
Méthode modale mixte pour le contact unilatéral corde / obstacle : application au chevalet de la tampoira.

GDR DYNOLIN

C. Issanchou^{a,b}, S. Bilbao^c, O. Doaré^b, J.-L. Le Carrou^a, C. Touzé^b,

a. Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LAM / d'Alembert

b. IMSIA, ENSTA ParisTech-CNRS-EDF-CEA, Université Paris Saclay

c. Acoustics and Audio Group University of Edinburgh

11 octobre 2016

Contexte

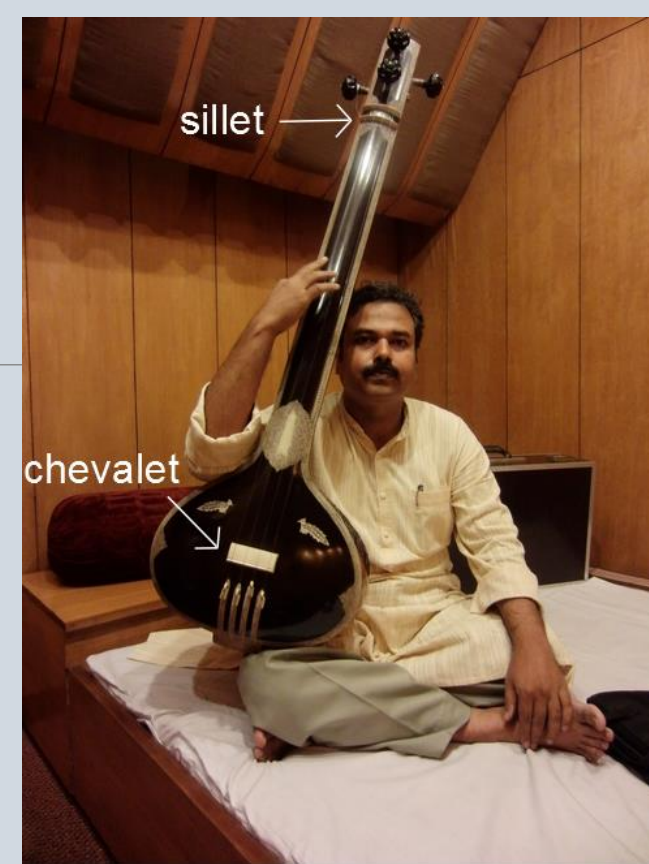
Objectif global de la thèse :

Etude de la dynamique non linéaire de systèmes continus vibrants en présence d'un contact unilatéral

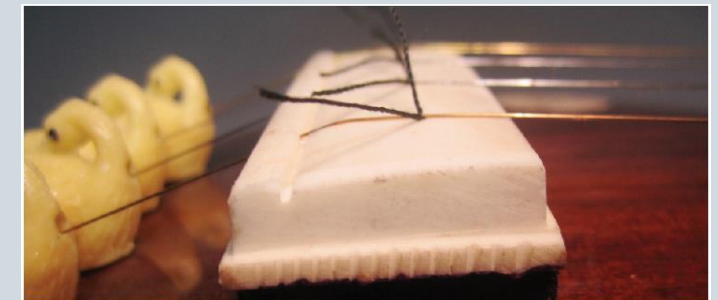
Application visée :

Acoustique musicale : corde vibrante contre un obstacle unilatéral fixe
Instruments de musique ciblés : sitar, contrebasse, basse électrique, tampoura...

Approche numérique et expérimentale



Musicien tenant une tampoura



Chevalet de tampoura

Adapté de : http://www.mim.be/fr/tampoura?from_i_m=1. consulté le 20.04.2015

[Ch2014]

WESLEYAN
UNIVERSITY

Etat de l'art

- Etudes **expérimentales** [Astashev, Doklady Physics, 2001; Taguti, Acoust. Sci. & Tech, 2001; Valette, 1993]

- Simulation **numérique** par guides d'ondes [Rank, ICASSP, 1997; Evangelista, IEEE, 2010; Kartofelev, Stockholm MAC, 2013]
Éventuellement couplés à des DF [Krishnaswamy, IEEE, 2003; Siddiq, Arch. of acoust., 2012]

Description modale pour une corde idéale [Vyasarayani, JASA, 2009], ou pour une corde raide amortie et un obstacle particulier [Valette, 1993]

[Chatziioannou, JSS, 2015; Bilbao, AAA, 2015] corde raide amortie et obstacle quelconque, mais la prise en compte des amortissements est limitée à quelques paramètres

=> **Objectifs :**

Simuler la corde raide amortie en présence d'un obstacle de forme quelconque => approche modale :
Comparaison fine avec des résultats expérimentaux.

Plan de la présentation

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique : schéma mixte
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée
4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

1. Présentation du problème

2. Méthode numérique

3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives

1. Présentation du problème

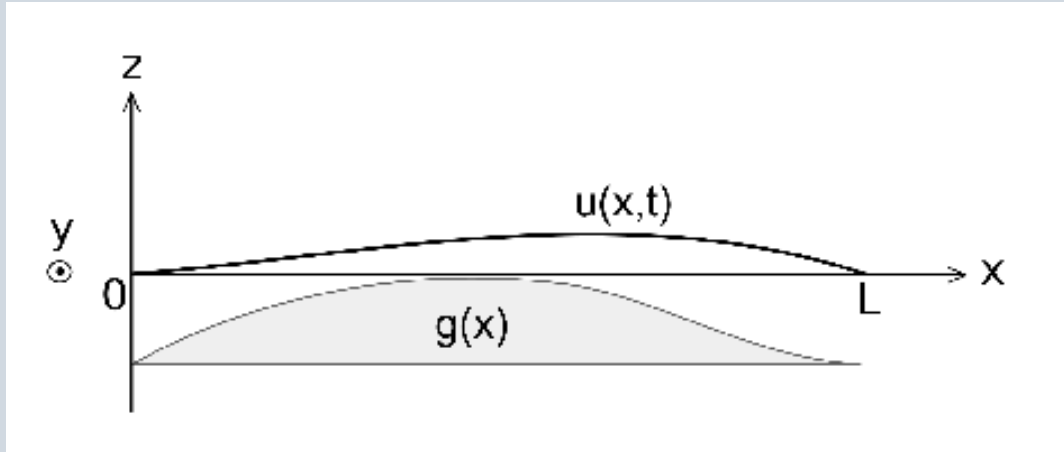


Schéma du problème considéré

Corde raide amortie

L : longueur

μ : masse linéique

T : tension

E : module d'Young

I : moment d'inertie

$u(x,t)$: mouvement de la corde

$g(x)$: obstacle

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

1. Présentation du problème

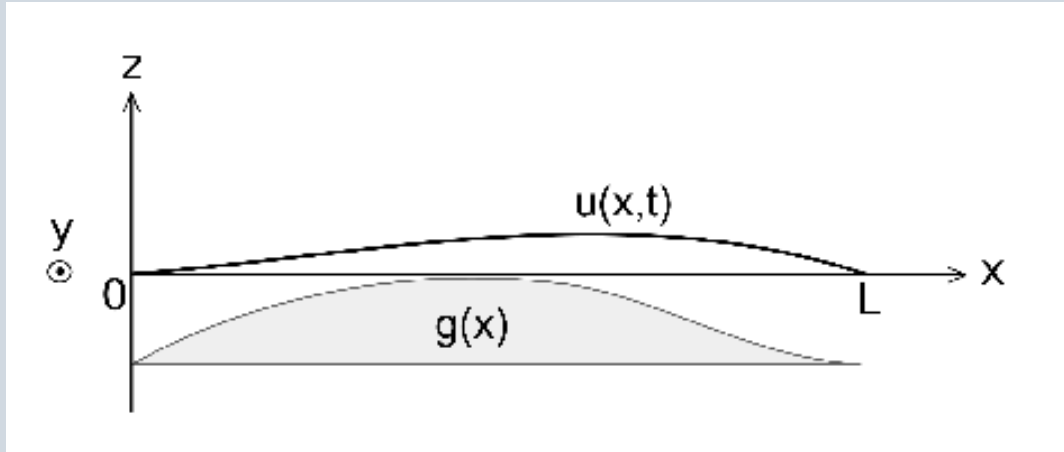


Schéma du problème considéré

$$\mu u_{tt} - Tu_{xx} + EIu_{xxxx} = f$$

Corde raide amortie

L : longueur

μ : masse linéique

T : tension

E : module d'Young

I : moment d'inertie

$u(x,t)$: mouvement de la corde

$g(x)$: obstacle

Force de contact régularisée :

$$f = K[g(x) - u(x,t)]_+^\alpha = -\frac{d\Phi}{du} \text{ avec } \Phi = \frac{K}{\alpha+1} [g(x) - u(x,t)]_+^{\alpha+1}$$

