

Techniques d'ordre supérieur pour l'élimination d'exposants de Lyapunov fallacieux.

C. Touzé, D. Matignon

ENST, Département TSI & CNRS, URA 820

46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13.

`touze@tsi.enst.fr`, <http://www.tsi.enst.fr/~touze>

Résumé

Les techniques de reconstruction de l'espace des phases permettent de calculer des invariants d'orbite pour un système dynamique, à partir de la mesure d'une seule série temporelle. L'extraction de quantités dynamiques (telles que les exposants de Lyapunov) est fondée sur l'approximation du Jacobien local de la trajectoire dans l'espace tangent reconstruit. Cette approximation, bien souvent linéaire, conduit à des artefacts de calcul ; dans le cas du spectre de Lyapunov on trouve ainsi par cette méthode des exposants fallacieux, multiples des vrais. Nous verrons que l'utilisation d'approximations d'ordres supérieurs permet de remédier à ce problème et ainsi d'éliminer ces exposants fallacieux qui nuisent à l'interprétation des résultats.

1 Introduction

Les méthodes dites de traitement des signaux non-linéaires sont fondées sur les théorèmes de reconstruction de l'espace des phases à partir d'une série temporelle, théorèmes dus à Whitney, Takens et Mañé [1, 2]. L'intérêt pratique est indéniable puisqu'en théorie, à partir d'une mesure d'un système physique, on peut remonter à une représentation dans un pseudo-espace des phases, et retrouver ainsi les invariants d'orbite du système dynamique ayant engendré les observations, sans connaître ni le nombre de coordonnées généralisées du système, ni les équations gouvernant son évolution. Ces méthodes ont connu un essor très important ces dernières années et ont été appliquées à de très nombreux problèmes physiques [3].

Un des problèmes centraux consiste à retrouver, à partir de la trajectoire reconstruite, des informations dynamiques sur le système, permettant ainsi de calculer localement une loi d'évolution pour des voisinages petits. Les techniques pour extraire cette information locale sont dues à Eckmann et Ruelle [4], et Sano et Sawada [5], et consistent à approcher localement le flot par son linéarisé tangent. Les applications de cette idée sont extrêmement nombreuses : calcul des exposants de Lyapunov, donnant la mesure des taux de divergence/convergence du flot ; problème de prédiction, ou encore réduction du bruit [6]. Reste que peu d'études se sont attachées à quantifier le lien exact entre le véritable Jacobien d'un système dynamique, et celui que l'on calcule par approximation dans l'espace des phases reconstruit. Or des artefacts de calcul, dus principalement à l'approximation linéaire, et au fait que l'on ne connaisse pas a priori la dimension de reconstruction optimale du système, conduisent à des résultats erronés. Ainsi le calcul des exposants de Lyapunov avec la méthode d'approximation du Jacobien local par un fit linéaire, conduit à des exposants fallacieux ("spurious" en anglais) qui sont multiples des vrais. Ce phénomène a d'abord été remarqué sur un exemple dans [4]. Récemment, une preuve analytique de l'apparition

de ces exposants fallacieux, lorsque la dimension de reconstruction choisie est trop grande, a été donnée dans [7]. L'objet de cet article est de montrer que ce phénomène peut être évité en utilisant, lors de l'approximation du flot tangent, des développements d'ordres supérieurs. L'idée d'utiliser des fits d'ordres supérieurs pour le calcul des exposants de Lyapunov est due à Briggs [8] et Brown, Bryant et Abarbanel [9], mais n'est pas d'un usage courant, d'autres méthodes plus simples ayant été proposées pour discriminer les vrais exposants de Lyapunov des faux [10]. Nous montrerons que l'emploi d'un fit quadratique permet d'éviter ces exposants fallacieux multiples des vrais : la solution analytique étant implicite, des résultats numériques corroboreront cette affirmation. Nous nous restreindrons au cas de série temporelles non-bruitées, l'effet d'ajout de bruit sur l'estimation des exposants de Lyapunov avec un fit linéaire ayant été considéré dans [11].

