

### Exercice 1 : Calcul de la période des oscillateurs non linéaires et introduction aux méthodes perturbatives

1. Pour faire apparaître les énergies du système il faut multiplier par la vitesse l'équation du mouvement :

$$\ddot{X}\dot{X} = -\frac{\partial V}{\partial X}\dot{X}, \quad (1)$$

ce qui se réécrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{X}^2) = -\frac{d}{dt} (V(X)). \quad (2)$$

En intégrant une fois par rapport au temps il vient

$$\frac{1}{2} \dot{X}^2 = E - V(X), \quad (3)$$

où  $E$  est l'énergie de la trajectoire considérée (le système est conservatif). Cette dernière équation se réécrit :

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{2(E - V(X))}, \quad (4)$$

$$\int dt = \int \frac{dX}{\sqrt{2(E - V(X))}}. \quad (5)$$

Les trajectoires sont des ellipses fermées, on obtient donc une demi-période en intégrant l'équation précédente entre deux points d'annulation de la vitesse (points tournants notés  $X_{t_1}$  et  $X_{t_2}$ ). Il vient alors la formule pour la période :

$$T = 2 \int_{X_{t_1}}^{X_{t_2}} \frac{dX}{\sqrt{2(E - V(X))}}. \quad (6)$$

2. Prenons le cas d'un oscillateur linéaire, les points tournants sont alors donnés par  $X = \pm \frac{\sqrt{2E}}{\omega_0}$ . En utilisant le changement de variables proposé dans l'énoncé, la résolution de l'intégrale fournit la période attendu :  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

3. Dans le cas non linéaire les points tournants sont solution de

$$E = \frac{1}{2} X_t^2 + \frac{1}{4} \varepsilon X_t^4. \quad (7)$$

On peut factoriser les termes sous la racine selon :

$$\sqrt{2(E - V(X))} = \left[ (X_t^2 - X^2) \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon (X_t^2 + X^2) \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

En utilisant de nouveau le changement de variables  $X = X_t \sin \theta$ , il vient :

$$T = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}(1 + \sin^2 \theta)}}. \quad (9)$$

Finalement en utilisant un développement limité au premier ordre et en calculant les termes il vient :

$$T = 2\pi \left( 1 - \frac{3}{8}\varepsilon X_t^2 \right). \quad (10)$$

Cette équation montre donc comment la période des oscillations dépend de l'amplitude. On observe bien que la période diminue (la fréquence augmente), le comportement est raidissant.

4. On cherche une solution en temps à l'équation de Duffing

$$\ddot{X} + X + \varepsilon X^3 = 0. \quad (11)$$

Commençons par introduire un développement simple en puissance de  $\varepsilon$  sous la forme :

$$X(t, \varepsilon) = X_0(t) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) + \dots, \quad (12)$$

Nous savons que les solutions de l'équation (11) existent, nous posons donc comme condition à la solution (12) que celle-ci doit être *uniformément valide en temps*. En reportant le développement et en identifiant les puissances de  $\varepsilon$  il vient :

$$\text{ordre } \varepsilon^0 : \quad \ddot{X}_0 + X_0 = 0, \quad (13)$$

$$\text{ordre } \varepsilon^1 : \quad \ddot{X}_1 + X_1 + X_0^3 = 0, \quad (14)$$

La solution à l'ordre 0 donne  $X_0 = a_0 \cos(t + \phi_0)$ , où  $a_0$  et  $\phi_0$  sont fixés par les conditions initiales. Reportant à l'ordre 1, il vient :

$$\ddot{X}_1 + X_1 = -\frac{3a_0^3}{4} \cos(t + \phi_0) - \frac{a_0^3}{4} \cos(3(t + \phi_0)). \quad (15)$$

La solution générale à cette équation s'écrit comme la somme d'une solution homogène et particulière. Après quelques lignes de calcul on trouve :

$$X_1 = a_1 \cos(t + \phi_1) - \frac{3a_0^3}{8} t \sin(t + \phi_0) + \frac{a_0^3}{32} \cos(3(t + \phi_0)). \quad (16)$$

Cette solution présente un problème majeur : elle n'est pas uniformément valide en temps à cause du terme en  $t \sin t$  qui diverge. Ce terme est appelé *terme séculaire*. Il provient du fait que dans le second membre de l'équation (15), le terme en  $\cos(t + \phi_0)$  peut être interprété comme un terme de forçage dont la fréquence (ici 1) est exactement la fréquence propre de la partie oscillatoire. Or on sait que dans ce cas-là la solution est divergente. Le problème de fond vient du développement que l'on a introduit et qui ne tient pas compte du fait que, dans le cas des oscillations non linéaires, la fréquence des oscillations dépend de l'amplitude. Il faut donc trouver une méthode pour tenir compte de ce fait, corriger l'horloge et pouvoir éliminer les termes résonnants qui produisent des termes séculaires.