$[x]_+$ désigne la partie positive de x

Conditions aux limites d'appui simple

1. Présentation du problème
- 2. Méthode numérique**
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

2. Méthode numérique

Approche modale : se base sur l'expansion modale du déplacement u :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad \text{avec} \quad \phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

1. Présentation du problème
- 2. Méthode numérique**
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

2. Méthode numérique

Approche modale : se base sur l'expansion modale du déplacement u :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad \text{avec} \quad \phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

Une fois injectée dans l'équation régissant le problème, on obtient le système :

$$\mu u_{tt} - T u_{xx} + EI u_{xxxx} = f$$

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

2. Méthode numérique

Approche modale : se base sur l'expansion modale du déplacement u :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad \text{avec} \quad \phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

Une fois injectée dans l'équation régissant le problème, on obtient le système :

$$\boxed{\mu u_{tt} - T u_{xx} + EI u_{xxxx} = f} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mu(\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i) = F_i}$$

avec ω_i la pulsation du $i^{\text{ème}}$ mode : $\omega_i = 2\pi i f_0 \sqrt{1 + B i^2}$ avec $B = \pi^2 EI / (TL^2)$.

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

2. Méthode numérique

Approche modale : se base sur l'expansion modale du déplacement u :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad \text{avec} \quad \phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

Une fois injectée dans l'équation régissant le problème, on obtient le système :

$$\boxed{\mu u_{tt} - T u_{xx} + EI u_{xxxx} = f} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mu(\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + 2\sigma_i \dot{q}_i) = F_i}$$

avec ω_i la pulsation du $i^{\text{ème}}$ mode : $\omega_i = 2\pi i f_0 \sqrt{1 + B i^2}$ avec $B = \pi^2 EI / (TL^2)$.

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

2. Méthode numérique

Approche modale : se base sur l'expansion modale du déplacement u :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad \text{avec} \quad \phi_i(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$$

Une fois injectée dans l'équation régissant le problème, on obtient le système :

$$\boxed{\mu u_{tt} - T u_{xx} + EI u_{xxxx} = f} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mu(\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + 2\sigma_i \dot{q}_i) = F_i}$$

avec ω_i la pulsation du $i^{\text{ème}}$ mode : $\omega_i = 2\pi i f_0 \sqrt{1 + B i^2}$ avec $B = \pi^2 EI / (TL^2)$.

Sous forme matricielle :

$$\boxed{\mu(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q} + 2\mathbf{\Sigma} \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F}.}$$

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Schéma mixte

Traitement de la partie linéaire :

Utilisation d'un schéma exact pour un oscillateur en vibration libre [Bilbao, NSS, 2009] :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^n + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}) = \mathbf{F}^n,$$

où les matrices sont telles que :

$$\begin{aligned} C_{i,i} &= e^{-\sigma_i \Delta t} \left(e^{\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} \right) \\ \tilde{C}_{i,i} &= e^{-2\sigma_i \Delta t}. \end{aligned}$$

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Schéma mixte

Traitement de la partie linéaire :

Utilisation d'un schéma exact pour un oscillateur en vibration libre [Bilbao, NSS, 2009] :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^n + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}) = \mathbf{F}^n,$$

où les matrices sont telles que :

$$\begin{aligned} C_{i,i} &= e^{-\sigma_i \Delta t} \left(e^{\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} \right) \\ \tilde{C}_{i,i} &= e^{-2\sigma_i \Delta t}. \end{aligned}$$

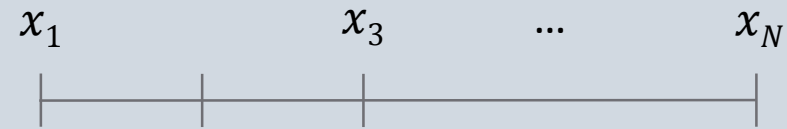
Traitement de la force de contact :

Réécriture du schéma sur u puis utilisation de la discrétisation de [Bilbao, AAA, 2015]

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Schéma mixte



Traitement de la force de contact :

Réécriture du schéma sur le déplacement: $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$:

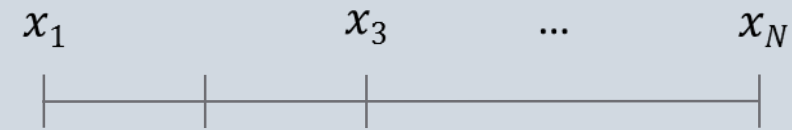
avec : $u_i(t) = u(x_i, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_n(x_i)$.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix},$$

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Schéma mixte



Traitement de la force de contact :

Réécriture du schéma sur le déplacement: $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$:

avec : $u_i(t) = u(x_i, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_n(x_i)$.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix},$$

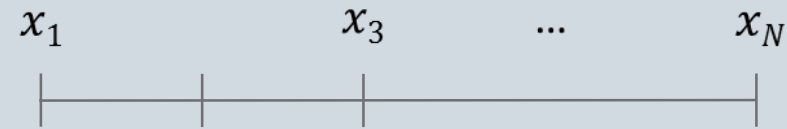
d'où :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}^n + \mathbf{S}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}^{n-1}) = \mathbf{f}^n$$

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Schéma mixte



Traitement de la force de contact :

Réécriture du schéma sur le déplacement: $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$:

avec : $u_i(t) = u(x_i, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_n(x_i)$.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_N(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(x_N) & \dots & \phi_N(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_N \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}^n + \mathbf{S}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}^{n-1}) = \mathbf{f}^n$$

utilisation du schéma suivant pour la force [Bilbao, AAA, 2015] :

$$\mathbf{f}^n = -\frac{\delta_{t-}\psi^{n+\frac{1}{2}}}{\delta_{t-}\mathbf{u}^n}$$