2 Calcul de la matrice Jacobienne

2.1 Notations

On considère un système dynamique autonome agissant sur \mathbb{R}^n , soit : $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. La méthode de reconstruction de l'attracteur consiste à former un vecteur de dimension m à l'aide de m mesures indépendantes du système. On notera un point dans l'espace des phases reconstruit par : $P(\mathbf{x}) = (p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x}))$, où p_1, \dots, p_m sont les fonctions de mesures. Sous certaines conditions de généricité (cf [2]), l'image par P de l'attracteur dans cet espace reconstruit est topologiquement équivalent à l'attracteur du système dynamique original. On notera F le map sur l'espace reconstruit :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ P(\mathbf{x}) &\longmapsto F(P(\mathbf{x})) = P(f(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Le map F est relié à f par : $F = PfP^{-1}$. En supposant de plus que P est injectif (ie $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow P(\mathbf{x}) \neq P(\mathbf{y})$), le map F est alors bien défini et peut être estimé à partir des mesures ordonnées $\{P(\mathbf{x}(t_k))\}$ [7]. Une fois ceci posé, ces techniques de reconstruction sont ensuite utilisées pour retrouver le map F à partir de la représentation de l'orbite reconstruite $\{P(\mathbf{x})\}$: on utilise les données pour calculer la matrice Jacobienne $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ à chaque point $P(\mathbf{x})$. Plus spécifiquement, $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ est calculée comme étant la meilleure approximation linéaire de F en $P(\mathbf{x})$, et sert donc à modéliser localement F . On s'intéressera ici au lien existant entre $\mathbf{M}(x)$ et $Df(x)$, en se restreignant au cas d'un map f monodimensionnel ($n = 1$), reconstruit dans un espace plus grand ($m > 1$).

2.2 Approximation linéaire

On va se limiter pour l'instant à une approximation locale linéaire du flot tangent, tel que cela est fait par la plupart des algorithmes de calcul. On se place en un point de l'espace reconstruit : soit $P(x)$, et on regarde comment les voisins de $P(x)$ évoluent sous l'action du map F . Soit $P(x+h)$ un de ces voisins, on a le développement de Taylor :

$$P(x+h) = P(x) + hP'(x) + \frac{h^2}{2}P''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!}P^{(m)}(x) + O(h^{m+1}) \quad (1)$$

Puisque $FP = Pf$, ce point est mappé par F en $FP(x+h) = Pf(x+h)$, soit :

$$Pf(x+h) = Pf(x) + h(Pf)'(x) + \frac{h^2}{2}(Pf)''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!}(Pf)^{(m)}(x) + O(h^{m+1}) \quad (2)$$

Or le terme $FP(x+h)$ peut lui aussi être développé en série de Taylor :

$$F(\mathbf{y} + \varepsilon) = F(\mathbf{y}) + DF(\mathbf{y})\varepsilon + O(\|\varepsilon\|^2) \quad (3)$$

avec : $\mathbf{y} = P(x)$, et $\varepsilon = hP'(x) + \frac{h^2}{2}P''(x) + \dots + \frac{h^m}{m!}P^{(m)}(x) + O(h^{m+1})$. Si l'on remplace \mathbf{y} et ε par leurs expressions dans le développement (3), on se retrouve avec une précision en $O(h^2)$ pour ce développement. C'est ici qu'intervient l'approximation faite par les algorithmes de calcul, puisqu'en fait on pose que, localement, le flot tangent est *égal* à son linéarisé tangent, s'affranchissant ainsi du terme $O(\|\varepsilon\|^2)$ dans le développement (3). Ce faisant, $DF(P(X))$ n'est autre que $\mathbf{M}(x)$, et l'on retrouve dans le développement de ce terme une précision en $O(h^{m+1})$. Il ne reste plus alors qu'à identifier les deux développements terme à terme :

$$\sum_{i=1}^m \frac{h^i}{i!} (Pf)^{(i)}(x) + O(h^{m+1}) = \mathbf{M}(x) \left[\sum_{i=1}^m \frac{h^i}{i!} P^{(i)}(x) + O(h^{m+1}) \right] \quad (4)$$

