

Modes normaux non-linéaires de systèmes continus

Cyril Touzé & Olivier Thomas

ENSTA/UME

Unité de recherche en Mécanique

Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau cedex.

touze@ensta.fr

Résumé :

Dans cet article, la notion de modes normaux non-linéaires (MNL) est utilisée pour calculer la dépendance des déformées modales de systèmes continus simples en fonction de l'amplitude de vibration. Les MNL sont introduits à partir de la théorie des formes normales, qui définit un changement de variables non-linéaire permettant d'exprimer la dynamique dans un espace des phases découpé en sous-espaces invariants. Les cas d'une poutre encastrée aux deux extrémités et d'une plaque circulaire à bord libre sont traités à partir des équations de Von Kármán.

Abstract :

Non-linear normal modes (NNMs) are used in order to compute the mode shape dependence on vibration amplitude, for basic continuous systems. NNMs are introduced through normal form theory. It permits to define a non-linear change of co-ordinates which express the dynamics into the phase space spanned by invariant manifolds, instead of the usual linear eigenspaces. The cases of a clamped-clamped uniform beam and of a circular plate with free edge are studied.

Mots-clefs :

mode non-linéaire ; formes normales

1 Introduction

Les vibrations de grande amplitude de structures minces, incluant les effets de non-linéarités géométriques, sont ici considérées. Une des caractéristiques fondamentales des oscillations non-linéaires est la dépendance de la fréquence avec l'amplitude, phénomène apparaissant pour des amplitudes de vibration petites. En effet, un déplacement transverse d'un, voire deux ordres de grandeur inférieurs à l'épaisseur suffit pour observer significativement cet effet (cf. par ex. Nayfeh *et al.* (1979); Touzé *et al.* (2002); Thomas *et al.* (2003)). Lorsque cette amplitude est au moins de l'ordre de grandeur de l'épaisseur, une dépendance de la déformée modale avec l'amplitude devient manifeste. A notre connaissance, les premières mesures expérimentales montrant ce phénomène sont décrites pour une poutre encastrée dans Bennouna *et al.* (1984).

Au niveau théorique, diverses tentatives ont été menées pour rendre compte de ce phénomène, en développant la notion de *modes non-linéaires*. L'idée consiste à exploiter le fait que la dynamique peut être décrite à l'aide d'un seul oscillateur (puisque la connaissance du mouvement d'un seul point de la structure permet d'en déduire le mouvement de tous les autres), étendant par ce biais la définition d'un *mode* au régime non-linéaire.

Au niveau mathématique, la notion de variété invariante bidimensionnelle dans l'espace des phases est l'outil adapté à cette description. On cherche alors à décomposer l'espace des phases en sous-espaces invariants, plutôt que selon les traditionnels modes propres linéaires, qui perdent leur sens dès que le régime est non-linéaire.

Dans une série d'articles, Shaw *et al.* (1993, 1994) utilisent le théorème de réduction à la

variété centrale pour calculer les modes non-linéaires. Dans un cadre conservatif, la théorie des formes normales permet cependant de calculer tous les MNL en une seule opération. Cette approche a été utilisée dans Jezequel *et al.* (1991), et plus récemment dans Touzé (2003). Dans cette contribution, les calculs théoriques généraux sont appliqués à deux systèmes continus simples : une poutre encastree et une plaque circulaire à bord libre. Dans les deux cas, la variation des déformées modales avec l'amplitude sera clairement mise en évidence.

2 Rappels théoriques

Les vibrations non-amorties de grande amplitude de structures minces sont gouvernées par des équations aux dérivées partielles non-linéaires. Typiquement, les exemples traités impliquent des équations du type Von Kármán (cf. par ex. Nayfeh *et al.* (1979); Thomas (2001); Touzé *et al.* (2002)). L'introduction des modes non-linéaires se fait en deux temps. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à Touzé (2003); Touzé *et al.* (2002). Les EDP sont tout d'abord projetées sur la base des modes normaux linéaires, en introduisant :

