

# Réduction de modèle en dynamique non linéaire par la méthode de paramétrisation des variétés invariantes

## Application au cas des structures tournantes

A. Martin<sup>1</sup>, A. Opreni<sup>2</sup>, S. Lian<sup>3</sup>, A. Vizzaccaro<sup>4,3</sup>, L. Salles<sup>5,3</sup>, A. Frangi<sup>2</sup>, C. Touzé<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IMSIA, ENSTA Paris, Institut Polytechnique de Paris, {adrien.martin,cyril.touze}@ensta-paris.fr

<sup>2</sup>Department of Civil and Environmental Engineering, Politecnico di Milano, {andrea.opreni,atilio.frangi}@polimi.it

<sup>3</sup>Vibration University Technology Centre, Imperial College London, s.lian17@imperial.ac.uk

<sup>4</sup>Department of Engineering Mathematics, University of Bristol, alessandra.vizzaccaro@bristol.ac.uk

<sup>5</sup>Center for Design, Manufacturing and Materials, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, l.salles@skoltech.ru

**Résumé** — La méthode de paramétrisation des variétés invariantes permet de proposer des modèles d'ordre réduit efficaces, avec en particulier un calcul direct permettant de passer sans pré-calcul de la discrétisation éléments finis à la dynamique réduite le long des sous-espaces invariants. La méthode générale, permettant le calcul à un ordre arbitraire, est ici appliquée au cas des structures en rotation, avec prise en compte de l'effort centrifuge uniquement. Des résultats sur une poutre encastree-libre en rotation sont montrés et comparés à une solution complète.

**Mots clés** — réduction de modèles, variétés invariantes, systèmes en rotation

## Introduction

Les méthodes de réduction de modèle pour les vibrations non linéaires géométriques utilisent le concept de variétés invariantes depuis les premiers travaux de Shaw et Pierre dans les années 1990, afin de proposer des réductions efficaces le long de sous-espaces dont les trajectoires appartiennent aussi au modèle complet [10], condition *sine qua non* pour obtenir des modèles réduits représentatifs. Ces développements ont conduit à introduire la notion de *mode non linéaire* comme la variété invariante émanant du sous-espace propre linéaire. Différentes procédures de calcul ont été proposées, en utilisant soit une technique issue du théorème de réduction à la variété centrale [7], soit la forme normale [9].

Les développements plus récents ont permis d'étendre ces résultats de deux manières notables. Premièrement en utilisant la méthode de paramétrisation des variétés invariantes, qui permet d'unifier les deux approches mentionnées précédemment en un seul cadre théorique et opérationnel [3]. Deuxièmement, en proposant un calcul direct à partir de la formulation élément fini, alors que les approches précédentes prenaient comme point de départ la dynamique exprimée dans la base modale [13, 12, 4]. Par ailleurs, les méthodes proposées dans [12, 4] permettent des développements automatisés à un ordre arbitraire, ce qui assure la convergence de la méthode jusqu'à des amplitudes vibratoires très grandes.

Le but de cette contribution est d'adapter la méthode générale présentée dans [12] au cas des structures en rotation, en ne prenant en compte que les effets centrifuges dans un premier temps. L'ajout de termes gyroscopiques, qui perturbent directement la solution linéaire, n'est pas considéré ici. La méthode directe de paramétrisation des variétés invariantes à un ordre arbitraire est donc brièvement rappelée, en soulignant les deux types classiques de paramétrisation disponible : le *style fonctionnel* et le *style forme normale*. La méthode est ensuite appliquée au cas d'une poutre encastree-libre en rotation, et les relations amplitude-fréquence (courbes *maitresses* ou *backbone* en anglais) sont comparées à celles obtenues sur le modèle complet avec une méthode d'équilibrage harmonique, pour différentes valeurs de rotation, montrant un bon accord.

