaires, comme par exemple la décomposition en modes orthogonaux (POD ou méthode de Karhunen-Loève) :

- ▷ A. Steindl and H. Troger : Methods for dimension reduction and their applications in nonlinear dynamics, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, pp. 2131-2147, 2001.
- ▷ G. Rega and H. Troger : Dimension reduction of dynamical systems : Methods, models, applications, *nonlinear Dynamics*, **41**, pp.1-15, 2005.

L'article de revue suivant permet de voir les applications d'autres méthodes, comme les approximants de Padé pour le calcul de la variété centrale, ou la méthode alternée temps/fréquence, à des systèmes provenant de l'ingénierie :

- ▷ J.-J. Sinou, F. Thouverez et L. Jézéquel : Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation, *Archives of computational methods in Engineering*, **11**(3), pp. 257-344, 2004.

On trouvera une application à un modèle de pales d'hélicoptère dans :

- ▷ E. Pesheck, C. Pierre et S. W. Shaw : Accurate reduced-order models for a simple rotor blade model using nonlinear normal modes, *Mathematical and computer modelling*, **33**, pp. 1085-1097, 2001.

Le cas des palier à roulements de rotor est traité dans :

- ▷ C. Villa, J.-J. Sinou and F. Thouverez, The Invariant Manifold Approach Applied to Non-Linear Dynamics of a Rotor-Bearing System, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **24**, pp. 676-689, 2005.

Enfin un cas de système de frein avec contact rotor/stator en friction est traité dans :

- ▷ J.-J. Sinou, F. Thouverez et L. Jézéquel : Non-linear stability analysis of a complex rotor/stator contact system, *Journal of Sound and Vibration*, **278**(4-5), pp. 1095-1129, 2004.

Les cas des systèmes linéaires par morceaux est traité dans :

- ▷ D. Jiang , C. Pierre et S. W. Shaw : Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems, *Journal of Sound and Vibration*, **272**(3-5), pp. 869-891, 2004.

Des absorbeurs de vibrations sont traités dans :

- ▷ G. S. Agnes et D.J. Inman : Performance of nonlinear vibration absorbers for multi-degree-of-freedom systems using nonlinear normal modes, *Nonlinear Dynamics*, **25**, pp.275-292, 2001.

2.4 Pompage énergétique

Une application à fort potentiel des techniques utilisant les modes non-linéaires a vu récemment le jour, par la mise au point de contrôleurs passifs de vibration. Dans ce cadre-là, la non-linéarité du système est utilisée afin de "pomper" l'énergie d'un système vibrant de manière irréversible. Les articles suivants en posent les bases théoriques :

- ▷ O. Gendelman, L. I. Manevitch, A. F. Vakakis et R. M. Closkey : Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators, Part I : Dynamics of the Underlying Hamiltonian Systems, *Journal of Applied Mechanics*, **68**(1), pp. 34-41, 2001.
- ▷ A. F. Vakakis et O. Gendelman : Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators, Part II : Resonance capture, *Journal of Applied Mechanics*, **68**(1), pp. 42-48, 2001.
- ▷ A. F. Vakakis, L. I. Manevitch, O. Gendelman et L. Bergman : Dynamics of linear discrete systems connected to local, essentially non-linear attachments, *Journal of Sound and Vibration*, **264**(3), pp. 559-577, 2003.

- ▷ A. F. Vakakis, D.M. McFarland, L. Bergman, L. I. Manevitch et O. Gendelman : Isolated Resonance Captures and Resonance Capture Cascades Leading to Single- or Multi-Mode Passive Energy Pumping in Damped Coupled Oscillators, *Journal of Vibration and Acoustics*, **126**(2), pp. 235-244, 2004.

Des vérifications expérimentales sont montrées dans :

- ▷ D. M. McFarland, L. A. Bergman et A. F. Vakakis : Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency, *International Journal of Non-linear Mechanics*, **40**(6), 891-899, 2005.
- ▷ X. Jiang, D. M. McFarland, L. A. Bergman et A. F. Vakakis : Steady State Passive Nonlinear Energy Pumping in Coupled Oscillators : Theoretical and Experimental Results, *Nonlinear Dynamics*, **33**(1), pp. 87-102, 2003.

Et l'application au cas d'un immeuble soumis à une excitation sismique est considérée dans :

- ▷ E. Gourdon et C. H. Lamarque : Energy Pumping with Various Nonlinear Structures : Numerical Evidences, *Nonlinear Dynamics*, **40**(3), pp. 281-307, 2005.