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} X_p(t) \Phi_p(\mathbf{x}), \quad (1)$$

dans les EDP de départ. w représente le déplacement transverse, et $\{\Phi_p\}$ les modes linéaires. On aboutit ainsi à un système dynamique du second-ordre pour les $\{X_p\}_{p \geq 1}$. Les modes non-linéaires sont introduits par un changement de variables non-linéaire tangent à l'identité :

$$X_p = R_p + \mathcal{P}^{(3)}(R_i, S_j), \quad (2a)$$

$$Y_p = S_p + \mathcal{Q}^{(3)}(R_i, S_j). \quad (2b)$$

$Y_p = \dot{X}_p$ représente la vitesse et est utilisée comme seconde variable indépendante. $\mathcal{P}^{(3)}$ et $\mathcal{Q}^{(3)}$ sont des polynômes du troisième degré en (R_i, S_j) . Ils sont calculés par éliminations successives des termes non-résonnants ; les valeurs de leurs coefficients sont données explicitement dans Touzé (2003). Insérant (2) dans le système d'EDO obtenu après projection, on obtient une approximation au troisième ordre de la dynamique exprimée avec les variables (R_p, S_p) , reliées aux variétés invariantes.

Les nouvelles variables (R_p, S_p) permettent de définir simplement des mouvements modaux non-linéaires en annulant, comme au stade linéaire, toutes les coordonnées autres que celles du mode considéré. Dans le cas où il n'y a pas de résonance interne, ou bien si cette dernière n'implique que des termes résonnants ne brisant pas l'invariance des variétés, on obtient pour décrire la dynamique un seul oscillateur, exprimé en (R_k, S_k) pour le k^{eme} mode. Revenant à la déformée modale par les équations (2) et (1), on trouve ainsi une forme spatiale qui implique plusieurs modes linéaires dont les amplitudes relatives varient au cours du temps.

3 Cas d'une poutre encastree

3.1 Équations du mouvement

L'équation des vibrations libres non-amorties pour un poutre encastree en régime de grande amplitude est donnée, sous forme adimensionnée, par (cf. par ex Bennett *et al.* (1970)) :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\varepsilon}{2} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Le déplacement adimensionné w a été choisi tel que $w = \frac{w^m}{h}$, où h est l'épaisseur de la poutre et w^m le déplacement mesuré, de telle sorte que $w = 1$ dans le modèle implique un déplacement réel de h . Le paramètre ε vaut alors : $\varepsilon = \frac{Ah^2}{I}$, où A et I sont respectivement l'aire le moment quadratique de la section de la poutre. Les conditions aux limites encasté-encasté s'écrivent :

$$w(0, t) = w(1, t) = w_{,x}(0, t) = w_{,x}(1, t) = 0. \quad (4)$$

Les modes propres linéaires ont pour expression :

$$\Phi_k(x) = K \left[\cos \beta_k x - \cosh \beta_k x + \frac{\sin \beta_k + \sinh \beta_k}{\cos \beta_k - \cosh \beta_k} (\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x) \right], \quad (5)$$

où K est choisi de telle sorte que $\int_0^1 \Phi_k(x)^2 dx = 1$. Les pulsations propres sont déterminées en résolvant $\cos \beta_k = \frac{1}{\cosh \beta_k}$, où $\omega_k = \beta_k^2$. La projection s'écrit en insérant le développement $w(x, t) = \sum X_p(t) \Phi_p(x)$ dans (3), ce qui donne, $\forall p \geq 1$:

$$\ddot{X}_p + \omega_p^2 X_p + \varepsilon \sum_{i,j,k=1}^N h_{ijk}^p X_i X_j X_k = 0. \quad (6)$$

3.2 Étude des modes non-linéaires

Le changement de variables (2) permet de décrire la dynamique avec les coordonnées *normales* (R_p, S_p), reliées aux variétés invariantes. En particulier, on montre que les termes "sources" présents dans les équations (6), et produisant un couplage bien identifié dans Bennett *et al.* (1970), sont éliminés par ce changement de variables (Touzé (2003)). Les termes "sources" sont ceux qui brisent l'invariance des sous-espaces propres linéaires, ce qui conduit naturellement à la définition des MNL utilisée dans cet article. Ainsi l'étude du MNL p implique de résoudre la dynamique suivante :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + \varepsilon h_{ppp}^p R_p^3 = 0, \quad (7)$$

ce qui est fait soit numériquement, soit analytiquement à l'aide d'une méthode perturbative. On reporte ensuite dans (2) puis dans (1) pour obtenir le déplacement :

$$w(x, t) = R_p(t) \Phi_p(x) + \sum_{k \neq p} [r_{ppp}^k R_p(t)^3 + u_{ppp}^k R_p(t) S_p(t)^2] \Phi_k(x). \quad (8)$$

Les coefficients r_{ppp}^k et u_{ppp}^k proviennent des polynômes $\mathcal{P}^{(3)}$ et $\mathcal{Q}^{(3)}$, leurs valeurs sont données dans Touzé (2003). On obtient donc bien, équation (8), une déformée modale qui varie au cours du temps.

