Intégrateurs temporels numériques conservatifs pour la dynamique non linéaire.

Application à la synthèse sonore

Cyril Touzé

IMSIA
Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Idustrielles
CNRS - ENSTA ParisTech - EDF - CEA
cyril.touze@ensta-paristech.fr

GDR DyNoLin

Dynamique des Structures et approches de dynamique non linéaire

Lundi 10 octobre 2016

INTÉGRATEURS NUMÉRIQUES POUR LA DYNAMIQUE NON LINÉAIRE

- Dynamique non linéaire
  - comportements numériquement raides (contacts)
  - grand nombre de degrés de liberté (turbulence d'ondes)

  $\rightsquigarrow$ l'emploi de méthode numérique standard conduit souvent à des problèmes (stabilité, convergence)

Intégrateurs numériques pour la dynamique non linéaire

- Dynamique non linéaire
  - comportements numériquement raides (contacts)
  - grand nombre de degrés de liberté (turbulence d'ondes)

  $\rightsquigarrow$ l'emploi de méthode numérique standard conduit souvent à des problèmes (stabilité, convergence)

- Propriétés fondamentales des systèmes
  - conservation de l'énergie
  - symplecticité

- Conserver ses invariants au niveau discret permet d'aboutir à des intégrateurs numériques de meilleure qualité.

Plan de la présentation

Plan de la présentation

Notations

- pas de temps : h, fréquence d'échantillonnage : $f_e = \frac{1}{h}$
- incrément positif et négatif : $e_{t+}(u) = u_{n+1}$, $e_{t-}(u) = u_{n-1}$
- opérateurs de dérivation :

$$\delta_{t+} = \frac{1}{h}(e_{t+} - 1)$$
$$\delta_{t-} = \frac{1}{h}(1 - e_{t-})$$
$$\delta_{t.} = \frac{1}{2h}(e_{t+} - e_{t-})$$
$$\delta_{tt} = \frac{1}{h^2}(e_{t+} - 2 + e_{t-})$$

- opérateurs de moyennage

$$\mu_{t+} = \frac{1}{2}(e_{t+} + 1)$$
$$\mu_{t-} = \frac{1}{2}(1 + e_{t-})$$
$$\mu_{t.} = \frac{1}{2}(e_{t+} + e_{t-})$$

Plan de la présentation

OSCILLATEUR HARMONIQUE

- Équation du mouvement :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

avec conditions initiales $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$.

- solution en temps

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

- Énergie

$$H = T + U = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 u^2$$

- conservation de l'énergie en temps continu

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad H(t) = H_0.$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \qquad (1)$$

- Cas particuliers:

$$\begin{aligned} \theta = 1 \quad &: \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0 \\ \theta = 0 \quad &: \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0 \end{aligned}$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt} u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt} u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.} u$:

$$\delta_{tt} u \delta_{t.} u + \omega_0^2(\theta u + (1-\theta)\mu_{t.} u)\delta_{t.} u = 0$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
  On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u + \omega_0^2(\theta u + (1-\theta)\mu_{t.}u)\delta_{t.}u = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \frac{1}{h^2}\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right)\frac{1}{2h}\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \qquad (1)$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u + \omega_0^2(\theta u + (1-\theta)\mu_{t.}u)\delta_{t.}u = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \frac{1}{2h^3}\left(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 - 2u_n u_{n+1} + 2u_n u_{n-1}\right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 (\theta + (1-\theta)\mu_{t.}) u = 0 \qquad (1)$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt} u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt} u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
  On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.} u$:

$$\delta_{tt} u \delta_{t.} u + \omega_0^2 (\theta u + (1-\theta)\mu_{t.} u) \delta_{t.} u = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt} u \delta_{t.} u = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2h^2} \left[(u_{n+1} - u_n)^2 - (u_n - u_{n-1})^2 \right] \right]$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :
$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$
- Cas particuliers:
$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.}u = 0$$
- Énergie discrète liée à ces schémas ?
On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:
$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u + \omega_0^2(\theta u + (1-\theta)\mu_{t.}u)\delta_{t.}u = 0$$
- Identités remarquables:
$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left[\frac{1}{2h^2}\left(u_n - u_{n-1}\right)^2\right]$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u + \omega_0^2(\theta u + (1-\theta)\mu_{t.}u)\delta_{t.}u = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2\right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 (\theta + (1-\theta)\mu_{t.}) u = 0 \qquad (1)$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt} u + \omega_0^2 u = 0$$

$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt} u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
  On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.} u$:

$$\delta_{tt} u \delta_{t.} u + \omega_0^2 (\theta u + (1-\theta)\mu_{t.} u) \delta_{t.} u = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt} u \delta_{t.} u = \delta_{t+} \left(\frac{1}{2} (\delta_{t-} u)^2 \right)$$

$$u \delta_{t.} u = \delta_{t+} \left(\frac{1}{2} u e_{t-} u \right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$

- Cas particuliers:

$$\begin{aligned} \theta = 1 \quad &: \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0 \\ \theta = 0 \quad &: \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0 \end{aligned}$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u + \omega_0^2(\theta u + (1-\theta)\mu_{t.}u)\delta_{t.}u = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2\right)$$

$$u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}ue_{t-}u\right)$$

$$\mu_{t.}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
  On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{t+}\left(\frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta\frac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta)\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right)\right) = 0$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2\right)$$

$$u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}ue_{t-}u\right)$$

$$\mu_{t.}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \tag{1}$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{t+}h = 0 \quad \text{avec} \quad h = t + u = \frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta\frac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta)\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right)$$

- Identités remarquables:

$$\delta_{tt}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2\right)$$
$$u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}ue_{t-}u\right)$$
$$\mu_{t.}u\delta_{t.}u = \delta_{t+}\left(\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right)$$

UNE FAMILLE DE SCHÉMAS

- Introduisons un θ-schéma pour l'oscillateur harmonique sous la forme :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0 \qquad (1)$$

- Cas particuliers:

$$\theta = 1 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 u = 0$$
$$\theta = 0 \quad : \quad \delta_{tt}u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète liée à ces schémas ?
  On multiplie (1) par la vitesse $\delta_{t.}u$:

$$\delta_{t+}h = 0 \quad \text{avec} \quad h = t + u = \frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta\frac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta)\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right)$$

- **Conclusion**
  - famille de schéma conservatifs, pour tout $\theta \in [0, 1]$
  - énergie discrète associée conservée à chaque pas de temps

CAS PARTICULIER $\theta = 1$

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 u = 0$$

Cas particulier $\theta = 1$

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + h^2\omega_0^2 u_n = 0$$

CAS PARTICULIER $\theta = 1$

$$u_{n+1} = (2 - h^2\omega_0^2)u_n - u_{n-1}$$

Cas particulier $\theta = 1$

$$u_{n+1} = (2 - h^2\omega_0^2)u_n - u_{n-1}$$

- Stabilité : on calcule la transformée en z: $u_n = z^n$, avec $z = e^{sh}$:

$$z^2 + (h^2\omega_0^2 - 2)z + 1 = 0$$

Cas particulier $\theta = 1$

$$u_{n+1} = (2 - h^2\omega_0^2)u_n - u_{n-1}$$

- Stabilité : on calcule la transformée en z: $u_n = z^n$, avec $z = e^{sh}$:

$$z^2 + (h^2\omega_0^2 - 2)z + 1 = 0$$

  - Discriminant : $\Delta = h^2\omega_0^2(h^2\omega_0^2 - 4)$
  - Cas $\Delta < 0$, alors deux racines $z_\pm$ complexes conjuguées telles que $|z_\pm| = 1$.
  - $z_\pm = e^{j\omega_d h}$, où $\omega_d \neq \omega_0$
  - solution discrète : $u_n = A\cos(\omega_d nh) + B\sin(\omega_d nh)$.

Cas particulier $\theta = 1$

$$u_{n+1} = (2 - h^2\omega_0^2)u_n - u_{n-1}$$

- Stabilité : on calcule la transformée en z: $u_n = z^n$, avec $z = e^{sh}$:

$$z^2 + (h^2\omega_0^2 - 2)z + 1 = 0$$

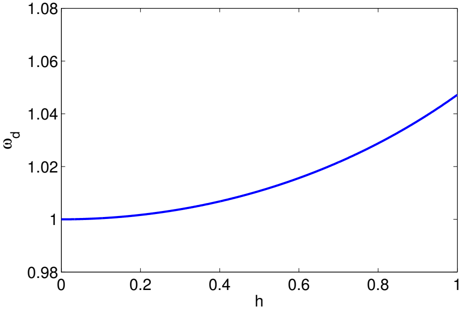
  - Discriminant : $\Delta = h^2\omega_0^2(h^2\omega_0^2 - 4)$
  - Cas $\Delta < 0$, alors deux racines $z_\pm$ complexes conjuguées telles que $|z_\pm| = 1$.
  - $z_\pm = e^{j\omega_d h}$, où $\omega_d \neq \omega_0$
  - solution discrète : $u_n = A\cos(\omega_d nh) + B\sin(\omega_d nh)$.
- Conclusions
  - Schéma stable ssi $\Delta < 0$, soit $h\omega_0 < 2$, ou encore $f_e > \pi f_0$.
  - fréquence numérique ω_d différente de ω_0:

$$\omega_d = \frac{1}{h}\mathrm{Arccos}\left(1 - \frac{h^2\omega_0^2}{2}\right)$$

Cas particulier $\theta = 1$

- Fréquence numérique :

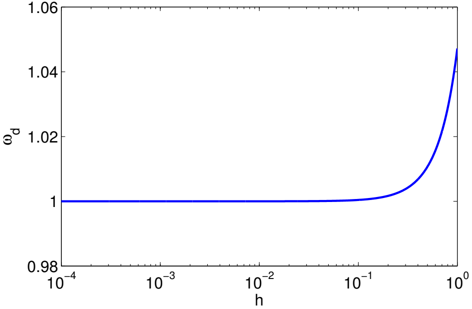
$$\omega_d = \frac{1}{h}\mathrm{Arccos}\left(1 - \frac{h^2\omega_0^2}{2}\right)$$