De manière à trouver analytiquement les coefficients de la matrice $\mathbf{M}(x)$, *Sauer et al.* définissent les bases suivantes [7]: $\vec{u}_i = P^{(i)}(x)$, $i = 1 \dots m$: "base" canonique du plongement en $P(x)$; $\vec{v}_i = P^{(i)}(f(x))$, $i = 1 \dots m$: "base" correspondante en $Pf(x)$. La relation (4) nous donne alors l'effet de $\mathbf{M}(x)$ sur chacun des vecteurs de la base canonique de départ : $\forall i = 1 \dots m$, $\vec{u}_i = P^{(i)}(x) \xrightarrow{\mathbf{M}(x)} (Pf)^{(i)}(x)$, et $(Pf)^{(i)}(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{v}_i de la base d'arrivée. Pour $m = 2$ par exemple, on obtient :

$$\vec{u}_1 \xrightarrow{\mathbf{M}(x)} (Pf)'(x) = P'(f(x))f'(x) = f'(x)\vec{v}_1, \quad \vec{u}_2 \xrightarrow{\mathbf{M}(x)} (Pf)''(x) = f''(x)\vec{v}_1 + f'(x)^2\vec{v}_2$$

Ainsi dans cette base, la matrice $\mathbf{M}(x)$ est triangulaire supérieure et vaut :

$$\mathbf{M}(x) = \begin{pmatrix} f'(x) & f''(x) \\ 0 & f'(x)^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

La suite de l'algorithme de calcul des exposants de Lyapunov consiste à effectuer ce calcul de $\mathbf{M}(x)$ le long de la trajectoire, puis à prendre le log des valeurs propres du produit de toutes ces matrices. Ainsi le premier terme diagonal conduit à l'exposant de Lyapunov λ du map f , alors que le second terme donne au final un exposant fallacieux de valeur 2λ . Plus on va augmenter la dimension m , et plus il y aura d'exposants fallacieux, aux valeurs 3λ , 4λ , etc...[7].

2.3 Approximation d'ordre supérieur

On a vu que l'approximation linéaire revenait en fait à négliger des termes en $O(h^2)$ dans le développement (3). L'utilisation d'un fit d'ordre supérieur permet de prendre en compte ces termes correctifs, et ce dès l'ordre 2 :

$$F(\mathbf{y} + \varepsilon) = F(\mathbf{y}) + DF(\mathbf{y})\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^t D^{(2)}F(\mathbf{y})\varepsilon + O(\|\varepsilon\|^3) \quad (6)$$

Cette précision supplémentaire s'acquiert cependant au prix d'un accroissement de la dimension du problème, puisqu'il faudra non seulement estimer les coefficients de la matrice Jacobienne, mais aussi ceux du Hessien. Ceci nous oblige alors à pousser le développement de ε à un ordre q que l'on déterminera plus tard. Supprimant le terme en $O(\|\varepsilon\|^3)$ dans

le développement (6), puisque l'on identifie localement le flot tangent à un polynôme matriciel d'ordre 2, l'identification se fait selon :

$$\sum_{i=1}^q \frac{h^i}{i!} (Pf)^{(i)}(x) + O(h^{q+1}) = \mathbf{M}(x) \left[\sum_{i=1}^q \frac{h^i}{i!} P^{(i)}(x) \right] + \frac{1}{2} Q(x) + O(h^{q+1}) \quad (7)$$

Le terme quadratique $Q(x)$ vaut, en notant $\mathbf{N}(x)$ le Hessian approché :

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left[\sum_{p=1}^q \frac{h^p}{p!} P^{(p)}(x) \right]^t \mathbf{N}(x) \left[\sum_{l=1}^q \frac{h^l}{l!} P^{(l)}(x) \right] \\ &= \sum_{i=2}^q \frac{h^i}{i!} \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j P^{(i-j)}(x)^t \mathbf{N}(x) P^{(j)}(x) + O(h^{q+1}) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'identifier terme à terme :

$$i = 1 \quad : \quad \mathbf{M}(x) P'(x) = (Pf)'(x) \quad (8)$$

$$i = 2 \dots q \quad : \quad \mathbf{M}(x) P^{(i)}(x) + \frac{1}{2} \sum_{j < i} C_i^j P^{(i-j)}(x)^t \mathbf{N}(x) P^{(j)}(x) = (Pf)^{(i)}(x) \quad (9)$$

On obtient donc un système linéaire en les inconnues du problème, à savoir les m^2 coefficients de $\mathbf{M}(x)$ et les $\frac{m^2}{2}(m+1)$ coefficients de $\mathbf{N}(x)$. Les relations (8)-(9) étant vectorielles, il nous suffit de prendre $q_m = m + \frac{m}{2}(m+1)$ pour que le problème soit bien posé. Les relations (8)-(9) sont cependant trop complexes pour que l'on puisse aboutir à une solution analytique simple comme dans le cas du fit linéaire. Les résultats numériques montreront que la prise en compte du terme en h^2 dans les développements suffit à faire disparaître les exposants fallacieux multiples de vrais.