## 1 Équation d'un solide en rotation avec non-linéarités géométriques

L'équation générale d'une structure libre en rotation à vitesse constante avec la prise en compte des termes non linéaires géométriques et où les effets gyroscopiques ont été négligés peut se mettre sous la

forme suivante [2, p. 27]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{N}(\Omega)]\mathbf{x}(\Omega, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(\Omega, t), \mathbf{x}(\Omega, t)) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(\Omega, t), \mathbf{x}(\Omega, t), \mathbf{x}(\Omega, t)) = \mathbf{f}_\Omega(\Omega), \quad (1)$$

avec  $\mathbf{x}$  le vecteur des degrés de liberté,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{N}(\Omega)$  la matrice d'assouplissement centrifuge et  $\mathbf{f}_\Omega(\Omega)$  les efforts centrifuges. On suppose le problème discrétisé avec la méthode des éléments finis et on note  $N$  la dimension du problème. De manière générique pour les non-linéarités géométriques, les termes non linéaires  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{h}$  sont polynomiaux de degrés 2 et 3 respectivement.

On suppose dans un premier temps que la vitesse de rotation est constante, si bien qu'il est possible de décomposer le déplacement en une composante statique  $\mathbf{x}_0(\Omega)$  due à l'effort centrifuge, et une composante dynamique  $\mathbf{u}(t)$  représentant les vibrations autour de cet état précontraint, soit :

$$\mathbf{x}(\Omega, t) = \mathbf{x}_0(\Omega) + \mathbf{u}(t). \quad (2)$$

Le déplacement statique dû à la rotation  $\mathbf{x}_0(\Omega)$  est solution de l'équation

$$[\mathbf{K} + \mathbf{N}(\Omega)]\mathbf{x}_0(\Omega) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(\Omega), \mathbf{x}_0(\Omega)) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_0(\Omega), \mathbf{x}_0(\Omega), \mathbf{x}_0(\Omega)) = \mathbf{f}_\Omega(\Omega). \quad (3)$$

En injectant la décomposition (2) dans l'équation générale (1), et en utilisant l'équilibre statique (3) ainsi que les symétries des termes non linéaires, on peut écrire la dynamique de la perturbation  $\mathbf{u}(t)$  sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_t\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 3\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

avec

$$\mathbf{K}_t(\Omega) = [\mathbf{K} + \mathbf{N}(\Omega)] + 2\mathbf{g}(\mathbf{x}_0(\Omega), \mathbf{I}_N) + 3\mathbf{h}(\mathbf{x}_0(\Omega), \mathbf{x}_0(\Omega), \mathbf{I}_N), \quad (5)$$

la matrice de raideur tangente, où on a noté  $\mathbf{I}_N$  la matrice identité de taille  $N$ .

On retrouve bien pour l'équation (4) la forme usuelle de l'équation de la dynamique d'une structure non linéaire en grands déplacements, à la différence que le terme quadratique global admet une composante issue du terme cubique associé à la position d'équilibre statique en rotation.

## 2 Réduction : méthode de paramétrisation des variétés invariantes

Dans cette section, nous rappelons brièvement les principales étapes de la méthode directe de paramétrisation des variétés invariantes à un ordre arbitraire, en reprenant les éléments développés dans [12].

### 2.1 Principe

Le principe général de la méthode consiste tout d'abord à sélectionner les modes maîtres, étant donné que le calcul va permettre de trouver les variétés invariantes associées à ces modes, et qui en sont la continuation au stade non linéaire. Ensuite, l'équation d'invariance [3, p. 11], ne dépendant pas du temps et contenant la géométrie de la variété, est écrite. Des développements asymptotiques sont introduits pour les inconnues qui sont le changement de variable non linéaire et la dynamique réduite. L'introduction de ceux-ci dans l'équation d'invariance conduit aux équations homologiques, écrites ordre par ordre et résolues de manière automatisée.