CAS PARTICULIER $\theta = 1$

- Fréquence numérique :

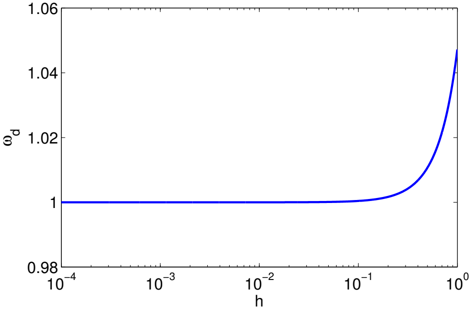
$$\omega_d = \frac{1}{h}\mathrm{Arccos}\left(1 - \frac{h^2\omega_0^2}{2}\right)$$



Cas particulier $\theta = 1$

- Fréquence numérique :

$$\omega_d = \frac{1}{h}\mathrm{Arccos}\left(1 - \frac{h^2\omega_0^2}{2}\right)$$



- Conclusion sur ce schéma:
  - conditionnellement stable : $h\omega_0 < 2$
  - conservatif
  - ordre 2, explicite, à deux pas
  - surestime la fréquence naturelle du problème continu

Cas particulier $\theta = 1$: énergies

- Énergie discrète:

$$h = \frac{1}{2}(\delta_{t-} u)^2 + \omega_0^2 \left(\frac{1}{2} u e_{t-} u \right)$$

CAS PARTICULIER $\theta = 1$: ÉNERGIES

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

CAS PARTICULIER $\theta = 1$: ÉNERGIES

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

- Positivité ?

Cas particulier $\theta = 1$: énergies

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

- Positivité ?

$$h_n = \frac{1}{2h^2}\left(u_n^2 + u_{n-1}^2\right) + \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right) u_n u_{n-1}$$

CAS PARTICULIER $\theta = 1$: ÉNERGIES

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

- Positivité ?

$$h_n = u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right) u_n u_{n-1}$$

Cas particulier $\theta = 1$: énergies

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

- Positivité ?

$$h_n = u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right) u_n u_{n-1}$$

$\rightsquigarrow$ Forme quadratique en $(x, y) = (u_n, u_{n-1})$: $x^2 + y^2 + 2axy$, avec $a = h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right)$.

Cas particulier $\theta = 1$: énergies

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

- Positivité ?

$$h_n = u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right) u_n u_{n-1}$$

$\rightsquigarrow$ Forme quadratique en $(x, y) = (u_n, u_{n-1})$: $x^2 + y^2 + 2axy$, avec $a = h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right)$.

- Résultat : pour $|a| < 1$: équation d'un paraboloide, défini positif.

Cas particulier $\theta = 1$: énergies

- Énergie discrète:

$$h_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} u_n u_{n-1}$$

- Positivité ?

$$h_n = u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right) u_n u_{n-1}$$

$\rightsquigarrow$ Forme quadratique en $(x, y) = (u_n, u_{n-1})$: $x^2 + y^2 + 2axy$, avec $a = h^2\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{1}{h^2}\right)$.

- Résultat : pour $|a| < 1$: équation d'un paraboloide, défini positif.
- Condition de positivité de l'énergie discrète:

$$|a| < 1 \quad \Rightarrow \quad h\omega_0 < 2$$

$\rightsquigarrow$ équivalent à la condition de stabilité trouvée précédemment.

Cas particulier $\theta = 0$

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 \mu_{t.} u = 0$$

CAS PARTICULIER $\theta = 0$

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + h^2 \frac{\omega_0^2}{2} \left(u_{n+1} + u_{n-1}\right) = 0$$

Cas particulier $\theta = 0$

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + \frac{h^2\omega_0^2}{2}} u_n - u_{n-1}$$

Cas particulier $\theta = 0$

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + \frac{h^2\omega_0^2}{2}} u_n - u_{n-1}$$

- Stabilité. Polynôme caractéristique:

$$z^2 - \frac{2}{1 + \frac{h^2\omega_0^2}{2}} z + 1 = 0$$

  - Discriminant : $\Delta = 4\left(\frac{1}{(1+h^2\omega_0^2/2)^2} - 1\right)$
  - $\forall\ h, \quad \Delta < 0$: schéma inconditionnellement stable.

Cas particulier $\theta = 0$

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + \frac{h^2\omega_0^2}{2}} u_n - u_{n-1}$$

- Stabilité. Polynôme caractéristique:

$$z^2 - \frac{2}{1 + \frac{h^2\omega_0^2}{2}} z + 1 = 0$$

  - Discriminant : $\Delta = 4\left(\frac{1}{(1+h^2\omega_0^2/2)^2} - 1\right)$
  - $\forall\ h, \quad \Delta < 0$: schéma inconditionnellement stable.
- Analyse énergétique:

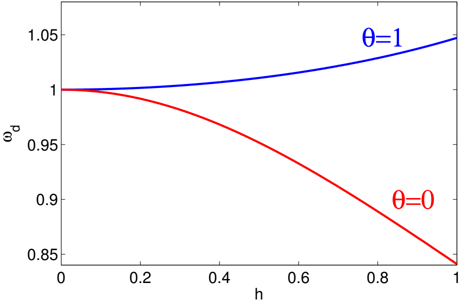
$$h = \frac{1}{2}(\delta_{t-} u)^2 + \omega_0^2 \left(\frac{1}{2}\mu_{t-} u^2\right)$$

$\rightsquigarrow$ énergie toujours positive!

Cas particulier $\theta = 0$

- Fréquence numérique dans le cas $\theta = 0$:

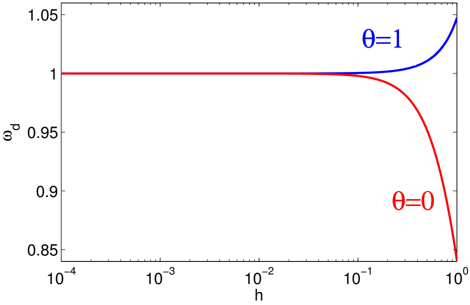
$$\omega_d = \frac{1}{h}\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{1 + h^2\omega_0^2/2}\right)$$



CAS PARTICULIER $\theta = 0$

- Fréquence numérique dans le cas $\theta = 0$:

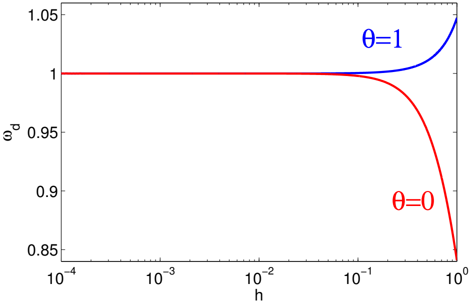
$$\omega_d = \frac{1}{h} \text{Arccos} \left(\frac{1}{1 + h^2 \omega_0^2 / 2} \right)$$



CAS PARTICULIER $\theta = 0$

- Fréquence numérique dans le cas $\theta = 0$:

$$\omega_d = \frac{1}{h}\text{Arccos}\left(\frac{1}{1+h^2\omega_0^2/2}\right)$$



- Conclusion sur ce schéma ($\theta = 0$):
  - inconditionnellement stable
  - conservatif
  - ordre 2, explicite, à deux pas
  - sous-estime la fréquence naturelle du problème continu

Famille de schéma

- Pour la famille de schéma: $\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0$
- Condition de stabilité :

$$\text{si} \quad \theta \geq \frac{1}{2} \quad : \quad h\omega_0 < \frac{2}{\sqrt{2\theta - 1}}$$

$$\text{si} \quad \theta < \frac{1}{2} \quad : \quad \text{inconditionnellement stable}$$

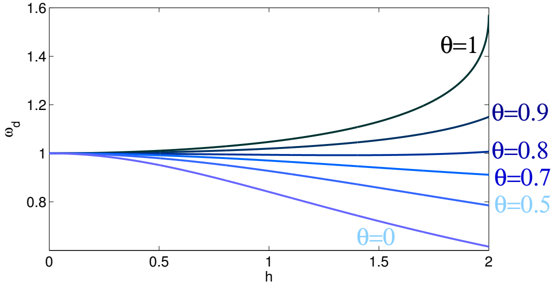
FAMILLE DE SCHÉMA

- Pour la famille de schéma: $\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0$
- Condition de stabilité :

$$\text{si} \quad \theta \geq \frac{1}{2} \quad : \quad h\omega_0 < \frac{2}{\sqrt{2\theta - 1}}$$

$$\text{si} \quad \theta < \frac{1}{2} \quad : \quad \text{inconditionnellement stable}$$

- Fréquence numérique : $\omega_d = \frac{1}{h}\text{Arccos}\left(\frac{1-\theta h^2\omega_0^2/2}{1+(1-\theta)h^2\omega_0^2/2}\right)$



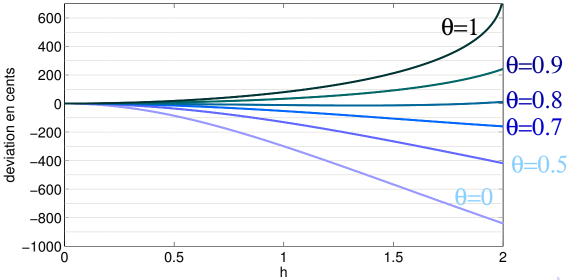
Famille de schéma

- Pour la famille de schéma: $\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = 0$
- Condition de stabilité :

$$\text{si} \quad \theta \geq \frac{1}{2} \quad : \quad h\omega_0 < \frac{2}{\sqrt{2\theta - 1}}$$

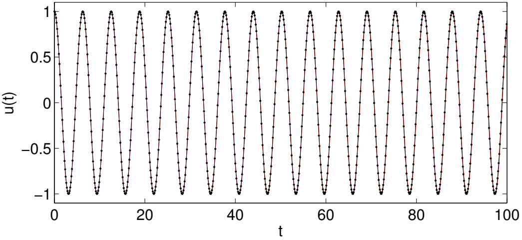
$$\text{si} \quad \theta < \frac{1}{2} \quad : \quad \text{inconditionnellement stable}$$