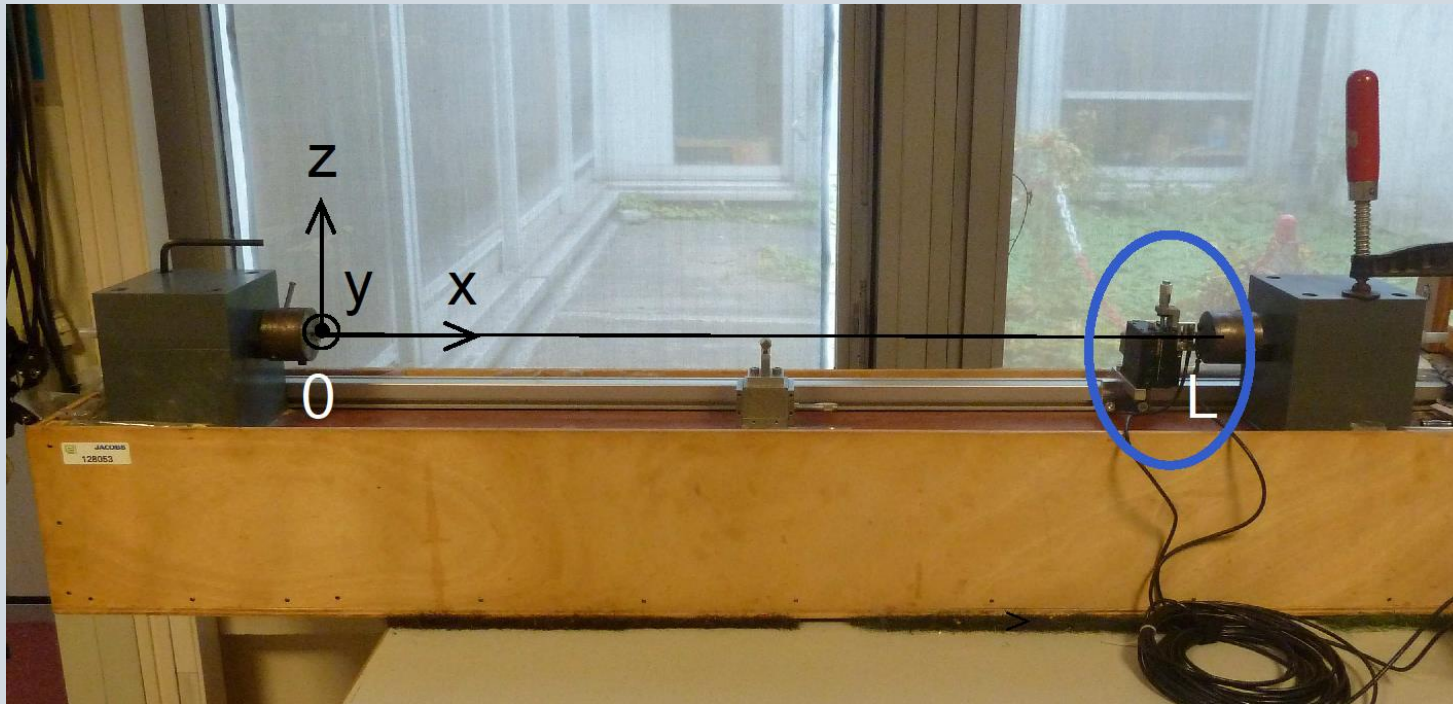
Le schéma est dissipatif (conservatif en l'absence de pertes), et inconditionnellement stable.

Notre apport : combiner un schéma modal sur la partie linéaire à un schéma non modal sur la partie non linéaire.

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée



Banc de corde

Banc de corde [Valette, 1993]

Corde aigüe de guitare électrique

Longueur : $L = 1.002$ m

Diamètre : $D = 0.43$ mm

Masse linéique : $\mu = 1.17$ g/m

Tension : $T = 180.5$ N

Fréquence fondamentale : $f_0 = 196$ Hz

Déplacement initial max : 1.5 mm

Excitation avec un fil de cuivre

Capteur de déplacement selon (Oz) : 10 mm
de l'extrémité droite

1. Présentation du problème

2. Méthode numérique

3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives

Identification des caractéristiques linéaires de la corde

Identification des fréquences propres et amortissements mode par mode,
à l'aide de la méthode ESPRIT [Roy, IEEE, 1986] sur 4 s de signal, 0.2 s après l'excitation.
avec traitement du signal [Le Carrou, AAA,2009]

Modèle théorique pour les fréquences propres et les amortissements (facteur de qualité) [Valette, 1993]

4. Comparaison des résultats

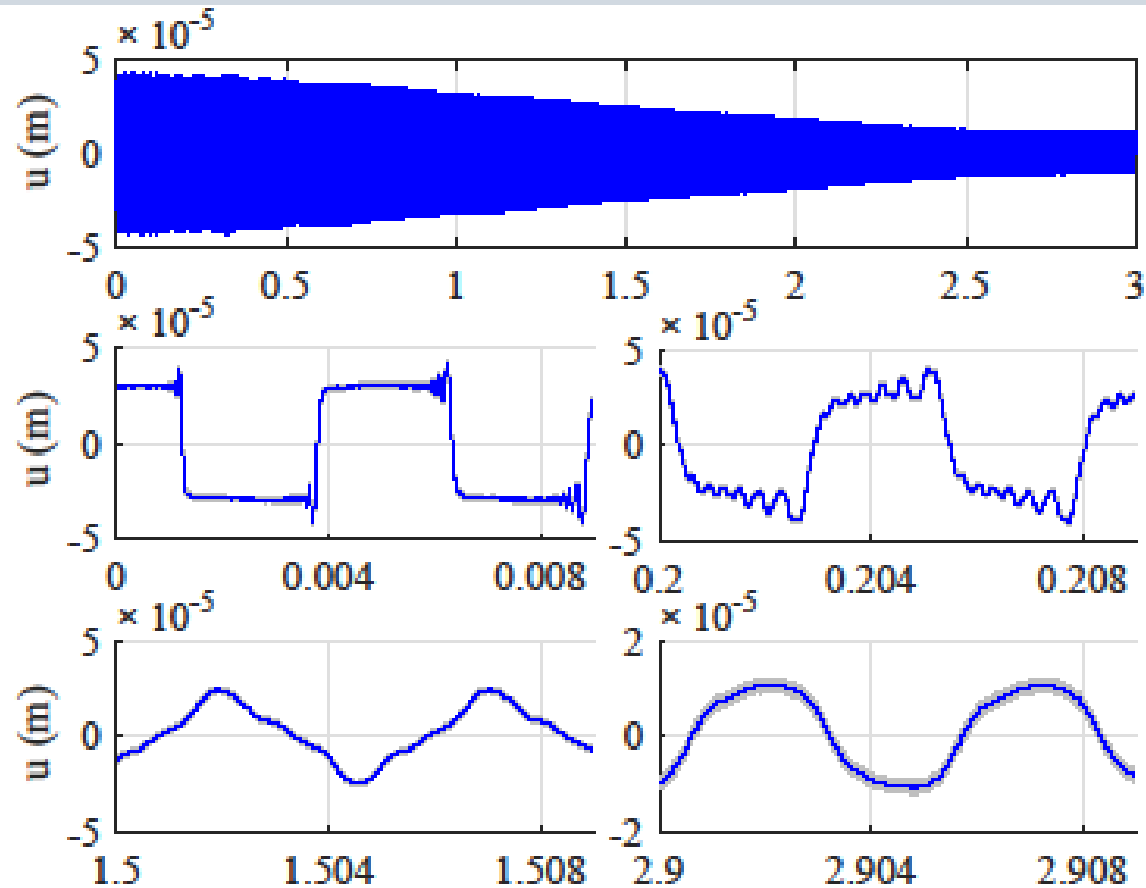
Comparaison des résultats numériques et expérimentaux :

- sans obstacle
- obstacle ponctuel centré
- obstacle ponctuel décentré
(double chevalet double assimilable au cas de la tampoura [Valette, 1993])

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives



Mouvement (Oz) en un point de la corde :
expérimental

Paramètres numériques (schéma mixte) :

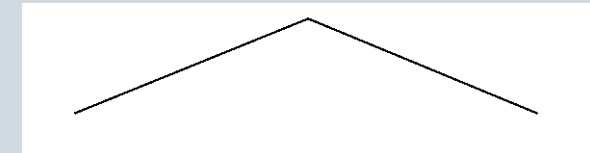
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