3.3 Simulations numériques

Des simulations numériques ont été effectuées pour déterminer l'évolution des déformées modales en fonction de l'amplitude. Un nombre $N = 20$ de modes linéaires ont été retenus pour l'analyse. La figure 1 montre les déformées lorsque l'on augmente l'amplitude de vibration, pour les 3 premiers modes. Les figures sont prises au point tournant de chaque orbite, *i.e.* lorsque R_p est maximum et $S_p = 0$. Ces résultats sont tout à fait conformes aux mesures montrées dans Bennouna *et al.* (1984).

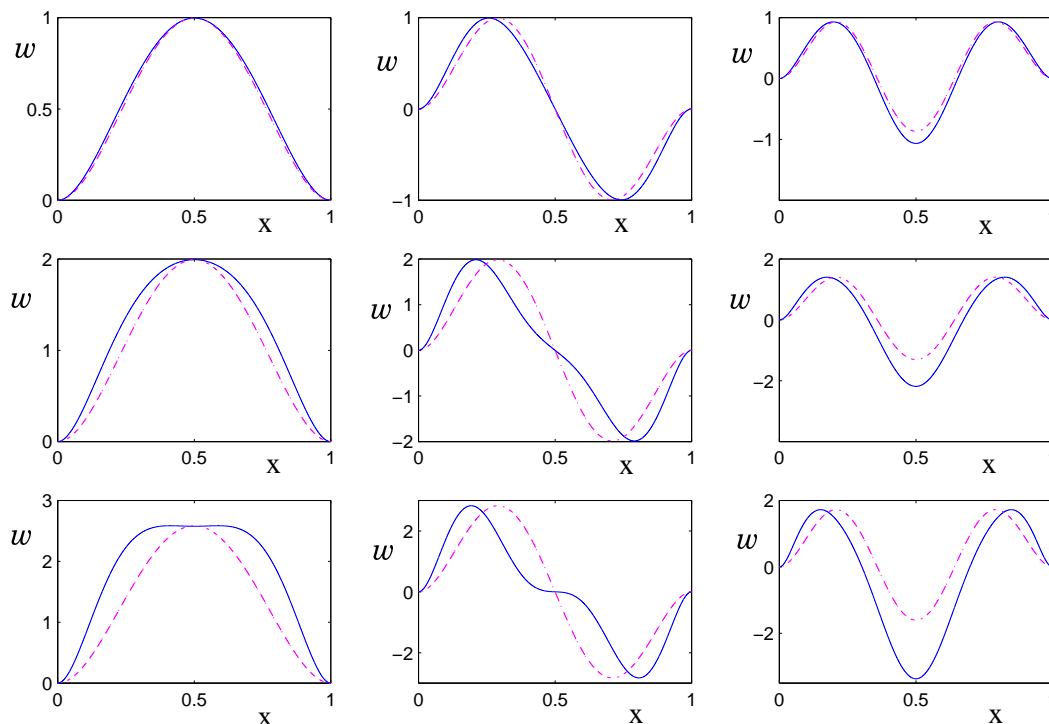


FIG. 1 – Déformées modales non-linéaires pour la poutre encastree, pour les 3 premiers modes de vibration. Trait plein : MNL, pointillé : mode linéaire.

4 Cas d'une plaque circulaire à bord libre

4.1 Équations du mouvement

L'analogie dynamique des équations de Von Kármán est utilisé, avec des conditions aux limites de type bord libre. L'établissement de ces équations sous forme intrinsèque est donnée dans Thomas (2001). Sous forme adimensionnée, elles s'écrivent :

$$\Delta\Delta w + \ddot{w} = \varepsilon L(w, F), \quad (9a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{1}{2}L(w, w), \quad (9b)$$

où $L(w, w)$ est un opérateur spatial quadratique (cf. Thomas (2001); Touzé *et al.* (2002)). L'adimensionnement retenu est, de la même manière que pour les poutres, tel que $w = \frac{w^m}{h}$, avec h l'épaisseur de la plaque et w^m le déplacement mesuré. Ainsi : $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$.

La projection sur les modes linéaires n'est pas détaillée ici. Le lecteur peut se référer à Thomas (2001); Touzé *et al.* (2002) pour plus de précisions. En particulier les valeurs des fréquences propres et des modes linéaires sont donnés. Le système d'EDO obtenu après cette opération a la même forme que (6).