- Fréquence numérique : $\omega_d = \frac{1}{h}\mathrm{Arccos}\left(\frac{1-\theta h^2\omega_0^2/2}{1+(1-\theta)h^2\omega_0^2/2}\right)$
- Déviation en cents : $1200\log_2\left(\frac{\omega_d}{\omega_0}\right)$.
  100 cents : intervalle musical d'un demi-ton

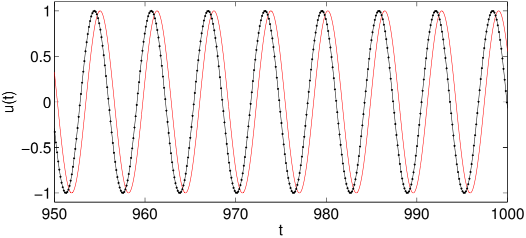


ILLUSTRATIONS, θ=1

- cas θ=1, ω_0=1, u_0=1 et v_0=0; h =0.125 (50 points/période).
  Aux temps courts (solution analytique en rouge, numérique en noir)



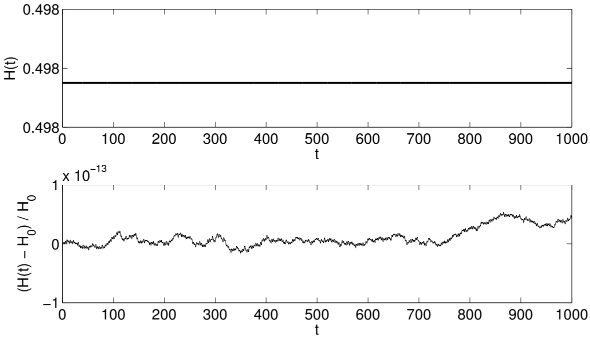
Aux temps longs (après 150 périodes) :



ILLUSTRATIONS, θ=1

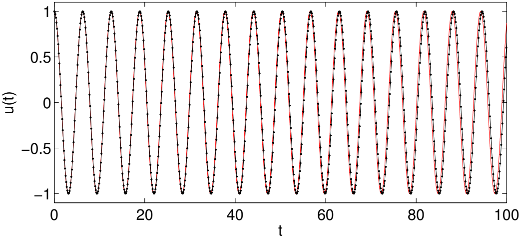
- cas θ=1, ω_0=1, u_0=1 et v_0=0; h =0.125 (50 points/période).

  Conservation de l'énergie:
  représentation de $H(t)$ et $(H(t) - H_0)/H_0$

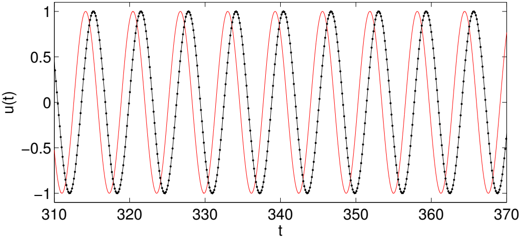


ILLUSTRATIONS, θ=0

- cas θ=0, ω_0=1, u_0=1 et v_0=0; h =0.125 (50 points/période).
  Aux temps courts (solution analytique en rouge, numérique en noir)



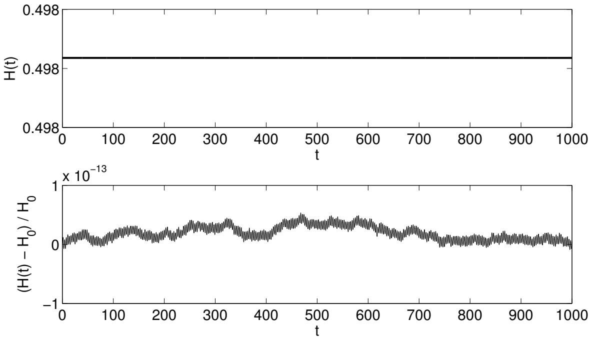
Aux temps longs (après 50 périodes) :



Illustrations, θ=0

- cas θ=0, ω_0=1, u_0=1 et v_0=0; h =0.125 (50 points/période).

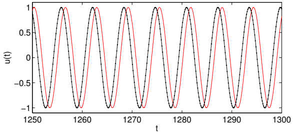
  Conservation de l'énergie:
  représentation de $H(t)$ et $(H(t) - H_0)/H_0$



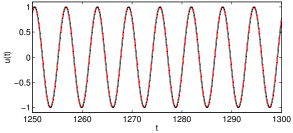
Illustrations, temps longs

- ω_0=1, u_0=1 et v_0=0; h =0.125 (50 points/période).
  Comparaisons de l'erreur sur l'estimation de la fréquence après 200 périodes.

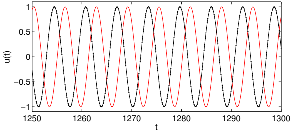
θ=1



θ=0.8



θ=0



Un schéma exact

- Soit le schéma suivant:

$$u_{n+1} - 2\cos(\omega_0 h) u_n + u_{n-1} = 0$$

Ce schéma est **exact**.

Un schéma exact

- Soit le schéma suivant:

$$u_{n+1} - 2\cos(\omega_0 h)u_n + u_{n-1} = 0$$

Ce schéma est **exact**.

- Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = 4\cos^2(\omega_0 h) - 4 = -4\sin^2(\omega_0 h)$.
- racines : $z_\pm = \cos(\omega_0 h) \pm j\sin(\omega_0 h) = e^{j\omega_0 h}$ $\rightsquigarrow \boxed{\omega_d = \omega_0}$.

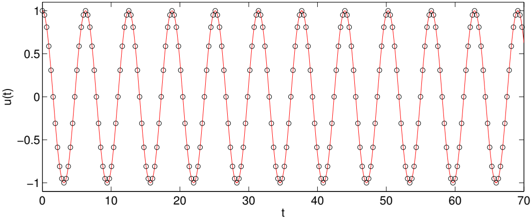
Un schéma exact

- Soit le schéma suivant:

$$u_{n+1} - 2\cos(\omega_0 h)u_n + u_{n-1} = 0$$

  Ce schéma est **exact**.
- Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = 4\cos^2(\omega_0 h) - 4 = -4\sin^2(\omega_0 h)$.
- racines : $z_\pm = \cos(\omega_0 h) \pm j\sin(\omega_0 h) = e^{j\omega_0 h}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\omega_d = \omega_0}$.
- Illustrations, ω_0=1, u_0=1.

h=0.31, 20 points par périodes



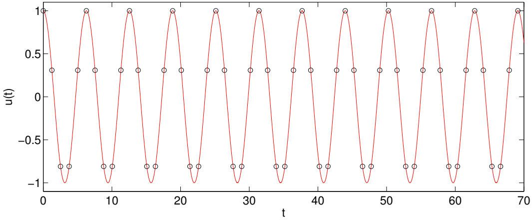
Un schéma exact

- Soit le schéma suivant:

$$u_{n+1} - 2\cos(\omega_0 h) u_n + u_{n-1} = 0$$

  Ce schéma est **exact**.
- Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = 4\cos^2(\omega_0 h) - 4 = -4\sin^2(\omega_0 h)$.
- racines : $z_\pm = \cos(\omega_0 h) \pm j\sin(\omega_0 h) = e^{j\omega_0 h}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\omega_d = \omega_0}$.
- Illustrations, ω_0=1, u_0=1.

h=1.25, 5 points par périodes



Un schéma exact

- Soit le schéma suivant:

$$u_{n+1} - 2\cos(\omega_0 h)u_n + u_{n-1} = 0$$

  Ce schéma est **exact**.

- Discriminant du polynôme caractéristique : $\Delta = 4\cos^2(\omega_0 h) - 4 = -4\sin^2(\omega_0 h)$.
- racines : $z_\pm = \cos(\omega_0 h) \pm j\sin(\omega_0 h) = e^{j\omega_0 h}$ $\rightsquigarrow \boxed{\omega_d = \omega_0}$.
- Illustrations, ω_0=1, u_0=1.

h=10

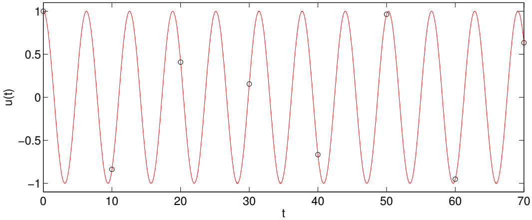


Schéma exact - cas amorti

- Pour l'oscillateur linéaire amorti : $\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$
- schéma exact:

$$u_{n+1} - e^{-\xi\omega_0 h}\left[e^{h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}} + e^{-h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}}\right]u_n + e^{-2\xi h\omega_0}\,u_{n-1} = 0$$

Schéma exact - cas amorti

- Pour l'oscillateur linéaire amorti : $\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$
- schéma exact:

$$u_{n+1} - e^{-\xi\omega_0 h}\left[e^{h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}} + e^{-h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}}\right]u_n + e^{-2\xi h\omega_0}\,u_{n-1} = 0$$

- Illustrations, ω_0=1, u_0=1, h=2.

ξ=0.01

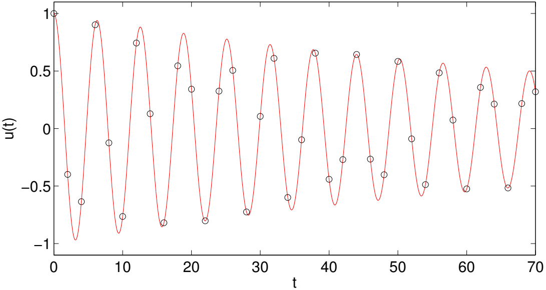


Schéma exact - cas amorti

- Pour l'oscillateur linéaire amorti : $\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$
- schéma exact:

$$u_{n+1} - e^{-\xi\omega_0 h}\left[e^{h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}} + e^{-h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}}\right]u_n + e^{-2\xi h\omega_0}\,u_{n-1} = 0$$

- Illustrations, ω_0=1, u_0=1, h=2.