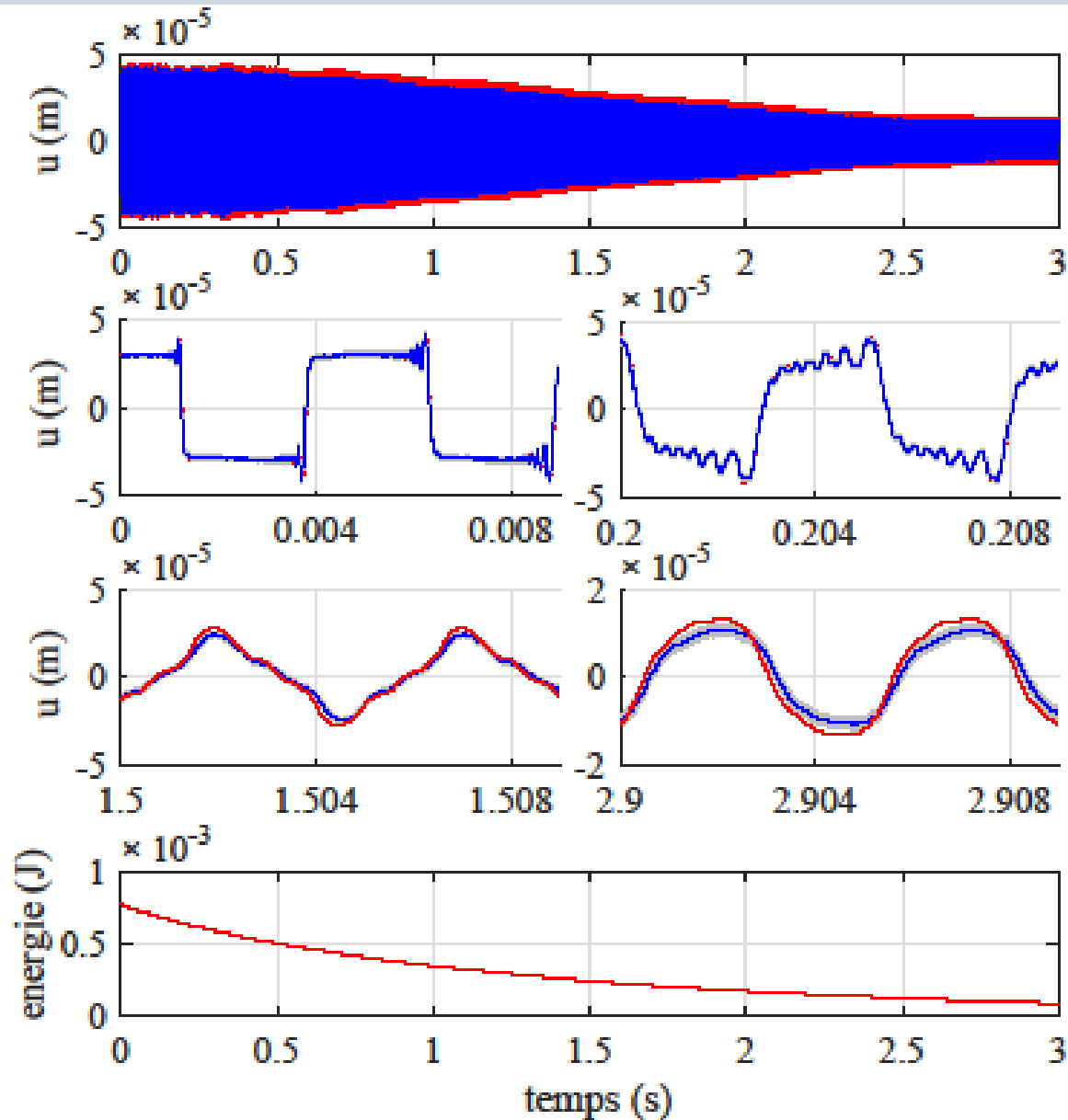
Condition initiale :



1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives



Mouvement (Oz) en un point de la corde :
expérimental vs numérique

Paramètres numériques (schéma mixte) :

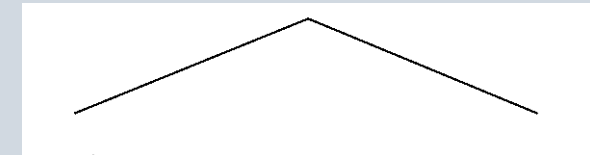
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

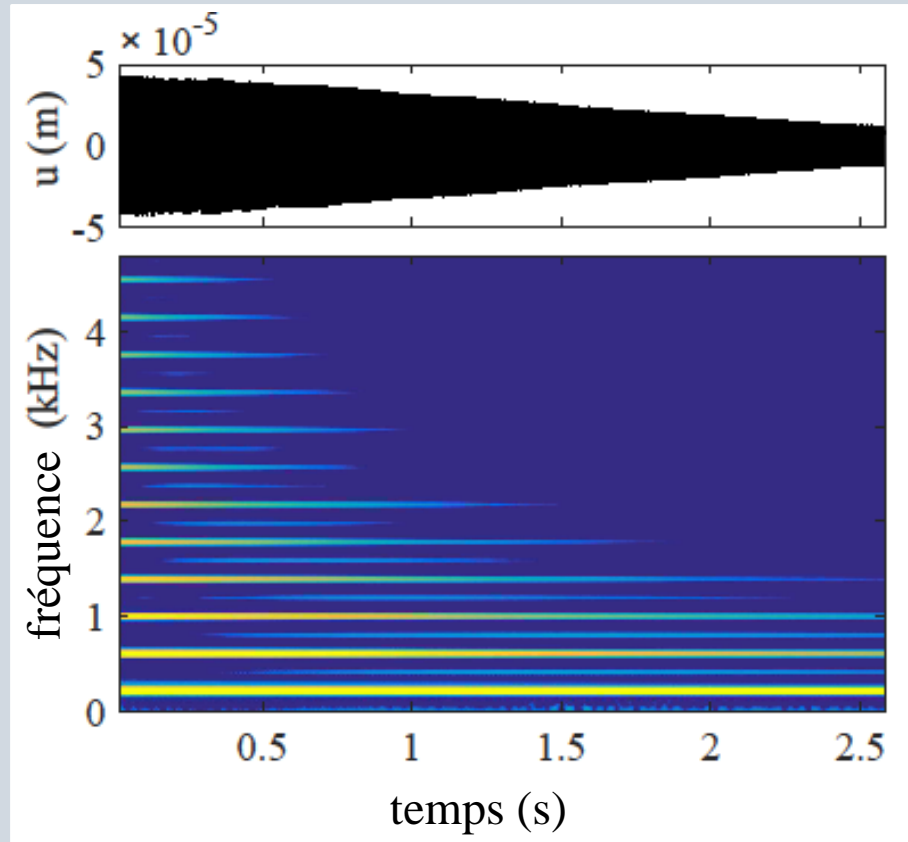
Condition initiale :



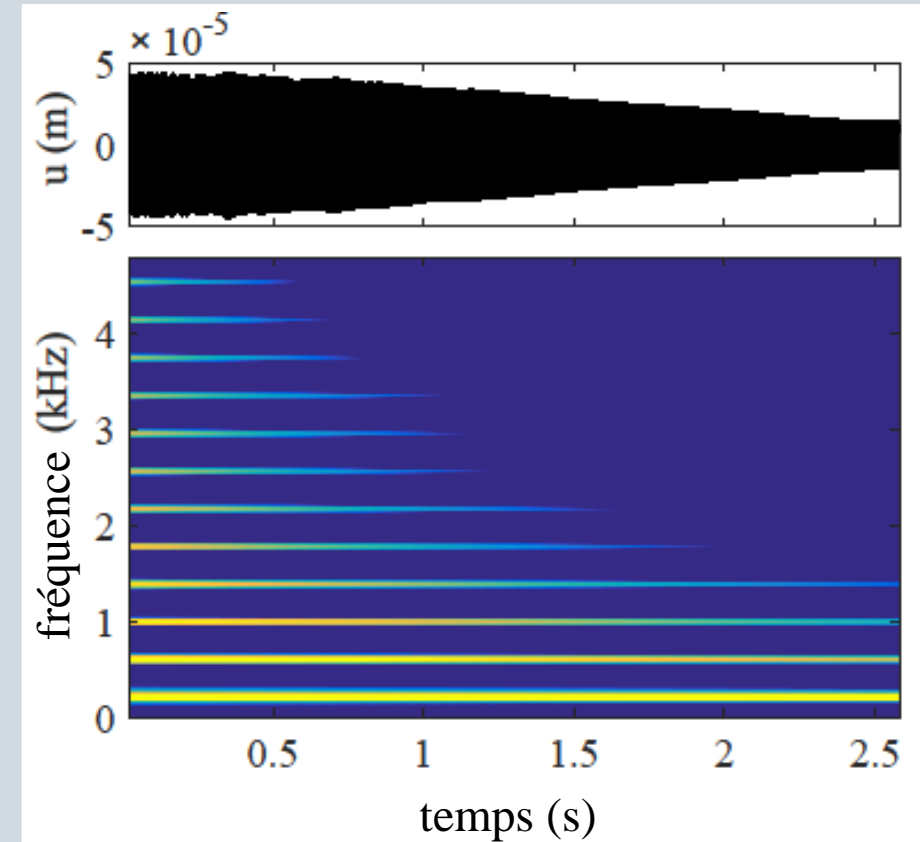
1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Mouvement en un point de la corde : numérique vs expérimental