La méthode présentée dans [12] nécessitent d'écrire l'équation générale (4) au 1<sup>er</sup> ordre, sous la forme suivante :

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{w}} - \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{n}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

avec

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K}_t \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 3\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

La méthode consiste à choisir un sous-ensemble de modes maîtres que l'on note arbitrairement  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ , de valeurs propres  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , où les éléments propres sont associés au problème linéaire usuel à l'ordre 2, soit les solutions de

$$[\mathbf{K}_t - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi_j = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Il est entendu que  $n \ll N$  et en pratique on sélectionnera dans cet article  $n = 1$  dans les applications. On cherche donc à calculer simultanément les variétés invariantes, tangentes aux petites amplitudes aux modes maîtres, ainsi que la dynamique réduite. Cela passe donc en pratique par l'introduction d'une nouvelle variable appelée *coordonnée normale*  $\mathbf{z}$ , de dimension  $2n$  puisque les variétés associées sont de cette dimension (à cause du passage au premier ordre et de la prise en compte du déplacement et de la vitesse comme variables indépendantes). On définit les changements de variables non linéaire inconnus  $\Psi$  et  $\Upsilon$  permettant de passer des coordonnées nodales de la discrétisation éléments finis aux coordonnées normales selon :

$$\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^{N_0} [\Psi(\mathbf{z})]_p = \Phi \mathbf{z} + \sum_{p=2}^{N_0} [\Psi(\mathbf{z})]_p, \quad (9a)$$

$$\mathbf{v} = \Upsilon(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^{N_0} [\Upsilon(\mathbf{z})]_p = \Phi \Lambda \mathbf{z} + \sum_{p=2}^{N_0} [\Upsilon(\mathbf{z})]_p. \quad (9b)$$

Dans ces équations,  $N_0$  est le degré du développement asymptotique, que nous appellerons par abus de langage *ordre*. La notation  $[\bullet]_p$  indique un terme générique d'ordre  $p$ . Dans la dernière équation, nous avons isolé le terme linéaire, qui met en évidence que pour les petites amplitudes, le changement de variable est tangent aux modes linéaires, les termes d'ordre supérieurs venant corriger ces directions afin de trouver la variété invariante associée, dont les courbures sont directement proportionnelles à l'intensité des couplages non-résonnants. Dans (9), on a noté :

$$\Phi = [\phi_1 \dots \phi_n \quad \phi_1 \dots \phi_n], \quad (10)$$

$$\Lambda = \text{diag}[i\omega_1, \dots, i\omega_n, -i\omega_1, \dots, -i\omega_n]. \quad (11)$$

Enfin on définit la dynamique réduite inconnue sous la forme

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{p=1}^{N_0} [\mathbf{f}(\mathbf{z})]_p = \Lambda \mathbf{z} + \sum_{p=2}^{N_0} [\mathbf{f}(\mathbf{z})]_p, \quad (12)$$

où l'on reconnaît le terme linéaire usuel et les corrections non linéaires.

L'équation d'invariance est obtenue en différenciant (9) et en éliminant le temps grâce à (12), ce que l'on peut écrire pour notre problème au premier ordre (6) sous la forme

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{z}} \Upsilon \\ \nabla_{\mathbf{z}} \Psi \end{bmatrix} \mathbf{f} - \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Upsilon \\ \Psi \end{bmatrix} + \mathbf{n}(\Psi, \Upsilon) = \mathbf{0}, \quad (13)$$

La suite du calcul consiste à écrire cette équation d'invariance ordre par ordre, aboutissant aux équations homologues d'ordre  $p$ . Au stade linéaire la solution est connue. Chaque ordre  $p$  peut alors être résolu récursivement et de manière automatique. la difficulté principale réside en l'apparition de relations de résonances non linéaires, qui introduisent des singularités qu'il faut traiter. Selon la manière dont on résout ce problème, on aboutit à deux styles différents de paramétrisation : le *style fonctionnel* et le *style forme normale*.

## 2.2 Types de paramétrisation

L'équation homologue d'ordre  $p$  est par nature sur-déterminée, et contient une infinité de solutions possibles. Cependant deux types majeures de solution font sens dans la résolution [3, p. 15], que nous détaillons ici brièvement.