ξ=0.05

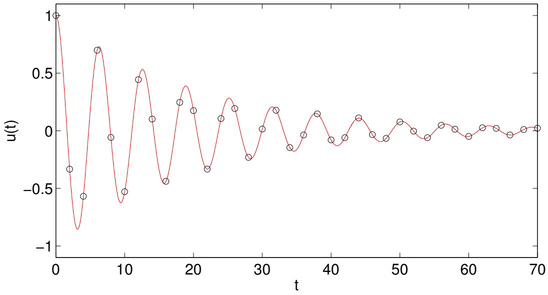


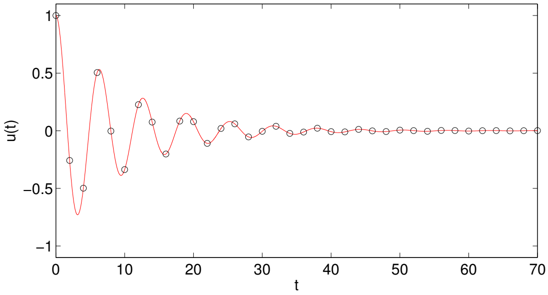
Schéma exact - cas amorti

- Pour l'oscillateur linéaire amorti : $\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$
- schéma exact:

$$u_{n+1} - e^{-\xi\omega_0 h}\left[e^{h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}} + e^{-h\omega_0\sqrt{\xi^2-1}}\right]u_n + e^{-2\xi h\omega_0}\,u_{n-1} = 0$$

- Illustrations, ω_0=1, u_0=1, h=2.

ξ=0.1



Plan de la présentation

EQUATION DE DUFFING

- Équation de Duffing :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

- Énergie

$$H = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 u^2 + \frac{1}{4}\gamma u^4$$

Equation de Duffing

- Équation de Duffing :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

- Énergie

$$H = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 u^2 + \frac{1}{4}\gamma u^4$$

- schéma le plus simple:
  - cas θ=1 pour la partie linéaire
  - terme non linéaire à l'instant courant

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

EQUATION DE DUFFING

- Équation de Duffing :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

- Énergie

$$H = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 u^2 + \frac{1}{4}\gamma u^4$$

- schéma le plus simple:
  - cas θ=1 pour la partie linéaire
  - terme non linéaire à l'instant courant

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + h^2 \omega_0^2 u_n + h^2 \gamma u_n^3 = 0$$

Equation de Duffing

- Équation de Duffing :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

- Énergie

$$H = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 u^2 + \frac{1}{4}\gamma u^4$$

- schéma le plus simple:
  - cas θ=1 pour la partie linéaire
  - terme non linéaire à l'instant courant

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 u + \gamma u^3 = 0$$

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + h^2\omega_0^2 u_n + h^2\gamma u_n^3 = 0$$

$\rightsquigarrow$ *schéma de Störmer-Verlet.*

ce schéma n'est pas conservatif.

Équation de Duffing

- Famille de schémas conservatifs pour l'équation de Duffing:

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2(\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.})u + \gamma\left(\theta_2 u^2 + (1-\theta_2)\mu_{t.}(u^2)\right)\mu_{t.} u = 0$$

Équation de Duffing

- Famille de schémas conservatifs pour l'équation de Duffing:

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2 (\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.}) u + \gamma \left(\theta_2 u^2 + (1-\theta_2)\mu_{t.}(u^2) \right) \mu_{t.} u = 0$$

- Énergie discrète associée:
  - cas θ_2=1 : identité remarquable : $u_n^2 \mu_{t.}(u_n) \delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+} \frac{1}{4} (u_n^2 u_{n-1}^2)$
  - cas θ_2=0 : $\mu_{t.}(u_n^2) \mu_{t.}(u_n) \delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+} \frac{1}{4} \mu_{t-} u_n^4$

Équation de Duffing

- Famille de schémas conservatifs pour l'équation de Duffing:

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.})u + \gamma\left(\theta_2 u^2 + (1-\theta_2)\mu_{t.}(u^2)\right)\mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète associée:
  - cas θ_2=1 : identité remarquable : $u_n^2\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}(u_n^2 u_{n-1}^2)$
  - cas θ_2=0 : $\mu_{t.}(u_n^2)\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}\mu_{t-}u_n^4$

$$\boxed{\begin{aligned} h = \; & \frac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta_1\frac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta_1)\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right) \\ & + \frac{\gamma}{4}\left(\theta_2 u^2(e_{t-}u)^2 + (1-\theta_2)\mu_{t-}u^4\right) \end{aligned}}$$

$\leadsto$ terme NL de l'énergie discrète positif
$\leadsto$ propriétés de stabilité héritée du choix de θ_1.

Équation de Duffing

- Famille de schémas conservatifs pour l'équation de Duffing:

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.})u + \gamma\left(\theta_2 u^2 + (1-\theta_2)\mu_{t.}(u^2)\right)\mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète associée:
  - cas θ_2=1 : identité remarquable : $u_n^2\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}(u_n^2 u_{n-1}^2)$
  - cas θ_2=0 : $\mu_{t.}(u_n^2)\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}\mu_{t-}u_n^4$

$$\boxed{\begin{aligned} h = \; & \tfrac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta_1\tfrac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta_1)\tfrac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right) \\ & + \tfrac{\gamma}{4}\left(\theta_2 u^2(e_{t-}u)^2 + (1-\theta_2)\mu_{t-}u^4\right) \end{aligned}}$$

$\rightsquigarrow$ terme NL de l'énergie discrète positif
$\rightsquigarrow$ propriétés de stabilité héritée du choix de θ_1.

- Cas θ_2=0 (et θ_1=1) :

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2 u + \gamma\mu_{t.}(u^2)\mu_{t.}u = 0$$

Équation de Duffing

- Famille de schémas conservatifs pour l'équation de Duffing:

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.})u + \gamma\left(\theta_2 u^2 + (1-\theta_2)\mu_{t.}(u^2)\right)\mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète associée:
  - cas θ_2=1 : identité remarquable : $u_n^2\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}(u_n^2 u_{n-1}^2)$
  - cas θ_2=0 : $\mu_{t.}(u_n^2)\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}\mu_{t-}u_n^4$

$$\boxed{\begin{aligned} h = \quad & \tfrac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta_1\tfrac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta_1)\tfrac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right) \\ & + \tfrac{\gamma}{4}\left(\theta_2 u^2(e_{t-}u)^2 + (1-\theta_2)\mu_{t-}u^4\right) \end{aligned}}$$

$\rightsquigarrow$ terme NL de l'énergie discrète positif
$\rightsquigarrow$ propriétés de stabilité héritée du choix de θ_1.

- Cas θ_2=0 (et θ_1=1) :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + h^2\omega_0^2 u_n + h^2\frac{\gamma}{4}(u_{n+1}+u_{n-1})(u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2) = 0$$

ÉQUATION DE DUFFING

- Famille de schémas conservatifs pour l'équation de Duffing:

$$\delta_{tt}u + \omega_0^2(\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.})u + \gamma\left(\theta_2 u^2 + (1-\theta_2)\mu_{t.}(u^2)\right)\mu_{t.}u = 0$$

- Énergie discrète associée:
  - cas θ_2=1 : identité remarquable : $u_n^2\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}(u_n^2 u_{n-1}^2)$
  - cas θ_2=0 : $\mu_{t.}(u_n^2)\mu_{t.}(u_n)\delta_{t.}(u_n) = \delta_{t+}\frac{1}{4}\mu_{t-}u_n^4$

$$\boxed{\begin{aligned} h = \quad & \tfrac{1}{2}(\delta_{t-}u)^2 + \omega_0^2\left(\theta_1\tfrac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta_1)\tfrac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right) \\ & + \tfrac{\gamma}{4}\left(\theta_2 u^2(e_{t-}u)^2 + (1-\theta_2)\mu_{t-}u^4\right) \end{aligned}}$$

$\rightsquigarrow$ terme NL de l'énergie discrète positif
$\rightsquigarrow$ propriétés de stabilité héritée du choix de θ_1.

- Cas θ_2=0 (et θ_1=1) :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + h^2\omega_0^2 u_n + h^2\frac{\gamma}{4}(u_{n+1}+u_{n-1})(u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2) = 0$$

  - schéma implicite (équation cubique en u_{n+1} à résoudre à chaque pas de temps)
  - difficulté supplémentaire dans la mise en œuvre

Equation de Duffing - schéma explicite conservatif

- Le cas θ_2=1 donne lieu à une récursion à deux pas explicite

$$\delta_{tt} u + \omega_0^2(\theta_1 + (1-\theta_1)\mu_{t.})u + \gamma u^2 \mu_{t.} u = 0$$

Equation de Duffing - schéma explicite conservatif

- Le cas θ_2=1 donne lieu à une récursion à deux pas explicite

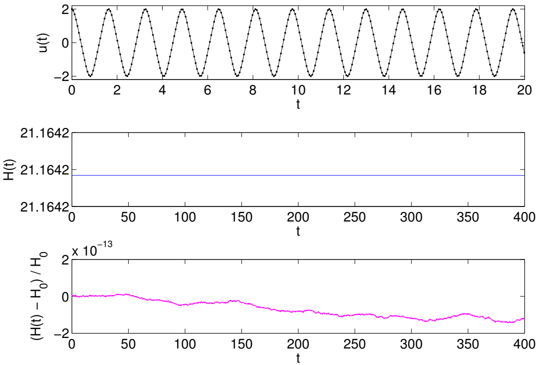
$$u_{n+1} = \frac{2 - h^2\omega_0^2\theta_1}{1 + (1-\theta_1)h^2\omega_0^2/2 + \gamma h^2 u_n^2/2} u_n - u_{n-1}$$

Equation de Duffing - schéma explicite conservatif

- Le cas θ_2=1 donne lieu à une récursion à deux pas explicite

$$u_{n+1} = \frac{2 - h^2\omega_0^2\theta_1}{1 + (1-\theta_1)h^2\omega_0^2/2 + \gamma h^2 u_n^2/2} u_n - u_{n-1}$$

- Illustration : ω_0=1, γ=5, θ_1=0.8, h=0.0628.