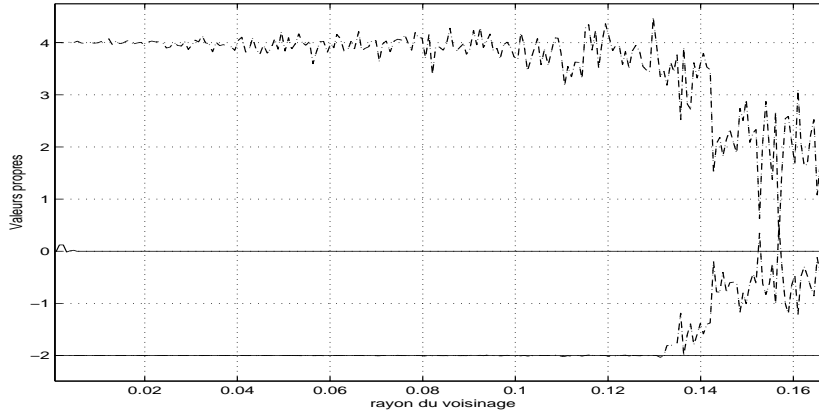


FIG. 1 – Valeurs propres du point fixe de l'équation logistique reconstruite en dimension 2 par la méthode des retards. En pointillés, les valeurs propres données par le fit linéaire convergent vers -2 et $(-2)^2 = 4$. En trait plein, les valeurs propres calculées en prenant un fit quadratique, convergent vers -2 et 0 . La moyenne sur 20 conditions initiales différentes a été effectuée pour tracer la courbe.

3 Résultats numériques

Nous montrons dans cette section les résultats numériques obtenus avec une série temporelle provenant de l'équation logistique et du map de Hénon. Pour l'équation logistique: $f : x \mapsto f(x) = 4x(1 - x)$, l'exposant de Lyapunov associé vaut : $\lambda = \ln(2) = 0.6931$. Nous montrons tout d'abord l'effet du fit quadratique *localement*. Pour ce faire, une série temporelle de 20000 points a été calculée et reconstruite en dimension 2, dans le plan (x_n, x_{n+1}) . Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{M}(x)$ ont été calculées en $(3/4, 3/4)$, $x^* = 3/4$ étant point fixe instable de f , de valeur propre $f'(3/4) = -2$. Avec le fit linéaire, et quand la taille du voisinage tend vers zéro, l'algorithme de calcul standard utilisant une résolution par moindres carrés [4] donne bien les valeurs prédites par la formule (5) : les valeurs propres sont en effet $f'(x^*) = -2$ et $f'(x^*)^2 = 4$ (cf. Figure 1). Lorsque l'on utilise un fit quadratique, on remarque que la valeur propre correspondant à $f'(x^*)^2$ disparaît, ce qui entraînera bien la disparition de l'exposant de Lyapunov fallacieux à la valeur double du vrai. On remarque de plus que les valeurs propres calculées par le fit quadratique sont extrêmement stables. Au final, lorsque l'on itère ces calculs de Jacobiens locaux, on re-

m	Exposants de Lyapunov					
1	0.6931					
2	0.9597	0.6814				
3	1.3825	0.6939	-0.9349			
4	1.3857	0.6865	-0.3785	-0.8626		
5	1.3881	0.7184	0.5432	-0.2432	-0.7251	
6	1.9264	1.3786	0.6866	-0.2273	-0.4297	-0.8257

TAB. 1 – *Exposants de Lyapunov pour l'équation logistique, avec un fit linéaire. Une série temporelle de 40000 points a été utilisée. Les problèmes d'instabilités numériques (matrices mal conditionnées) conduisent à un doublement exact n'arrivant qu'à la dimension 3, et un triplement à la dimension 6.*

m	Exposants de Lyapunov					
1	0.6931					
2	0.6921	-0.6555				
3	0.6904	-0.2358	-0.7679			
4	0.6890	-0.0318	-0.2280	-0.7292		
5	0.6905	-0.0077	-0.1151	-0.3027	-0.7400	
6	0.6911	0.0918	-0.0642	-0.1459	-0.3168	-0.7188