4.2 Modes normaux non-linéaires

Une particularité importante d'une structure bidimensionnelle comme la plaque, par rapport à la poutre, est l'existence de *configurations préférentielles* (cf. Tobias (1957); Thomas (2001); Touzé *et al.* (2002)). En effet, pour chaque mode asymétrique (*i.e.* présentant au moins un rayon

nodal), il existe deux modes linéaires ayant la même fréquence propre, conséquence directe de la dégénérescence de ces valeurs propres. Ceci implique la présence de nombreuses résonances internes 1 :1 dans le système, pour chaque mode asymétrique.

Ces résonances internes conduisent à garder, lors de la réduction de la vibration à un mode asymétrique, deux oscillateurs (cf. Tobias (1957); Touzé *et al.* (2002)). Fort heureusement, la dépendance en \cos et en \sin des déformées modales linéaires fait que les termes brisant l'invariance des variétés ne sont pas présents dans la dynamique (Thomas (2001)). De plus, les zones de couplage, où une vibration unimodale est instable au profit d'une solution couplée, ont été étudiées en détail dans Touzé *et al.* (2002). Ici on supposera, dans les simulations, que l'on est en-dehors de ces zones : la vibration considérée est toujours unimodale, il n'y a pas d'ondes progressives sur la plaque.

Une fois ces hypothèses posées pour traiter les résonances internes, l'étude de l'évolution des déformées modales avec l'amplitude est menée de la même manière que pour le cas des poutres. On retient 31 modes dans l'analyse linéaire (y compris chaque configuration préférentielle). Le coefficient de Poisson du matériau a été pris égal à 0.38, de telle sorte que $\varepsilon = 10.27$.

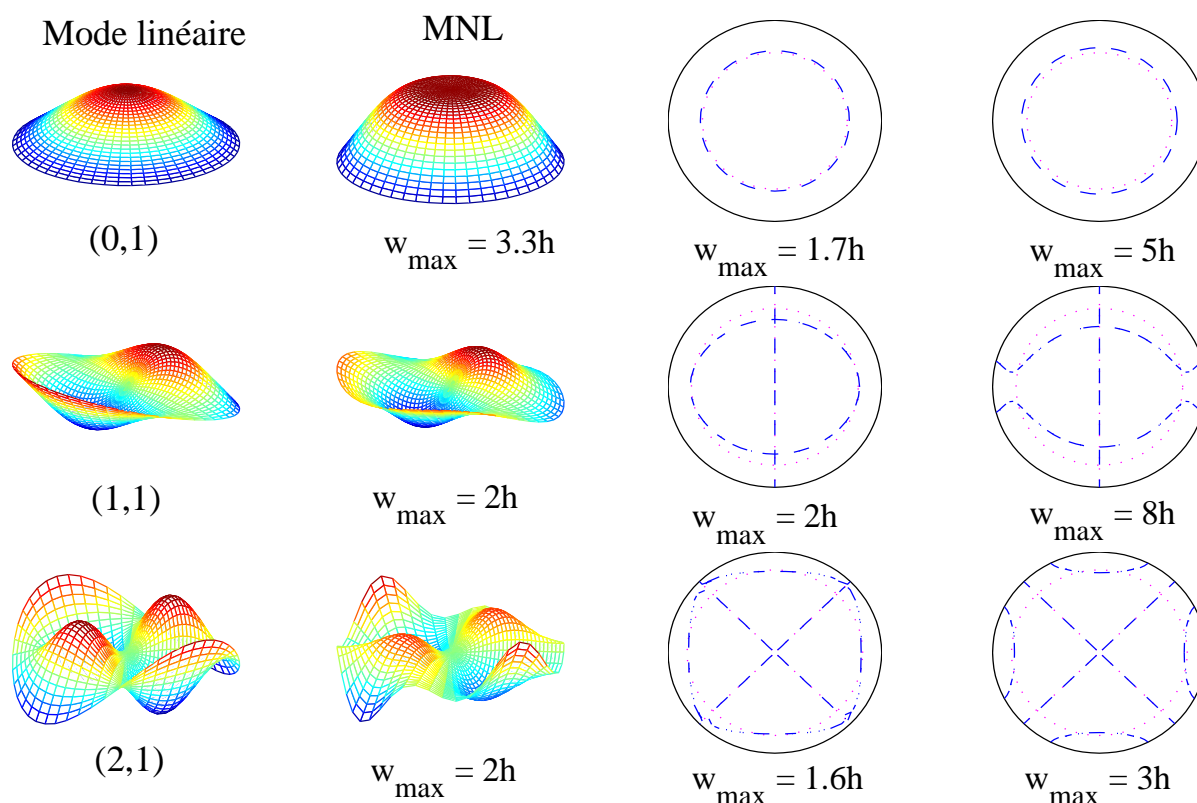


FIG. 2 – Déformées modales non-linéaires pour une plaque circulaire à bord libre.