Plan de la présentation

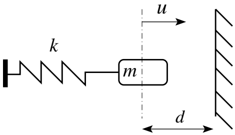
Oscillateur à impact - contact unilatéral

- Masse m, raideur k, mur rigide à distance d

$$m\ddot{u} + ku = -f$$

- Force de contact régularisée :

$$f(u) = K\,[u-d]_+^{\alpha}$$



  - K, α : paramètres de pénalisation
  - $[.]_+$: partie positive
  - si $u \le d$, $f = 0$
  - si $u > d$, $f(u) = K(u-d)^{\alpha}$

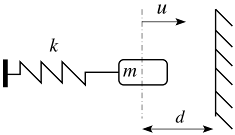
Oscillateur à impact - contact unilatéral

- Masse m, raideur k, mur rigide à distance d

$$m\ddot{u} + ku = -f$$

- Force de contact régularisée :

$$f(u) = K\,[u-d]_+^{\alpha}$$



  - K, α : paramètres de pénalisation
  - $[.]_+$: partie positive
  - si $u \leq d$, $f = 0$
  - si $u > d$, $f(u) = K(u-d)^{\alpha}$

- Force de contact dérive d'un potentiel

$$f = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u}, \quad \text{avec} \quad \Phi(u) = \frac{1}{\alpha+1}\,[u-d]_+^{\alpha+1}$$

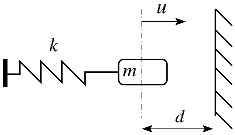
Oscillateur à impact - contact unilatéral

- Masse m, raideur k, mur rigide à distance d

$$m\ddot{u} + ku = -f$$

- Force de contact régularisée :

$$f(u) = K\,[u-d]_+^{\alpha}$$



  - K, α : paramètres de pénalisation
  - $[.]_+$: partie positive
  - si $u \leq d$, $f = 0$
  - si $u > d$, $f(u) = K(u-d)^{\alpha}$

- Force de contact dérive d'un potentiel

$$f = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u}, \quad \text{avec} \quad \Phi(u) = \frac{1}{\alpha+1}\,[u-d]_+^{\alpha+1}$$

- Énergies

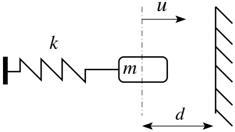
$$m\ddot{u}\dot{u} + ku\dot{u} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u}\dot{u}$$

Oscillateur à impact - contact unilatéral

- Masse m, raideur k, mur rigide à distance d

$$m\ddot{u} + ku = -f$$

- Force de contact régularisée :



$$f(u) = K\,[u-d]_+^{\alpha}$$

  - K, α : paramètres de pénalisation
  - $[.]_+$: partie positive
  - si $u \leq d$, $f = 0$
  - si $u > d$, $f(u) = K(u-d)^{\alpha}$

- Force de contact dérive d'un potentiel

$$f = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u}, \quad \text{avec} \quad \Phi(u) = \frac{1}{\alpha+1}\,[u-d]_+^{\alpha+1}$$

- Énergies

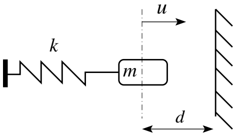
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi(u)\right)$$

Oscillateur à impact - contact unilatéral

- Masse m, raideur k, mur rigide à distance d

$$m\ddot{u} + ku = -f$$

- Force de contact régularisée :



$$f(u) = K\,[u-d]_+^{\alpha}$$

  - K, α : paramètres de pénalisation
  - $[.]_+$: partie positive
  - si $u \leq d$, $f = 0$
  - si $u > d$, $f(u) = K(u-d)^{\alpha}$

- Force de contact dérive d'un potentiel

$$f = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u}, \quad \text{avec} \quad \Phi(u) = \frac{1}{\alpha+1}\,[u-d]_+^{\alpha+1}$$

- Énergies

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \text{avec} \quad H = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}ku^2 + \Phi(u)$$

Oscillateur à impact

- schéma conservatif

$$m\delta_{tt}u + k(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = -f_n,$$

$$\text{avec} \quad f_n = \frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\delta_{t.}u}, \quad \text{et} \quad \Phi_{n+1/2} = \mu_{t+}\Phi(u_n)$$

$$\text{soit} \quad f_n = \frac{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}$$

Oscillateur à impact

- schéma conservatif

$$m\delta_{tt}u + k(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = -f_n,$$

$$\text{avec} \quad f_n = \frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\delta_{t.}u}, \quad \text{et} \quad \Phi_{n+1/2} = \mu_{t+}\Phi(u_n)$$

$$\text{soit} \quad f_n = \frac{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}$$

- Conservation de l'énergie discrète : terme de collision:

$$\frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\delta_{t.}u}\delta_{t.}u$$

Oscillateur à impact

- schéma conservatif

$$m\delta_{tt}u + k(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = -f_n,$$

$$\text{avec} \quad f_n = \frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\delta_{t.}u}, \quad \text{et} \quad \Phi_{n+1/2} = \mu_{t+}\Phi(u_n)$$

$$\text{soit} \quad f_n = \frac{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}$$

- Conservation de l'énergie discrète : terme de collision:

$$\frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\cancel{\delta_{t.}u}}\cancel{\delta_{t.}u} = \delta_{t-}\Phi_{n+1/2}$$

Oscillateur à impact

- schéma conservatif

$$m\delta_{tt}u + k(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = -f_n,$$

$$\text{avec} \quad f_n = \frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\delta_{t.}u}, \quad \text{et} \quad \Phi_{n+1/2} = \mu_{t+}\Phi(u_n)$$

$$\text{soit} \quad f_n = \frac{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}$$

- Conservation de l'énergie discrète : $\delta_{t-}h = 0$, avec

$$h = \frac{1}{2}m(\delta_{t-}u)^2 + k\left(\theta\frac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta)\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right) + \Phi_{n+1/2}$$

Oscillateur à impact

- schéma conservatif

$$m\delta_{tt}u + k(\theta + (1-\theta)\mu_{t.})u = -f_n,$$

$$\text{avec} \quad f_n = \frac{\delta_{t-}\Phi_{n+1/2}}{\delta_{t.}u}, \quad \text{et} \quad \Phi_{n+1/2} = \mu_{t+}\Phi(u_n)$$

$$\text{soit} \quad f_n = \frac{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}$$

- Conservation de l'énergie discrète : $\delta_{t-}h = 0$, avec

$$h = \frac{1}{2}m(\delta_{t-}u)^2 + k\left(\theta\frac{1}{2}ue_{t-}u + (1-\theta)\frac{1}{2}\mu_{t-}u^2\right) + \Phi_{n+1/2}$$

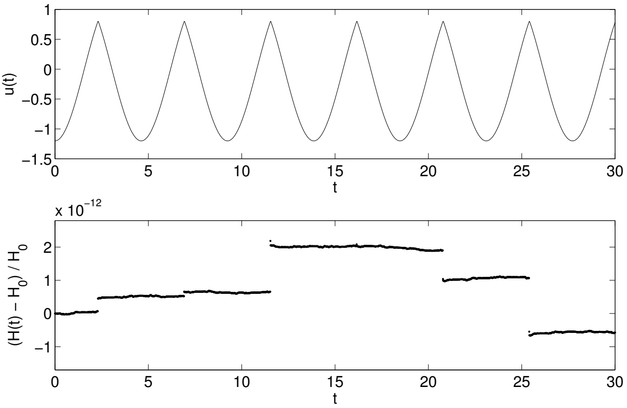
- Résolution pratique :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + \frac{kh^2}{m}\left(\theta u_n + (1-\theta)\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}\right) = -\frac{h^2}{m}\left[\frac{\Phi(u_{n+1}) - \Phi(u_{n-1})}{u_{n+1} - u_{n-1}}\right]$$

$\rightsquigarrow$ Newton-Raphson...

Oscillateur à impact

- Illustration : $m = k$=1, K=10^{10}, α=1.3, d=0.8, h=0.01



Plan de la présentation

Plan de la présentation

Définitions

- Systèmes dynamiques :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d.$$

- Système Hamiltonien :
  coordonnées généralisées $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{p} = [p_1, ..., p_d]^t$, espace des phases de dimension $2d$, Hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.
  Équations du mouvement:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

DÉFINITIONS

- Systèmes dynamiques :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d.$$

- Système Hamiltonien :
  coordonnées généralisées $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{p} = [p_1, ..., p_d]^t$, espace des phases de dimension $2d$, Hamiltonien $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.
  Équations du mouvement:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

- Écriture sous forme plus compacte:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}^{-1} \nabla H(\mathbf{y}),$$

avec $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et $\mathbf{J}$ la matrice définie par:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_d \\ -\mathbf{I}_d & 0 \end{pmatrix}$$

DÉFINITIONS

- Intégrale première du mouvement
  (invariants, constantes du mouvement, quantité conservée...)
  Pour un système dynamique autonome : $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$,
  intégrale première $I(\mathbf{y})$ fonction non-constante vérifiant :

$$I'(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{y}.$$

DÉFINITIONS

- Intégrale première du mouvement
  (invariants, constantes du mouvement, quantité conservée...)
  Pour un système dynamique autonome : $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$,
  intégrale première $I(\mathbf{y})$ fonction non-constante vérifiant :

$$I'(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{y}.$$

- En particulier:
  Soit $\mathbf{y}(t)$ une orbite du système, alors:

$$\forall\ t,\ \ I(\mathbf{y}(t)) = I(\mathbf{y}_0)$$

DÉFINITIONS

- Intégrale première du mouvement
  (invariants, constantes du mouvement, quantité conservée...)
  Pour un système dynamique autonome : $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$,
  intégrale première $I(\mathbf{y})$ fonction non-constante vérifiant :

$$I'(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{y}.$$

- En particulier:
  Soit $\mathbf{y}(t)$ une orbite du système, alors:

$$\forall\, t,\;\; I(\mathbf{y}(t)) = I(\mathbf{y}_0)$$

$\rightsquigarrow$ le Hamiltonien (énergie totale) est une intégrale première

Transformations symplectiques

- Symplecticité : *conservation de la somme des aires orientées*

Transformations symplectiques

- Symplecticité : *conservation de la somme des aires orientées*
- Soient $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}^p \; \boldsymbol{\xi}^q]^t$ et $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}^p \; \boldsymbol{\eta}^q]^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{2d}$, et P le parallélogramme bidim de $\mathbb{R}^{2d}$ engendré par $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$:

$$P = \{t\boldsymbol{\xi} + s\boldsymbol{\eta}, t \in [0, 1], s \in [0, 1]\}.$$

Transformations symplectiques

- Symplecticité : *conservation de la somme des aires orientées*
- Soient $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}^p \ \boldsymbol{\xi}^q]^t$ et $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}^p \ \boldsymbol{\eta}^q]^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{2d}$, et P le parallélogramme bidim de $\mathbb{R}^{2d}$ engendré par $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$:

$$P = \{t\boldsymbol{\xi} + s\boldsymbol{\eta}, t \in [0,1], s \in [0,1]\}.$$

- Soit $\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ *la somme des aires orientées des projections de P sur les plans de coordonnées* (p_i, q_i),

$$\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{d} \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d} \xi_i^p \eta_i^q - \xi_i^q \eta_i^p,$$