TAB. 2 – *Exposants de Lyapunov pour l'équation logistique, avec un fit quadratique. Le plus grand exposant calculé est toujours $\lambda = \ln(2)$.*

trouve donc les exposants fallacieux double et triple en utilisant un fit linéaire, comme le montre le tableau 1. L'emploi d'un fit quadratique fait disparaître ce phénomène, cf. tableau 2. Le tableau 3 montre que le même phénomène se produit avec un map bidimensionnel. Les exposants de Lyapunov du map de Hénon sont : $\lambda_1 = 0.418$ et $\lambda_2 = -1.621$.

m	Exp. de Lyapunov, fit linéaire					Exp. de Lyapunov, fit quadratique				
2	0.4147	-1.6229				0.4195	-1.6240			
3	0.4158	-0.5902	-1.6358			0.4202	-0.8737	-1.6204		
4	0.7023	0.4074	-1.5882	-1.8675		0.4180	-0.4870	-0.8729	-1.6238	
5	0.8252	0.4139	-0.8769	-1.5788	-1.9744	0.4186	-0.3148	-0.4468	-0.8641	-1.6190

TAB. 3 – *Exposants de Lyapunov calculés à partir d'une série temporelle engendrée par la map de Hénon (la première coordonnée a été retenue). Les résultats avec le fit linéaire montrent que l'exposant fallacieux est présent dès la dimension $m = 4$, alors que l'emploi du fit quadratique conduit à un plus grand exposant toujours égal à $\lambda_1 = 0.418$*

4 Conclusion

L'utilisation d'approximations d'ordres supérieurs pour le calcul de Jacobiens dans l'espace tangent reconstruit fut d'abord introduite pour améliorer la précision des calculs d'exposants de Lyapunov [8, 9]. Nous avons montré qu'elle permet en outre de s'affranchir de la présence d'exposants de Lyapunov fallacieux positifs, à des valeurs multiples des vrais. En effet, ces exposants sont particulièrement gênants en pratique lorsque l'on veut quantifier le degré de désordre d'une série temporelle, indiquant l'existence de directions dilatantes qui en fait n'existent pas. En revanche, les exposants fallacieux négatifs sont moins ennuyeux en analyse puisque bien souvent on recherche surtout la présence d'un exposant de Lyapunov positif, signe de chaos.

Références

- [1] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, in *Lecture Notes in Mathematics*, No 898, Springer-Verlag, 1981.
- [2] T. Sauer, J.A. Yorke et M. Casdagli, *Embedology*, J. of Stat. Physics, **65**(3/4), pp. 579-616, 1991.
- [3] H. Kantz et T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University press, Cambridge, 1997.
- [4] J.-P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle et S. Ciliberto, *Lyapunov exponents from time series*, Phys. Rev. A, **34**(6), pp. 4971-4979, 1986.
- [5] M. Sano et Y. Sawada, *Measurements of the Lyapunov spectrum from chaotic time series*, Phys. Rev. Letters, **55**, p. 1082, 1985.
- [6] E.J. Kostelich et J.A. Yorke, *Noise reduction: finding the simplest dynamical system consistent with the data*, Physica D, **41**, pp. 183-196, 1990.
- [7] T. Sauer, J.A. Tempkin et J.A. Yorke, *Spurious Lyapunov exponents in attractor reconstruction*, Phys. Rev. Letters, **81**(20), pp. 4341-4344, 1998.
- [8] K. Briggs, *An improved method for estimating Lyapunov exponents of chaotic time series*, Physics Letters A, **151**(1,2), pp. 27-32, 1990.
- [9] R. Brown, P. Bryant, H.D.I. Abarbanel, *Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series*, Phys. Rev. A, **43**(6), 2787-2806, 1991.
- [10] U. Parlitz, *Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series*, Int. J. of Bif. and Chaos, **2**(1), pp. 155-165, 1992.
- [11] T. Sauer et J.A. Yorke, *Reconstructing the Jacobian from data with observation noise*, Phys. Rev. Letters, **83**, pp. 1331-1334, 1999.