4. La méthode des échelles multiples est utilisée pour réaliser ce programme. Avec les différentes échelles de temps introduites, il faut préciser les dérivées par rapport au temps  $t$ , il vient :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial t_0}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial t_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots \quad (17)$$

$$= \partial_{t_0} + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \dots \quad (18)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \partial_{t_0}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_0 t_1} + \dots \quad (19)$$

En reportant et en identifiant il vient :

$$\text{ordre } \varepsilon^0 : \quad \partial_{t_0}^2 X_0 + X_0 = 0, \quad (20)$$

$$\text{ordre } \varepsilon^1 : \quad \partial_{t_0}^2 X_1 + X_1 = -2\partial_{t_0 t_1} X_0 - X_0^3. \quad (21)$$

On observe qu'un terme supplémentaire est présent, dû à la méthode des échelles multiples. Ce terme nous permettra en particulier d'éliminer les termes résonnants. La solution à l'ordre 0 s'écrit :

$$X_0 = A(t_1) e^{it_0} + c.c., \quad (22)$$

où  $c.c.$  désigne "complexe conjuguée". Cette forme est choisie car elle simplifie le traitement des calculs. En reportant dans l'équation à l'ordre 1 il vient :

$$\partial_{t_0}^2 X_1 + X_1 = -2iA' e^{it_0} - (A^3 e^{3it_0} + 3A^2 \bar{A} e^{it_0}) + c.c., \quad (23)$$

où maintenant ( $'$ ) désigne la dérivée par rapport au temps lent  $t_1$ . Afin de trouver une solution uniformément valide en temps, il faut annuler les termes résonnants. Il en résulte la *condition de solvabilité* :

$$-2iA' - 3A^2 \bar{A} = 0. \quad (24)$$

Pour résoudre pour  $A(T_1)$  complexe, on pose  $A(t_1) = \frac{1}{2}a e^{i\phi}$ , où l'amplitude  $a$  et la phase  $\phi$  sont des fonctions de  $t_1$ . En reportant dans la condition de solvabilité, puis en identifiant les parties réelles et imaginaires, on trouve :

$$a' = 0, \quad (25)$$

$$a\phi' - \frac{3}{8}a^3 = 0. \quad (26)$$

La première équation donne  $a = a_0$  qui est une constante par rapport à l'échelle de temps  $t_1$ . La deuxième fournit la phase :

$$\phi = \frac{3}{8}a_0^2 t_1 + \phi_0. \quad (27)$$

On peut désormais résoudre pour  $X_1$ , en ne gardant que la solution particulière il vient  $X_1 = \frac{a_0^3}{64} e^{3i(t_0+\phi)} + c.c.$  On peut reconstruire la solution à cet ordre :

$$X(t, \varepsilon) = a_0 \cos\left(t + \frac{3}{8}a_0^2 \varepsilon t + \phi_0\right) + \frac{\varepsilon}{32} a_0^3 \cos\left(3\left(t + \frac{3}{8}a_0^2 \varepsilon t + \phi_0\right)\right) + o(\varepsilon^2) \quad (28)$$

Ainsi la pulsation des oscillations non linéaires est désormais :

$$\omega_{NL} = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a_0^2, \quad (29)$$

on retrouve bien le résultat de la question 3.

## Exercice 2 : bille sur cerceau, analyse en terme de systèmes dynamiques

1. L'énergie cinétique de la bille vaut :

$$E_c = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta),$$

et l'énergie potentielle :  $E_p = mga(1 - \cos \theta)$ . En appliquant le formalisme de Lagrange on trouve la dynamique du mouvement :

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + a\Omega^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Le premier terme représente la force due à la gravité, le second est la force centrifuge.

2. Le système se réécrit simplement au premier ordre en introduisant la vitesse de rotation  $\phi = \dot{\theta}$ . Les points fixes sont les solutions de  $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$ , ils vérifient tous  $\phi = 0$ . Pour les solutions en  $\theta$  on trouve soit  $\sin \theta = 0$ , *i.e.*  $\theta = 0[\pi]$  (points fixes usuels du pendule) ; soit  $\cos \theta = \frac{g}{a\Omega^2}$ . Ces points fixes n'existent que lorsque  $\Omega \geq \Omega_c$ , avec  $\Omega_c = \sqrt{\frac{g}{a}}$ .

3. La stabilité des points fixes est donnée par les valeurs propres de la matrice jacobienne du système dynamique. L'origine  $\theta = \phi = 0$  a pour valeurs propres  $\lambda$  les solutions de  $\lambda^2 = \Omega^2 - \Omega_c^2$ . Pour  $\Omega \leq \Omega_c$ , ces valeurs propres sont imaginaires pures, le point fixe est un *centre*. Pour  $\Omega \geq \Omega_c$ , les valeurs propres sont réelles et de signe opposé, le point fixe est un *col* (ou *point-selle*). La même analyse en  $\theta = \pm\pi$  montre que ces points sont des cols quel que soit la vitesse de rotation.