TRANSFORMATIONS SYMPLECTIQUES

- Symplecticité : *conservation de la somme des aires orientées*
- Soient $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}^p \ \boldsymbol{\xi}^q]^t$ et $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}^p \ \boldsymbol{\eta}^q]^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{2d}$, et P le parallélogramme bidim de $\mathbb{R}^{2d}$ engendré par $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$:

$$P = \{t\boldsymbol{\xi} + s\boldsymbol{\eta}, t \in [0,1], s \in [0,1]\}.$$

- Soit $\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ *la somme des aires orientées des projections de P sur les plans de coordonnées* (p_i, q_i),

$$\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{d} \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d} \xi_i^p \eta_i^q - \xi_i^q \eta_i^p,$$

- Définition:
  Une application différentiable $g : U \subset \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$ est symplectique si la matrice jacobienne $g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est partout symplectique, soit:

$$g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})^t \mathbf{J} g'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{J}, \qquad \text{ou} \quad \omega(g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})\xi, g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})\boldsymbol{\eta}) = \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}).$$

Transformations symplectiques

- Symplecticité : *conservation de la somme des aires orientées*
- Soient $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\xi}^p \ \boldsymbol{\xi}^q]^t$ et $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}^p \ \boldsymbol{\eta}^q]^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{2d}$, et P le parallélogramme bidim de $\mathbb{R}^{2d}$ engendré par $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$:

$$P = \{t\boldsymbol{\xi} + s\boldsymbol{\eta}, t \in [0,1], s \in [0,1]\}.$$

- Soit $\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ *la somme des aires orientées des projections de P sur les plans de coordonnées* (p_i, q_i),

$$\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^{d} \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{d} \xi_i^p \eta_i^q - \xi_i^q \eta_i^p,$$

- Définition:
  Une application différentiable $g : U \subset \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$ est symplectique si la matrice jacobienne $g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est partout symplectique, soit:

$$g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})^t \mathbf{J} g'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{J}, \qquad \text{ou} \quad \omega(g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})\xi, g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})\boldsymbol{\eta}) = \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}).$$

- *Théorème (Poincaré, 1899) :*
  Soit $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ un Hamiltonien continûment différentiable deux fois sur un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^{2d}$. Alors, pour tout temps t, le flot ϕ_t associé est une transformation symplectique.

Plan de la présentation

Schéma de Störmer-Verlet

- Pour les systèmes du second ordre :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}),$$

- schéma de Störmer-Verlet (ou leap-frog ou saute-mouton) :

$$\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1} = h^2\mathbf{f}(\mathbf{q}_n).$$

- Propriétés :
  - ordre 2
  - symétrique
  - **symplectique**
  - condition de stabilité : $h\omega \leq 2$

Plan de la présentation

Méthodes de Runge-Kutta

- Définition : Soient $\{b_i, a_{ij}\}_{i,j=1\dots s} \in \mathbb{R}$, et $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$.
  Méthode de Runge-Kutta à s étapes :

$$k_i = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j, t_n + c_i h), \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, s$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

- Représentation sous forme de tableau :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

- Remarque : lorsque $a_{ij} = 0$, pour $i \leq j$, la méthode de Runge-Kutta est *explicite*. Sinon elle est *implicite*.

MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA : EXEMPLES

- Runge-Kutta d'ordre 2 (méthodes explicites) :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- Méthodes explicites d'ordre 4 :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

Méthodes de Runge-Kutta : exemples

- Runge-Kutta d'ordre 2 (méthodes explicites) :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

- Méthodes explicites d'ordre 4 :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$

- Ordre d'un schéma de Runge-Kutta (conditions cumulatives) :

$$\text{ordre 1 : } \sum_i b_i = 1$$

$$\text{ordre 2 : } \sum_i b_i c_i = 1/2$$

$$\text{ordre 3 : } \sum_i b_i c_i^2 = 1/3 \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_i = 1/6.$$

Méthodes de Runge-Kutta : propriétés

- Conservation des invariants quadratiques
  - invariant quadratique : $I(y) = \mathbf{y}^t \mathbf{C} \mathbf{y}$
    exemple : énergie
  - **Théorème :** Une méthode de Runge-Kutta conserve les invariants quadratiques si ses coefficients vérifient les relations :

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j, \qquad \forall (i,j) \in [1,s]^2.$$

Méthodes de Runge-Kutta : propriétés

- Conservation des invariants quadratiques
  - invariant quadratique : $I(y) = \mathbf{y}^t \mathbf{C} \mathbf{y}$
    exemple : énergie
  - **Théorème :** Une méthode de Runge-Kutta conserve les invariants quadratiques si ses coefficients vérifient les relations :

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j, \qquad \forall (i,j) \in [1,s]^2.$$

- En pratique très peu de cas... Méthodes de Gauss
  - Méthode de Gauss à une étape $\equiv$ point milieu implicite (ordre 2)

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}}{2}\right).$$

  - Méthode de Gauss d'ordre 4:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Méthodes de Runge-Kutta : propriétés

- Conservation des invariants quadratiques
  - invariant quadratique : $I(y) = \mathbf{y}^t \mathbf{C} \mathbf{y}$
    exemple : énergie
  - **Théorème :** Une méthode de Runge-Kutta conserve les invariants quadratiques si ses coefficients vérifient les relations :

$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j, \qquad \forall (i,j) \in [1,s]^2.$$

  - En pratique très peu de cas... Méthodes de Gauss
    - Méthode de Gauss à une étape $\equiv$ point milieu implicite (ordre 2)

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}}{2}\right).$$

    - Méthode de Gauss d'ordre 4:

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

- Toutes les méthodes de Runge-Kutta préservant les intégrales premières quadratiques sont symplectiques.
  $\rightsquigarrow$ les méthodes de Gauss sont symplectiques.

Plan de la présentation

SYMPLECTICITÉ ET CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

- Dans la plupart des cas, les schémas numériques ne peuvent pas conserver **simultanément** l'énergie et être symplectique.

  [Z. Ge and J.E. Marsden : Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators, *Physics Letters A*, 1988.]

  $\rightsquigarrow$ 2 catégories de schémas:
  - *energy-momentum scheme*
  - *symplectic-momentum scheme*

- quelques exceptions:
  - lorsque le système hamiltonien est complètement intégrable
  - algorithme à pas de temps variable

Plan de la présentation

Plan de la présentation

ÉQUATIONS DE VON KÁRMÁN POUR LES PLAQUES MINCES

- inconnues:
  $w(\mathbf{x}, t)$: déplacement transverse,
  $F(\mathbf{x}, t)$: fonction d'Airy.

$$\rho h \ddot{w} + D\Delta\Delta w = L(w, F) + p(\mathbf{x}, t) - R(\mathbf{x}, t),$$
$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2} L(w, w).$$

  - Paramètre matériau : masse volumique ρ, module d'Young E, coefficient de Poisson ν.
  - Géometrie : épaisseur h, rigidité en flexion $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$.
  - $R(\mathbf{x}, t)$ représente les pertes

ÉQUATIONS DE VON KÁRMÁN POUR LES PLAQUES MINCES

- inconnues:
  $w(\mathbf{x}, t)$: déplacement transverse,
  $F(\mathbf{x}, t)$: fonction d'Airy.

$$\rho h \ddot{w} + D\Delta\Delta w = L(w, F) + p(\mathbf{x}, t) - R(\mathbf{x}, t),$$
$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2} L(w, w).$$

  - Paramètre matériau : masse volumique ρ, module d'Young E, coefficient de Poisson ν.
  - Géometrie : épaisseur h, rigidité en flexion $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$.
  - $R(\mathbf{x}, t)$ représente les pertes
- L opérateur bilinéaire :

$$L(F, w) = F_{,xx} w_{,yy} + F_{,yy} w_{,xx} - 2F_{,xy} w_{,xy}$$

ÉQUATIONS DE VON KÁRMÁN POUR LES PLAQUES MINCES

- inconnues:
  $w(\mathbf{x}, t)$: déplacement transverse,
  $F(\mathbf{x}, t)$: fonction d'Airy.

$$\rho h \ddot{w} + D\Delta\Delta w = L(w, F) + p(\mathbf{x}, t) - R(\mathbf{x}, t),$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2} L(w, w).$$

  - Paramètre matériau : masse volumique ρ, module d'Young E, coefficient de Poisson ν.
  - Géometrie : épaisseur h, rigidité en flexion $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$.
  - $R(\mathbf{x}, t)$ représente les pertes
- L opérateur bilinéaire :

$$L(F, w) = F_{,xx} w_{,yy} + F_{,yy} w_{,xx} - 2F_{,xy} w_{,xy}$$

- Géométrie et conditions aux limites, code existant pour:
  - plaque circulaire, bord libre et encastré
  - plaque rectangulaire, bords libres, simplement supportés, distribution linéique de ressorts.