Les déformées modales obtenues sont montrées Figure 2. Trois modes ont été retenus pour la représentation : les modes (0, 1), (1, 1) et (2, 1) (la terminologie employée est (p, q) , avec p le nombre de lignes nodales et q le nombre de cercles nodaux). La première colonne représente le mode linéaire. La seconde colonne montre le MNL correspondant au point tournant de l'orbite. Les amplitudes de vibration maximale indiquées ont été calculées en tenant compte de l'orbite complète, et ne correspondent d'ailleurs pas à celles obtenues au point tournant. Les deux

colonnes suivantes montrent la position des zéros de vibration *au point tournant*. Il convient ici de préciser que selon la définition utilisée pour les MNL, les “déformées modales non-linéaires”, correspondant à ces mouvements particuliers dans l’espace des phases, sont telles que leur forme varie continûment au cours du mouvement. La notion de ligne et de cercle nodal perd donc de son sens dans la mesure où ceux-ci se déplacent au cours du temps.

Notons que le calcul du changement de variables (2) repose sur un développement asymptotique. Ainsi les variétés invariantes sont-elles approchées par un polynôme d’ordre 3, si bien que, pour de fortes amplitudes, l’approximation d’ordre trois n’est plus valable. Ainsi les déformées modales montrées figure 2 avec un déplacement maximum de 8 fois l’épaisseur doivent être prises avec quelques précautions, d’autant que le modèle de Von Kármán suppose des amplitudes de l’ordre de grandeur de l’épaisseur.

5 Conclusion

Dans cet article, les calculs théoriques utilisant la notion de modes non-linéaires afin de calculer la dépendance des déformées modales avec l’amplitude sont appliqués aux cas simples des poutres encastées et des plaques circulaires à bord libre. Dans le cas des poutres, cela permet de retrouver des mesures expérimentales déjà existantes dans la littérature, ce qui *a fortiori* renforce le cadre proposé pour le calcul des MNL, reposant sur la notion de variétés invariantes. Dans le cas des plaques, les déformées modales non-linéaires ont été prédites. L’avantage principal de considérer les MNL réside dans la réduction de la complexité permettant la description de mouvements simples. En particulier, on peut attendre de ces techniques des améliorations substantielles des codes de calcul de structures en régime non-linéaire, en développant la notion d’analyse modale non-linéaire.

Références

- Bennett, J. A. & Easley, J. G. 1970 A multiple degree of freedom approach to nonlinear beam vibrations. *AIAA Journal* **8**(4), 734–739.
- Bennouna, M. M. & White, R. G. 1984 The effects of large vibration amplitudes on the fundamental mode shape of a clamped-clamped uniform beam. *J. Sound Vib.* **96**(3), 309–331.
- Jezequel, L. & Lamarque, C. H. 1991 Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory. *J. Sound Vib.* **149**(3), 429–459.
- Nayfeh, A. H. & Mook, D. T. 1979 *Nonlinear oscillations*. John Wiley, New-York.
- Shaw, S. W. & Pierre, C. 1993 Normal modes for non-linear vibratory systems. *J. Sound Vib.* **164**(1), 85–142.
- Shaw, S. W. & Pierre, C. 1994 Normal modes of vibration for non-linear continuous systems. *J. Sound Vib.* **169**(3), 319–347.
- Thomas, O., Touzé, C. & Chaigne, A. 2003 Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part II : experiments. à paraître dans *J. Sound Vib.*
- Thomas, O. 2001 Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux élastiques minces. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- Tobias, S. A. 1957 Free undamped nonlinear vibrations of imperfect circular disks. *Proc. Inst. of Mech. Eng.* **171**, 691-700.
- Touzé, C., Thomas, O. & Chaigne, A. 2002 Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory. *J. Sound Vib.* **258**(4), 649–676.
- Touzé, C. 2003 A normal form approach for non-linear normal modes. *Publication du LMA*, numéro 152 (ISSN 0750-7356).
- Touzé, C., Thomas, O. & Chaigne, A. 2002 Hardening/Softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. soumis au *J. Sound Vib.*