Les points fixes apparaissant pour  $\Omega \geq \Omega_c$  en  $\theta$  tel que  $\cos \theta = \frac{g}{a\Omega^2}$  ont pour valeurs propres les solutions de  $\lambda^2 = \Omega^2 \left( \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4} - 1 \right)$ . Les valeurs propres sont donc imaginaires pures, ces nouveaux points fixes sont des *centres*.

En  $\Omega = \Omega_c$ , le système subit une **bifurcation** : le point fixe à l'origine perd sa neutralité et devient instable, au profit de l'apparition des deux nouveaux points fixes neutres autour desquelles existent de nouvelles orbites périodiques, qui représentent les oscillations autour des nouveaux points d'équilibre. Les bassins d'attractions sont délimités alors par des trajectoires homoclines.

4. On se place légèrement à côté du point fixe défini par  $\theta_0$  t.q. :  $\cos \theta_0 = g/a\Omega^2$ , soit :  $\theta = \theta_0 + \psi$ . Pour écrire la dynamique au voisinage du point fixe, on insère  $\theta = \theta_0 + \psi$  dans les équations de la dynamique et on fait un développement de Taylor. Il vient :

$$\ddot{\psi} + \Omega^2 \left( 1 - \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4} \right) \psi = 0.$$

La pulsation des oscillations autour des nouveaux points d'équilibre est donc :  $\omega = \Omega \sqrt{1 - \frac{\Omega_c^4}{\Omega^4}}$ .

5. Quand on rajoute de l'amortissement, les *centres* se transforment en *nœuds stables*, les trajectoires hétéroclines et homoclines disparaissent.

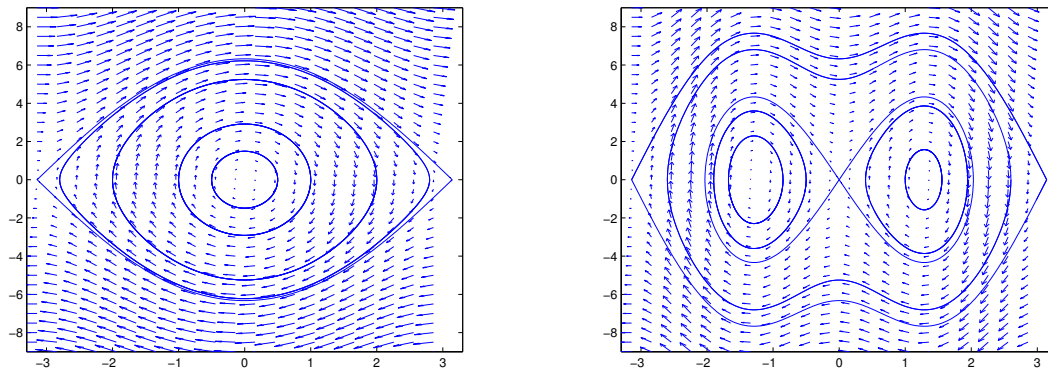


FIGURE 1 – Portraits de phase avant et après la bifurcation.

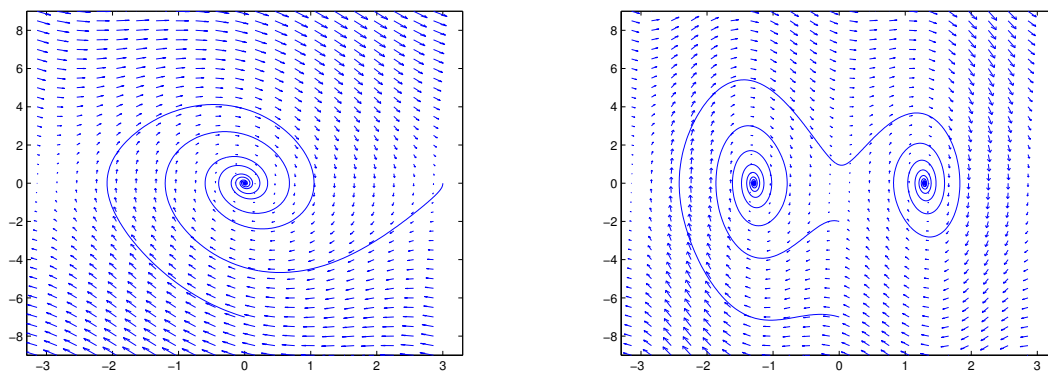


FIGURE 2 – Portraits de phase avant et après la bifurcation, en ajoutant un amortissement visqueux.