Approche modale

- Discrétisation des deux inconnues :

$$w(\mathbf{x},t) = \sum_{k=1}^{N_\Phi} q_k(t)\Phi_k(\mathbf{x}),$$

$$F(\mathbf{x},t) = \sum_{k=1}^{N_\Psi} \eta_k(t)\Psi_k(\mathbf{x}),$$

Approche modale

- Discrétisation des deux inconnues :

$$w(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_\Phi} q_k(t)\Phi_k(\mathbf{x}),$$

$$F(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{N_\Psi} \eta_k(t)\Psi_k(\mathbf{x}),$$

- EDP projetées, système d'EDO en temps :

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s + 2\xi_s\omega_s\dot{q}_s = \frac{1}{\rho h}\sum_{k=1}^{N_\Phi}\sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k \eta_l + p_s(t),$$

$$\eta_l = -\frac{Eh}{2\zeta_l^4}\sum_{m,n}^{N_\Phi} H_{m,n}^l q_m q_n.$$

avec

$$H_{i,j}^k = \int_S \Psi_k L(\Phi_i, \Phi_j)\mathrm{d}S$$

$$E_{i,j}^s = \int_S \Phi_s L(\Phi_i, \Psi_j)\mathrm{d}S.$$

Énergies

- Énergies cinétiques et potentielles :

$$\text{E. cinétique:} \qquad T = \int_S \frac{\rho h}{2} \dot{w}^2 \,\mathrm{d}S\,,$$

$$\text{E. potentielle (transverse):} \qquad V = \int_S \frac{D}{2} (\Delta w)^2 \,\mathrm{d}S\,,$$

$$\text{E. potentielle (longi.):} \qquad U = \int_S \frac{1}{2Eh} (\Delta F)^2 \,\mathrm{d}S\,.$$

ÉNERGIES

- Énergies cinétiques et potentielles :

$$\text{E. cinétique:} \qquad T = \int_S \frac{\rho h}{2} \dot{w}^2 \, \mathrm{d}S \,,$$

$$\text{E. potentielle (transverse):} \qquad V = \int_S \frac{D}{2} (\Delta w)^2 \, \mathrm{d}S \,,$$

$$\text{E. potentielle (longi.):} \qquad U = \int_S \frac{1}{2Eh} (\Delta F)^2 \, \mathrm{d}S \,.$$

- Équivalents discrétisées (projection modale) :

$$T = \frac{\rho h}{2} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \dot{q}_k^2(t),$$

$$V = \frac{\rho h}{2} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \omega_k^2 q_k^2(t),$$

$$U = \frac{1}{2Eh} \sum_{k=1}^{N_\Psi} \zeta_k^4 \eta_k^2(t).$$

Énergies

- Énergies cinétiques et potentielles :

$$\text{E. cinétique:} \qquad T = \int_S \frac{\rho h}{2}\, \dot{w}^2 \,\mathrm{d}S\,,$$

$$\text{E. potentielle (transverse):} \qquad V = \int_S \frac{D}{2}\, (\Delta w)^2 \,\mathrm{d}S\,,$$

$$\text{E. potentielle (longi.):} \qquad U = \int_S \frac{1}{2Eh}\, (\Delta F)^2 \,\mathrm{d}S\,.$$

- Équivalents discrétisées (projection modale) :

$$T = \frac{\rho h}{2} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \dot{q}_k^2(t),$$

$$V = \frac{\rho h}{2} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \omega_k^2 q_k^2(t),$$

$$U = \frac{1}{2Eh} \sum_{k=1}^{N_\Psi} \zeta_k^4 \eta_k^2(t).$$

- L'énergie totale $E = T + V + U$ est conservée:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V + U) = 0}$$

Schéma conservatif

- schéma conservant l'énergie pour le pb discrétisé :

$$\delta_{tt} q_s(n) + \omega_s^2 q_s(n) = \frac{1}{\rho h} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k(n) [\mu_{t\cdot} \eta_l(n)];$$

$$\mu_{t-} \eta_l(n) = -\frac{Eh}{2\zeta_l^4} \sum_{i,j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^l q_i(n) [e_{t-} q_j(n)].$$

Schéma conservatif

- schéma conservant l'énergie pour le pb discrétisé :

$$\delta_{tt} q_s(n) + \omega_s^2 q_s(n) = \frac{1}{\rho h} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k(n) [\mu_{t\cdot} \eta_l(n)];$$

$$\mu_{t-} \eta_l(n) = -\frac{Eh}{2\zeta_l^4} \sum_{i,j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^l q_i(n) [e_{t-} q_j(n)].$$

- Équivalent discret de l'énergie :

$$\mathfrak{t} = \sum_{s=1}^{N_\Phi} \tau_s(n) = \frac{\rho h}{2} \sum_{s=1}^{N_\Phi} (\delta_{t-} q_s(n))^2 \,,$$

$$\mathfrak{v} = \sum_{s=1}^{N_\Phi} \nu_s(n) = \frac{\rho h}{2} \sum_{s=1}^{N_\Phi} \omega_s^2 q_s(n) \left(e_{t-} q_s(n) \right) ,$$

$$\mathfrak{u} = \sum_{l=1}^{N_\Psi} \upsilon_l(n) = \frac{1}{2Eh} \sum_{l=1}^{N_\Psi} \zeta_l^4 \left(\mu_{t-} \left(\eta_l(n) \eta_l(n) \right) \right) ,$$

$$\boxed{\delta_{t+} (\mathfrak{t} + \mathfrak{v} + \mathfrak{u}) = 0}$$

Schéma conservatif

- schéma conservant l'énergie pour le pb discrétisé :

$$\delta_{tt} q_s(n) + \omega_s^2 q_s(n) = \frac{1}{\rho h} \sum_{k=1}^{N_\Phi} \sum_{l=1}^{N_\Psi} E_{k,l}^s q_k(n) [\mu_{t\cdot} \eta_l(n)];$$

$$\mu_{t-} \eta_l(n) = -\frac{Eh}{2\zeta_l^4} \sum_{i,j=1}^{N_\Phi} H_{i,j}^l q_i(n) [e_{t-} q_j(n)].$$

- Équivalent discret de l'énergie :

$$\mathfrak{t} = \sum_{s=1}^{N_\Phi} \tau_s(n) = \frac{\rho h}{2} \sum_{s=1}^{N_\Phi} (\delta_{t-} q_s(n))^2 ,$$

$$\mathfrak{v} = \sum_{s=1}^{N_\Phi} \nu_s(n) = \frac{\rho h}{2} \sum_{s=1}^{N_\Phi} \omega_s^2 q_s(n) \left(e_{t-} q_s(n) \right) ,$$

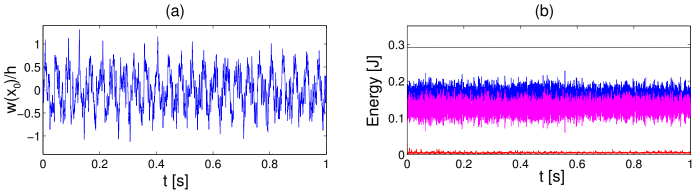
$$\mathfrak{u} = \sum_{l=1}^{N_\Psi} \upsilon_l(n) = \frac{1}{2Eh} \sum_{l=1}^{N_\Psi} \zeta_l^4 \left(\mu_{t-} \left(\eta_l(n) \eta_l(n) \right) \right) ,$$

$$\boxed{\delta_{t+}(\mathfrak{t} + \mathfrak{v} + \mathfrak{u}) = 0}$$

- schéma conditionnellement stable : $h\omega_{N_\phi} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad f_e > \pi f_{N_\phi}$

Conservation de l'énergie

- Cas d'une plaque rectangulaire, L_x=0.4 m, L_y=0.6 m, h=1 mm
- paramètres matériau : E=200 GPa, ν=0.3, ρ=7860 kg.m^{-3}
- excitation : impulsion Dirac localisée en temps et en espace, pas d'amortissement.
- $N_\Phi = 100$, $N_\Psi = 200$.
- $f_{N_\Phi} = 1400$ Hz, $f_e = 10$ kHz.



noir : énergie discrète totale $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{v} + \mathfrak{u}$
bleu : énergie cinétique $\mathfrak{t}$
magenta : énergie potentielle transverse $\mathfrak{v}$

rouge : énergie potentielle longitudinale $\mathfrak{u}$

PLAQUE CIRCULAIRE, CAS D'UN GONG

- Matériau: E=2.10^{11} Pa, ν=0.3 and ρ=7860 kg.m^{-3}
- Géométrie : rayon a=0.4 m, épaisseur h=1 mm.

PLAQUE CIRCULAIRE, CAS D'UN GONG

- Matériau: E=2.10^{11} Pa, ν=0.3 and ρ=7860 kg.m^{-3}
- Géométrie : rayon a=0.4 m, épaisseur h=1 mm.

- Simulation : 1000 modes transverses
  Condition de stabilité : $f_s > \pi f_{1000} \Rightarrow f_s > 18055$ Hz.
- f_s=40 kHz.
- Excitation : force localisée en temps et en espace, proche du bord ($r = 0.92a$).
  Sortie : déplacement en $r = 0.896a$, angle arbitraire 0.519 radians.

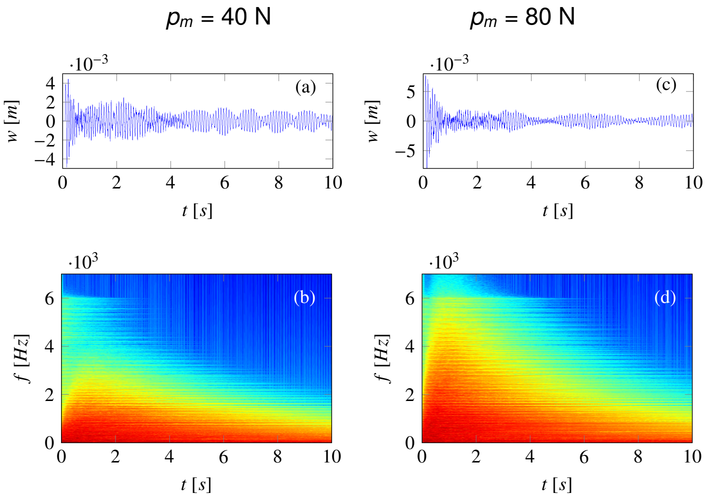
Plaque circulaire, cas d'un gong

- Matériau: E=2.10^{11} Pa, ν=0.3 and ρ=7860 kg.m^{-3}
- Géométrie : rayon a=0.4 m, épaisseur h=1 mm.