Expérimental



Numérique

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Cas de l'obstacle ponctuel centré

Expérimental

Numérique

Sans obstacle

Avec obstacle



Paramètres numériques (schéma mixte) :

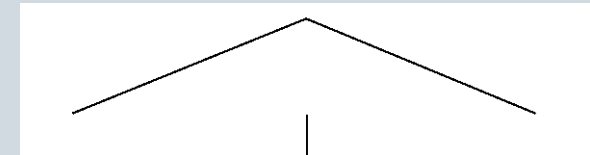
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

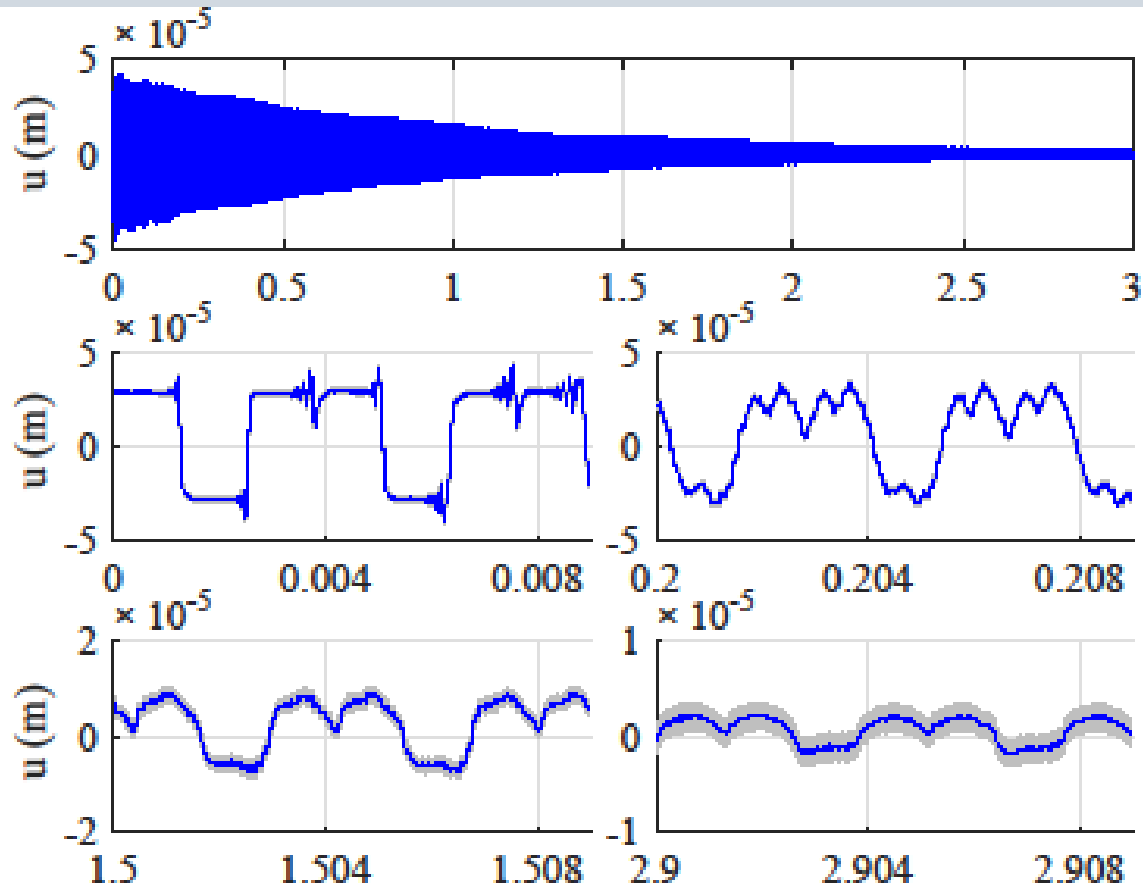
Condition initiale :



1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives



Mouvement (Oz) en un point de la corde :
expérimental

Paramètres numériques (schéma mixte) :

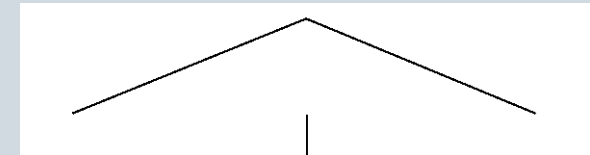
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

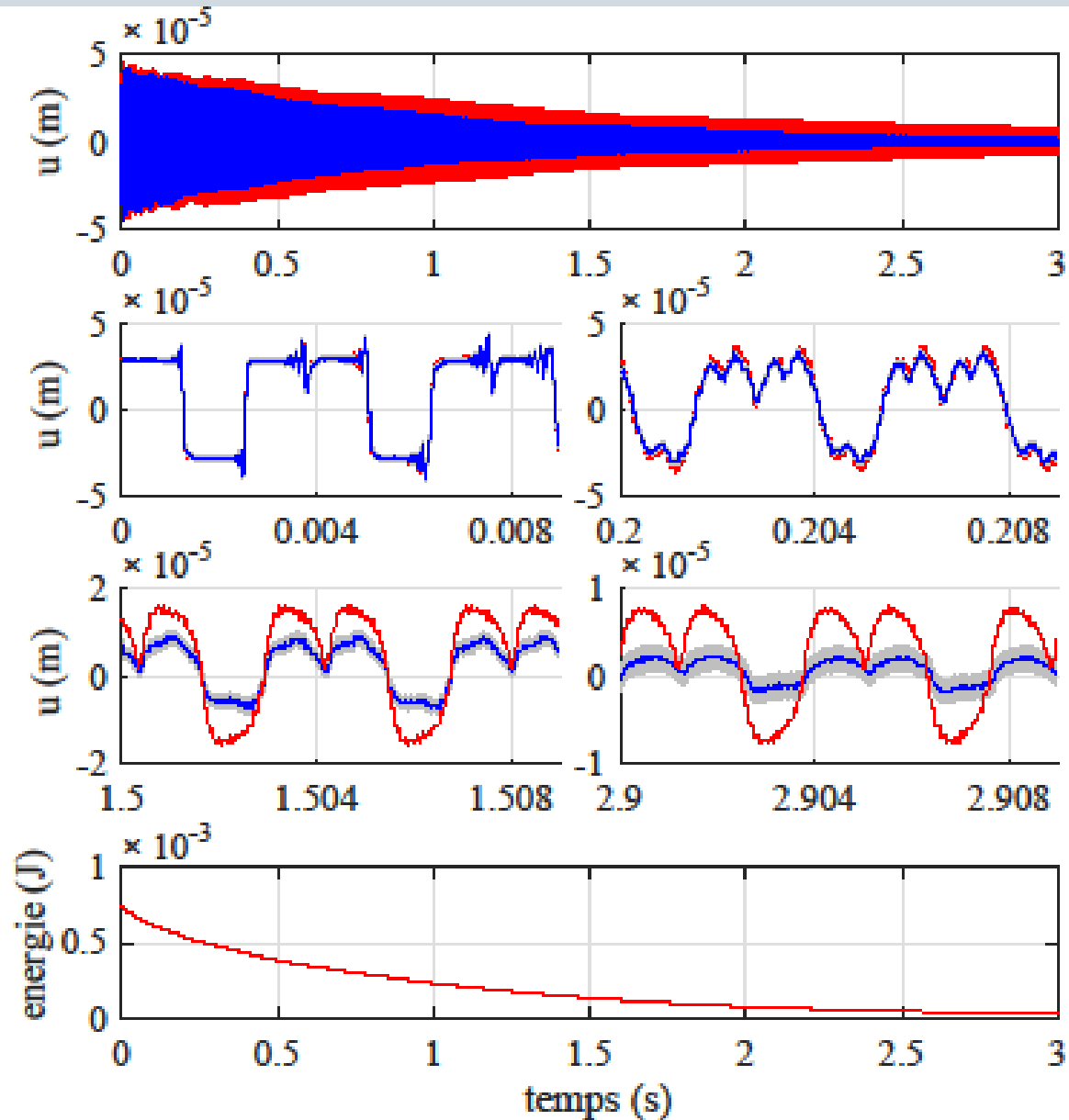
Condition initiale :