Le *style fonctionnel* (*graph style* en anglais), consiste à choisir, autant que possible, des valeurs nulles pour les termes non linéaires du changement de variables (9), afin de le simplifier au maximum. En opérant ce choix, on montre que le lien entre les coordonnées modales et normales est alors linéaire, de telle sorte que toute la procédure peut se réécrire en supposant dès le départ une relation fonctionnelle entre les coordonnées maîtres et esclaves. Ce choix étant opéré dès le départ dans les approches utilisant la variété centrale [7], on comprend que cette solution étend la méthode proposée par Shaw et Pierre à un ordre générique.

Le *style forme normale* consiste quant à lui à chercher à simplifier au maximum les termes de la dynamique réduite (12) afin qu'elle contienne le moins de termes possibles. En pratique, on n'y conservera que les termes résonnants, liés aux résonances non linéaires, inévitables en dynamique des structures puisque le spectre conservatif est imaginaire pur. On étend ainsi la méthode de réduction par forme normale directe [6] à un ordre arbitraire. Il est à noter que des variantes de calcul sont possibles, en particulier dans [12], deux styles de forme normale sont établis, une version complexe utilisant des coordonnées complexes tout au long du calcul, et une version dite réelle qui permet de revenir beaucoup plus aisément à une formulation réelle sous forme d'oscillateurs non linéaires.

### 3 Méthodes de résolution

#### 3.1 Système complet

La résolution de référence du système complet est réalisée sur l'équation (4). La recherche des solutions périodique de cette équation est réalisée au moyen de la méthode de l'équilibrage harmonique ou HBM (*Harmonic Balance Method*). Cette dernière propose de chercher la solution de l'équation (4) sous forme d'une série de Fourier tronquée de la forme

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_H} [\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)] \quad (14)$$

L'utilisation d'une telle forme de solution permet le passage à une équation algébrique dont la résolution est plus immédiate que celle d'une équation différentielle. Cette équation algébrique peut être mise sous la forme

$$\mathbf{Z}(\omega) \mathbf{x}_h + \mathbf{f}_h(\omega, \mathbf{x}_h) = \mathbf{0} \quad (15)$$

où  $\mathbf{x}_h$  est le vecteur des nouvelles inconnues harmoniques du système, soit les coefficients  $\mathbf{a}_k$  et  $\mathbf{b}_k$ ;  $\mathbf{Z}$  est la matrice de raideur dynamique construite à partir des matrices structurales  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}_t$ ; enfin,  $\mathbf{f}_h$  représente la projection des termes non linéaires sur la base des fonctions périodiques.

La résolution de l'équation algébrique (15) est réalisée au moyen d'un algorithme de type Newton-Raphson. Afin de faciliter le calcul des termes non linéaires harmoniques, dont l'expression est inconnue dans ce domaine, un méthode d'alternance temps/fréquence AFT [1] est utilisée, qui propose de calculer ces efforts dans le domaine physique, où leur expression est connue, et de les projeter sur la base des fonctions harmoniques au moyen de transformées de Fourier direct et inverse. De plus, afin de construire la solution sur une bande de fréquence donnée, une méthode de continuation de type arc-length est utilisée.

Le code utilisé afin de calculer ces solutions de référence est rédigé en langage Fortran et a été développé au sein du Vibration University Technology Centre de L'Imperial College London.

#### 3.2 Dynamique réduite

La résolution de l'équation réduite (12) est réalisée à l'aide du paquet *BifurcationKit.jl* [11] du langage de programmation *Julia*. Celui-ci utilise une méthode de tir (*shooting method*) [5, p. 449] afin de déterminer les solutions périodiques de l'équation (12). De même que pour le système complet (section 3.1), une méthode de continuation est couplée à cette méthode de résolution afin de construire la solution sur une bande de fréquence donnée.

Les codes utilisés afin d'appliquer les méthodes de paramétrisation (2) ainsi que la résolution de l'équation de la dynamique réduite sont rédigés en langage Julia et ont été développés au Politecnico di Milano.

## 4 Résultats

### 4.1 Modèle d'étude

Le système étudié est une poutre console en rotation. Comme cela est visible sur la figure 1, la poutre est en rotation autour de l'axe  $x$  qui est orthogonal à l'axe de la poutre ce qui permet de justifier la non prise en compte des effets gyroscopiques. De plus, on peut voir que l'axe de rotation est décalé par rapport à l'encastrement de la poutre.