- Simulation : 1000 modes transverses
  Condition de stabilité : $f_s > \pi f_{1000} \Rightarrow f_s > 18055$ Hz.
- f_s=40 kHz.
- Excitation : force localisée en temps et en espace, proche du bord ($r = 0.92a$).
  Sortie : déplacement en $r = 0.896a$, angle arbitraire 0.519 radians.

- Amortissement : $c_p \dot{q}_p$, $c_p = 0.005\omega_p^{0.6}$.
- 2 amplitudes de force : p_m=40 N and 80 N.

Plaque circulaire, cas d'un gong



Plaque rectangulaire

- taille de la plaque : L_x=0.6m, L_y=0.8m, épaisseur h=1mm.
- bords simplement supportés.
- Amortissement: $c_p = 0.005\omega_p^{0.6}$
- N_Φ=800 modes (f_{N_ϕ} = 5295 Hz)
- f_S=40 kHz

Plaque rectangulaire

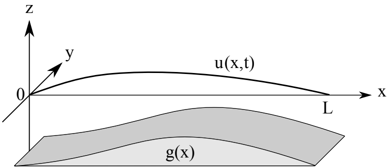
- taille de la plaque : L_x=0.6m, L_y=0.8m, épaisseur h=1mm.
- bords simplement supportés.
- Amortissement: $c_p = 0.005\omega_p^{0.6}$
- N_Φ=800 modes (f_{N_ϕ} = 5295 Hz)
- f_S=40 kHz

- influence de la forme ?

Plan de la présentation

Corde vibrante - contact unilatéral

- corde raide, déplacement transverse $u(x,t)$, obstacle $g(x)$



- Équations du mouvement:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f,$$

conditions aux limites : $u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0$

- Force de contact régularisée

$$f(x,t) = K\left[\eta(x,t)\right]_+^\alpha, \quad \text{avec} \quad \eta(x,t) = g(x) - u(x,t)$$

- Énergie

$$\mathscr{H} = \int_0^L \left[\frac{\mu}{2}(u_t)^2 + \frac{T}{2}(u_x)^2 + \frac{EI}{2}(u_{xx})^2 + \psi\right] \mathrm{d}x, \quad \text{où} \quad f = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta}$$

Approche modale

- projection sur la base modale:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N_m} q_j(t)\phi_j(x), \quad \text{avec} \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$$

- Système dynamique:

$$\mu(\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{q} + 2\mathbf{\Upsilon}\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{F},$$

  - $\mathbf{\Omega}_{ij} = \omega_j\delta_{ij}$, avec $\omega_j = 2\pi j \frac{c_0}{2L}\sqrt{1+Bj^2}$, et $c_0 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $B = \frac{\pi^2 EI}{TL^2}$.
  - $\mathbf{\Upsilon}$: matrice diagonale des amortissements modaux, $\mathbf{\Upsilon}_{jj} = \sigma_j$
  - $\mathbf{F}$ vecteur de force modale, $F_j = \int_0^L f(x,t)\phi_j(x)\mathrm{d}x$.

- Traitement de la force de contact dans le domaine spatial: grille spatiale $x_i = i\Delta x$, avec $\Delta x = \frac{L}{N}$ pas d'espace et $i \in \{0, ..., N\}$. En choisissant : $N_m = N - 1$

$$u(x_i,t) = u_i(t) = \sum_{j=1}^{N-1} q_j(t)\phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{N-1} q_j(t)\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi i}{N}\right).$$

Soit $\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{q}$.

Discrétisation temporelle

- Pour la partie vibratoire linéaire (sans contact):
  Utilisation du **schéma exact**

$$\frac{\mu}{h^2}\left(\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^{n} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}\right) = \mathbf{0},$$

avec:

$$C_{i,i} = e^{-h\sigma_i}\left(e^{\sqrt{\sigma_i^2-\omega_i^2}h} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2-\omega_i^2}h}\right),$$

$$\tilde{C}_{i,i} = e^{-2h\sigma_i}.$$

Discrétisation temporelle

- Pour la partie vibratoire linéaire (sans contact):
  Utilisation du **schéma exact**

$$\frac{\mu}{h^2}\left(\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{C}\mathbf{q}^{n} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}^{n-1}\right) = \mathbf{0},$$

avec:

$$C_{i,i} = e^{-h\sigma_i}\left(e^{\sqrt{\sigma_i^2-\omega_i^2}h} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2-\omega_i^2}h}\right),$$
$$\tilde{C}_{i,i} = e^{-2h\sigma_i}.$$

- Pour le contact : résolution en **u**

$$\frac{\mu}{h^2}\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{D}\mathbf{u}^{n} + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}^{n-1}\right) = \mathbf{f}^n,$$

avec $\mathbf{D} = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}^{-1}$ et $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{S}^{-1}$.
Force de contact:

$$\mathbf{f}^n = \frac{\delta_{t-}\psi^{n+\frac{1}{2}}}{\delta_{t.}\boldsymbol{\eta}^n}, \quad \text{avec} \quad \psi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\psi^{n+1} + \psi^n)$$

SCHÉMA NUMÉRIQUE - PROPRIÉTÉS

- ordre deux
- Sans dissipation ($\forall\, i, \quad \sigma_i = 0$), le schéma est **conservatif**.

$$\delta_{t-} H^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

avec

$$H^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2}\left(\langle \delta_{t+}\mathbf{u}^n, \check{\mathbf{D}}_1 \delta_{t+}\mathbf{u}^n \rangle + \left\langle \mathbf{u}^{n+1}, \check{\mathbf{D}}_2 \mathbf{u}^n \right\rangle\right) + \left\langle \psi^{n+\frac{1}{2}}, 1 \right\rangle .$$

- inconditionnellement stable
- en pratique : itération Newton-Raphson

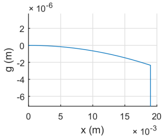
Corde avec contact - exemples

- corde tendue (guitare), paramètres physiques:
  L=1 m, d=0.43 mm, T=180.5 N, μ=1.17.10^{-3} kg.m^{-1}.
  Fréquence fondamentale 196 Hz.
  facteur d'inharmonicité : B=2.10^{-5}
- condition initiale : déplacement (triangle : corde pincée).
- paramètres de pénalisation pour la force de contact:
  K=10^{13}, α=1.5.
- modèle d'amortissement combinant pertes viscoélastiques, thermoélastiques et friction avec l'air ambiant.
- fréquence d'échantillonnage : 2 MHz.

CORDE AVEC CONTACT - EXEMPLES

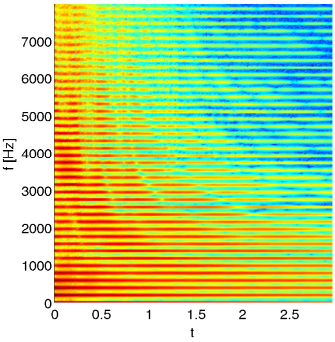
- corde tendue (guitare), paramètres physiques:
  L=1 m, d=0.43 mm, T=180.5 N, μ=1.17.10^{-3} kg.m^{-1}.
  Fréquence fondamentale 196 Hz.
  facteur d'inharmonicité : B=2.10^{-5}
- condition initiale : déplacement (triangle : corde pincée).
- paramètres de pénalisation pour la force de contact:
  K=10^{13}, α=1.5.
- modèle d'amortissement combinant pertes viscoélastiques, thermoélastiques et friction avec l'air ambiant.
- fréquence d'échantillonnage : 2 MHz.

- 2 cas différents:
  - cas du sitar : chevalet courbe de la forme $g(x) = ax^2$.
  - cas de la tampoura : chevalet à deux points modélisé par un contact ponctuel à 6mm du bord.

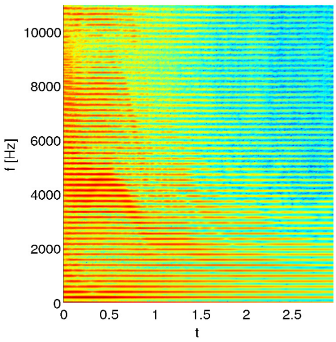


CORDE AVEC CONTACT - EXEMPLES

Chevalet courbe,
cas du sitar

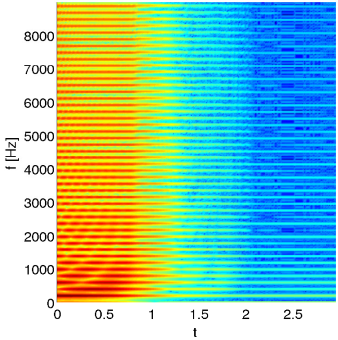


Chevalet ponctuel,
cas de la tampura



Importance de la raideur

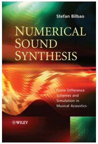
- la raideur (dispersion) est fondamentale pour comprendre le son de ces instruments !
- Simulation sans raideur : $B = \frac{\pi^2 EI}{TL^2} = 0$, cas de la tampoura

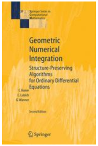


Références utilisées pour ce cours

Livres

- S. Bilbao : Numerical Sound Synthesis: Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics, Wiley, 2009.
- E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner : Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations, Springer, 2006.





Articles

- M. Ducceschi, C. Touzé: Modal approach for nonlinear vibrations of damped impacted plates: Application to sound synthesis of gongs and cymbals, Journal of Sound and Vibration, vol. 344, 313-331, 2015.
- S. Bilbao, O. Thomas, C. Touzé, M. Ducceschi: Conservative numerical methods for the full von Kármán plate equations, Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 31(6), 1948-1970, 2015.
- C. Issanchou, S. Bilbao, J.-L. Le Carrou, C. Touzé et O. Doaré: A modal-based approach for the nonlinear vibration of strings against a unilateral obstacle: simulations and experiments in the pointwise case, soumis au JSV, 2016.