1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives



Mouvement (Oz) en un point de la corde :
expérimental vs numérique

Paramètres numériques (schéma mixte) :

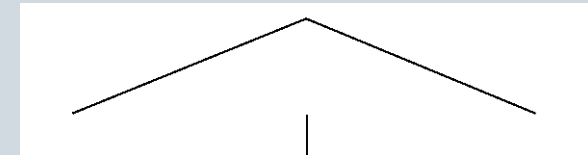
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

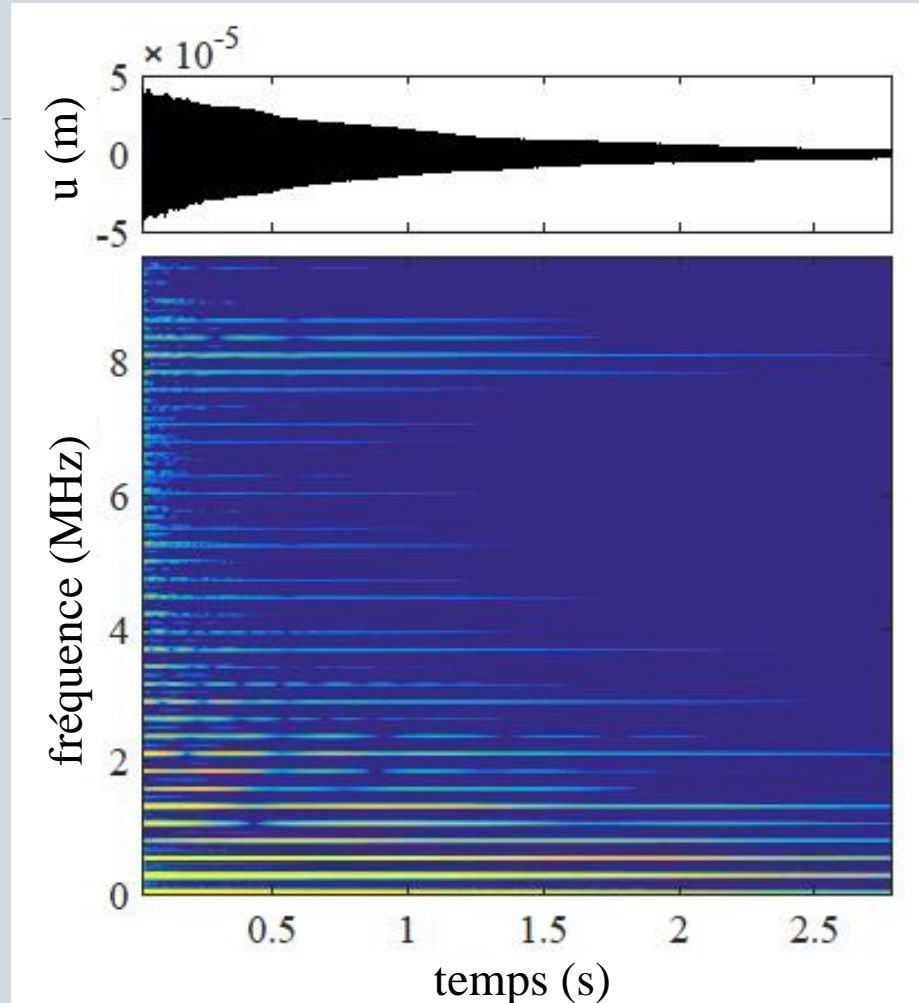
Condition initiale :



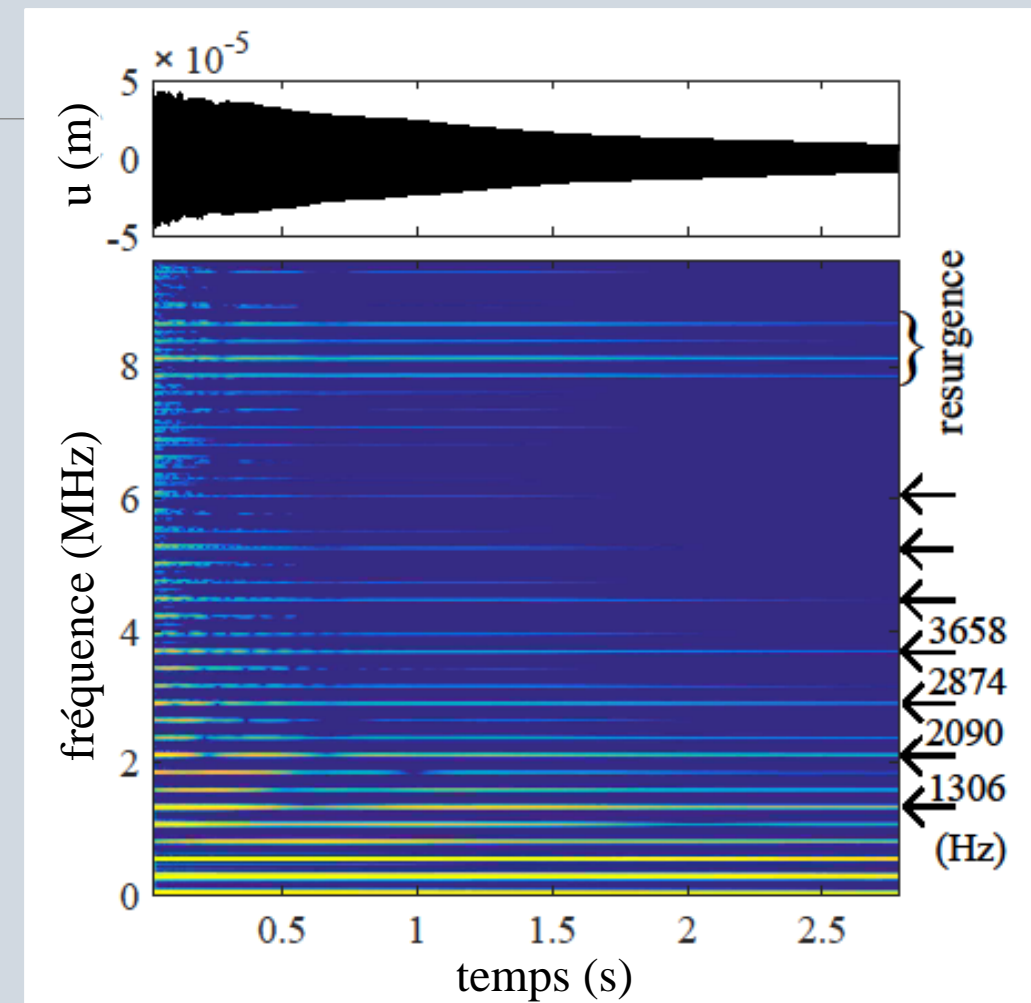
1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Mouvement en un point de la corde : numérique vs expérimental



Expérimental



Numérique

1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Cas de l'obstacle ponctuel décentré

Expérimental



Numérique



Paramètres numériques (schéma mixte) :

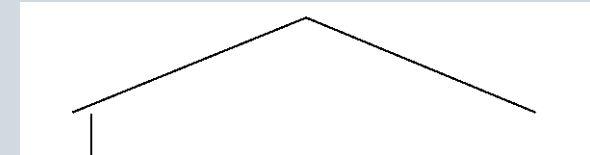
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

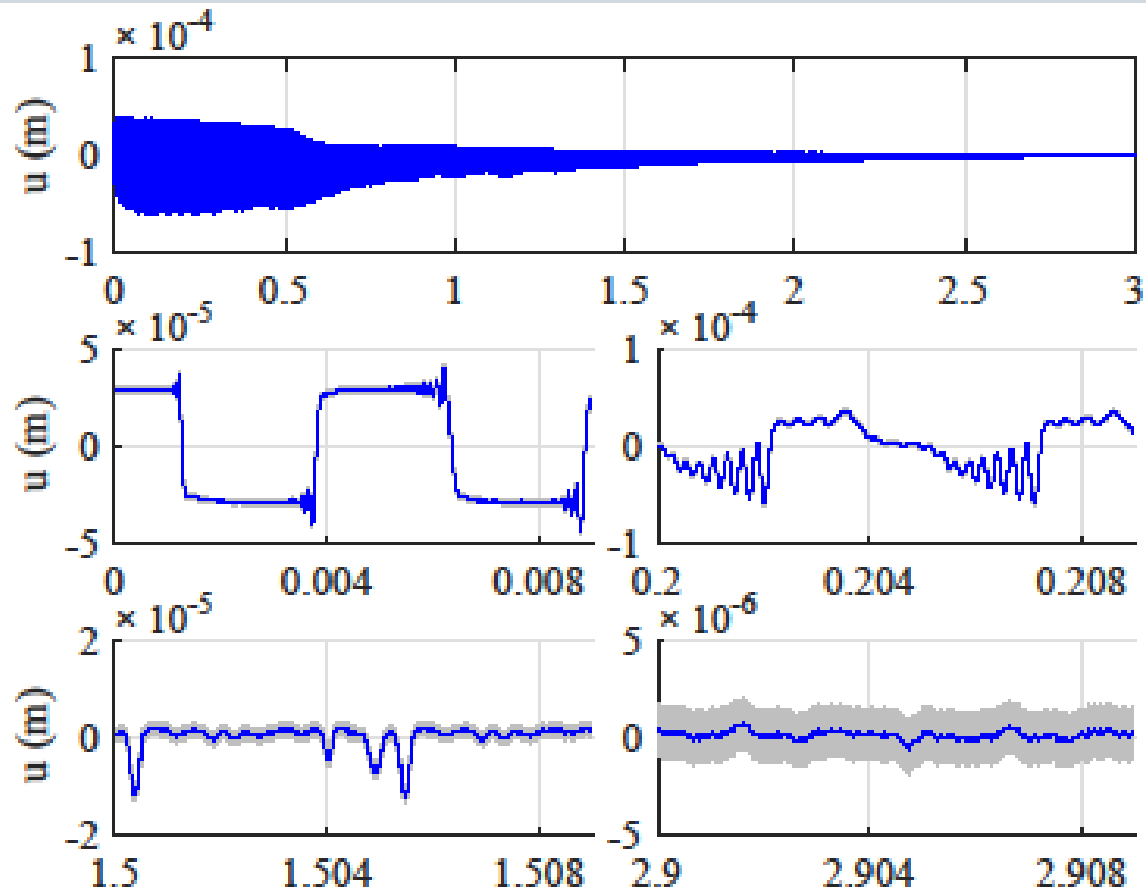
Condition initiale :



1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives



Mouvement (Oz) en un point de la corde :
expérimental

Paramètres numériques (schéma mixte) :

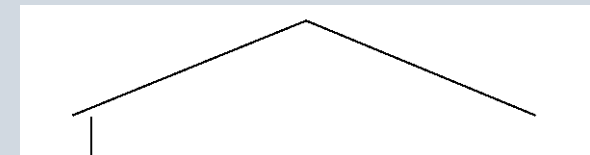
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

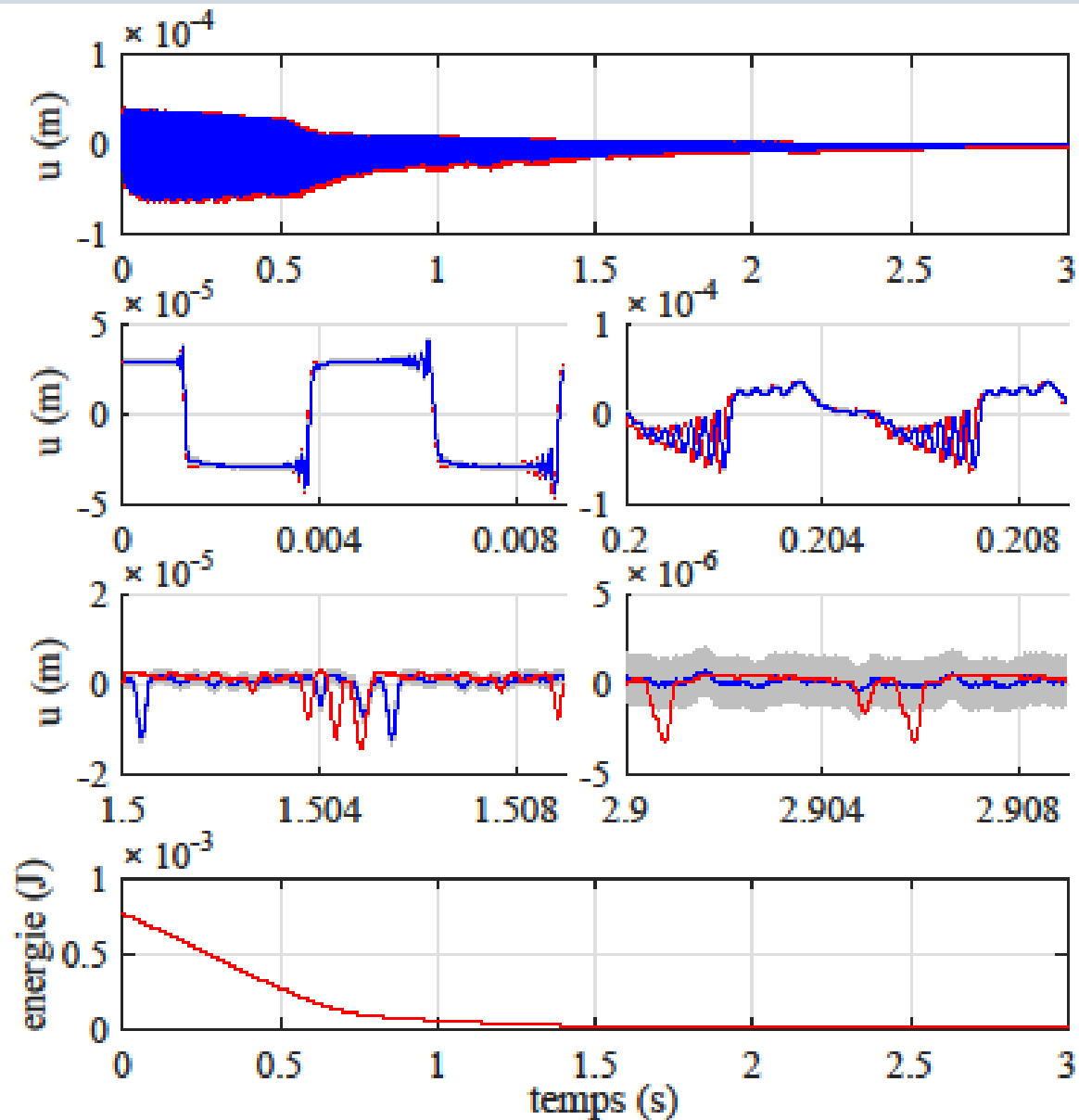
Condition initiale :



1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

5. Conclusion et perspectives



Mouvement (Oz) en un point de la corde :
expérimental vs numérique

Paramètres numériques (schéma mixte) :

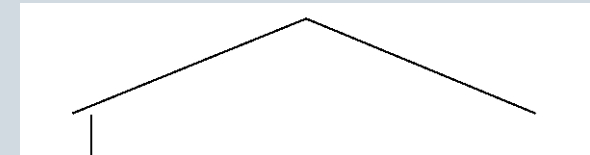
$$\alpha = 1,5$$

$$N-1 = 1001$$

$$K = 10^{13}$$

$$F_e = 2 \text{ MHz}$$

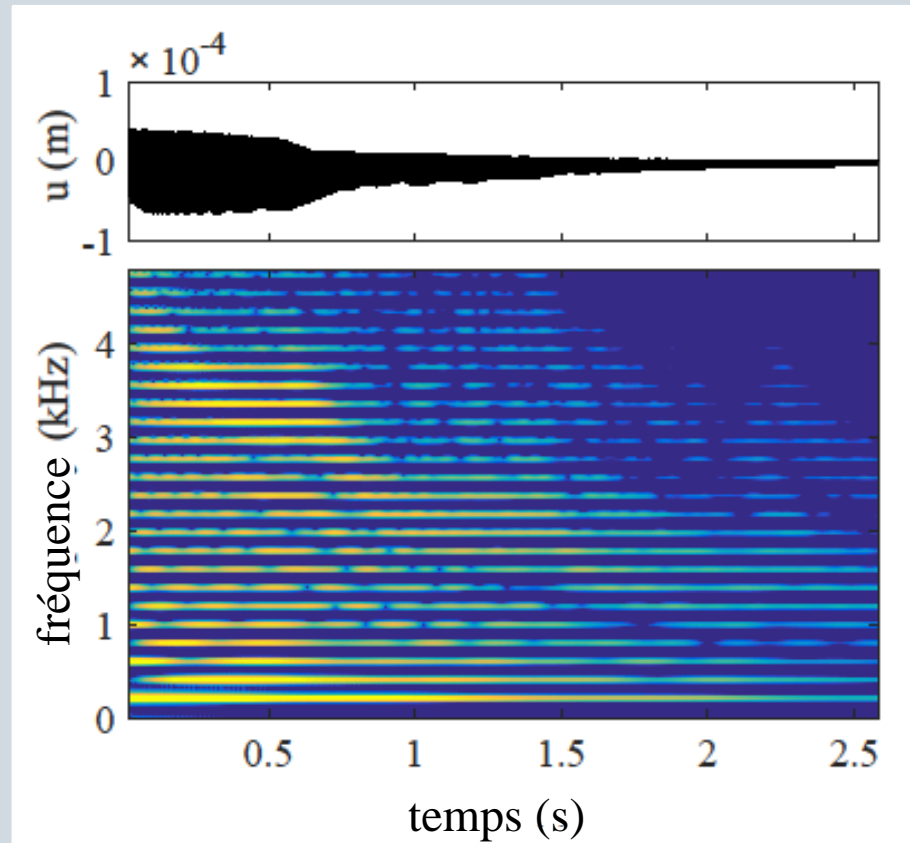
Condition initiale :



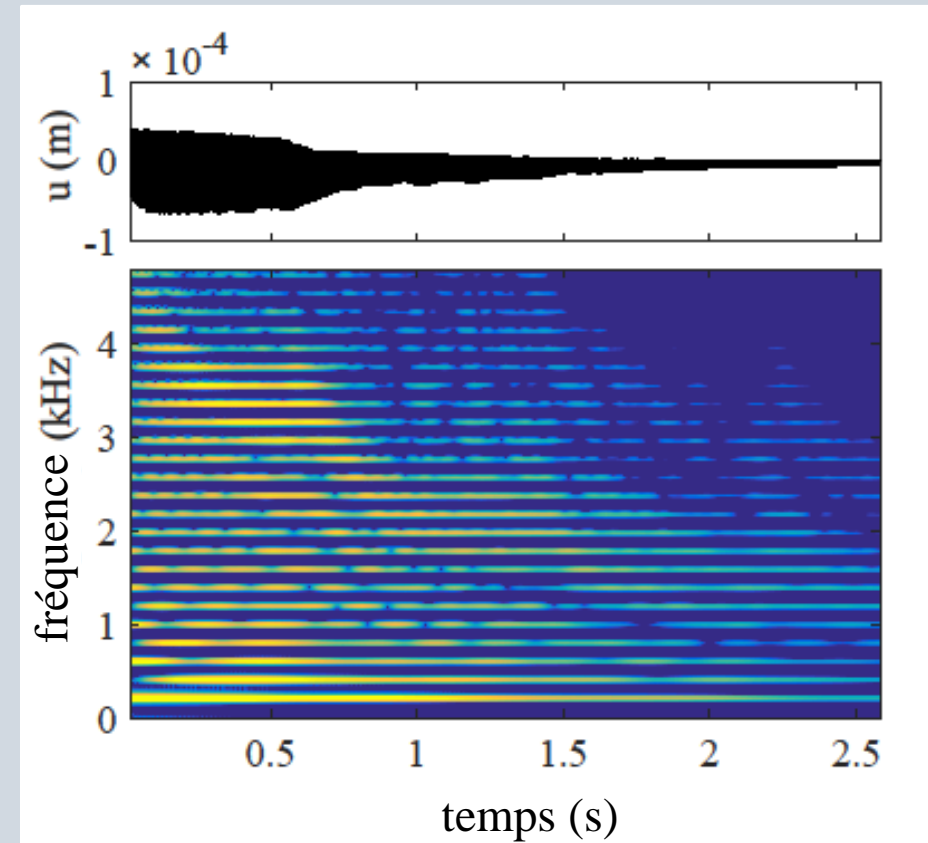
1. Présentation du problème
2. Méthode numérique
3. Dispositif expérimental : étude de la corde isolée

4. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux
5. Conclusion et perspectives

Mouvement en un point de la corde : numérique vs expérimental



Expérimental



Numérique

5. Conclusion et perspectives

Etude numérique et expérimentale du contact corde / obstacle

- Méthode numérique conservative régularisante :
 - approche modale couplée à un traitement de la force non modal
 - possible prise en compte des caractéristiques linéaires mesurées de la corde
 - Protocole expérimental pour l'étude de la corde isolée
- => Comparaison fine des résultats expérimentaux et numériques.

5. Conclusion et perspectives

Perspectives :

Etude paramétrique

Etude de deux polarisations

Mesures sur instruments réels : basse électrique avec et sans frettes

Méthode non régulière

Méthode modale mixte pour le contact unilatéral corde / obstacle : application au chevalet de la tampoira.

GDR DYNOLIN

C. Issanchou^{a,b}, S. Bilbao^c, O. Doaré^b, J.-L. Le Carrou^a, C. Touzé^b,

a. Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LAM / d'Alembert

b. IMSIA, ENSTA ParisTech-CNRS-EDF-CEA, Université Paris Saclay

c. Acoustics and Audio Group University of Edinburgh

11 octobre 2016