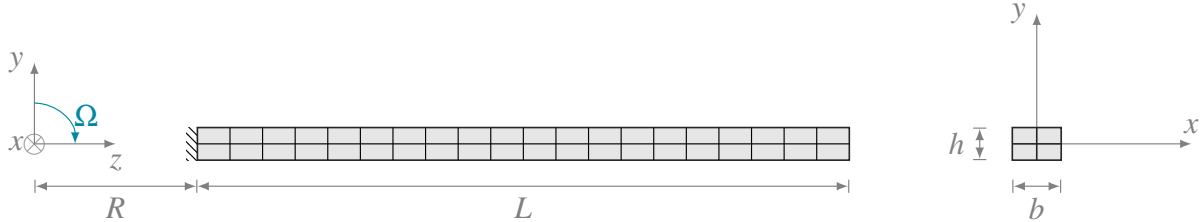


Figure 1 – Schéma de la poutre en rotation considérée.

En terme de dimension, comme cela est donné au tableau 1a, la section de la poutre est choisie rectangulaire afin d'éviter la présence d'une résonance 1 : 1 entre les modes de flexion. Enfin, la poutre est discrétisée à l'aide de 80 éléments de type hexaédrique (voir tableau 1b pour les détails selon les directions). Les deux codes ayant été développés en deux laboratoires distincts, ces derniers utilisent des éléments différents associés aux deux variantes de l'élément hexaédrique quadratique, complet ou serendip. Ainsi, le modèle complet est construit à l'aide d'éléments à 20 noeuds, soit un nombre total de 621 noeuds et 1863 degrés de liberté ( $N = 1863$ ). Le modèle réduit utilise des éléments à 27 noeuds, soit un nombre total de 1025 noeuds et 3075 degrés de liberté ( $N = 3075$ ). Enfin, les propriétés matériau sont données au tableau 1c.

$R$	$L$	$h$	$b$	$N_x$	$N_y$	$N_z$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$ [-]
0.1	1	0.03	0.02	2	2	20	7800	210	0.3
(a) dimensions [m]				(b) discrétisation EF [-]			(c) propriétés matériau		

Tableau 1 – Spécifications retenues pour le modèle étudié.

Une première donnée intéressante lors de l'étude des structures en rotation est l'évolution des pulsations propres en fonction de la vitesse de rotation. Cela est donné pour la première pulsation propre de la poutre étudiée au tableau 2 (calculs réalisés avec *Code\_Aster*) associée au premier mode de flexion, identifié par l'indice  $\bullet_{1F}$ . On observe bien une rigidification globale de ce mode avec la vitesse de rotation ce qui est un résultat attendu.

$\Omega$ [rad/s]	0	26	52	78	104	130
$\omega_{1F}$ [rad/s]	105.65	106.63	109.95	115.12	121.73	129.44

Tableau 2 – Évolution de la pulsation propre du premier mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation.

### 4.2 Résolution et réduction

La méthode de réduction est testée sur sa capacité à reproduire la relation amplitude-fréquence (ou courbe maîtresse pour *backbone curve* en anglais) du mode fondamental de flexion, lorsque l'on augmente la vitesse de rotation. Pour ce faire, on compare le résultat donné par la résolution du modèle complet à celui obtenu en réduisant le système à un mode maître, correspondant à la variété invariante, tangente au mode fondamental pour des petites amplitudes. La résolution du modèle complet est réalisée avec 3 harmoniques ( $N_H = 3$ ), suivant la procédure décrite à la sous-section 3.1. Le temps de calcul associé est d'environ 30 min sur une machine avec 8 cœurs à 2,8 GHz et 16 Go de RAM.

Concernant le modèle d'ordre réduit, une solution est d'abord calculée en utilisant le style forme normale, plus particulièrement en sélectionnant le cas complexe (CNF en anglais pour *Complex Normal Form*). L'ordre 9 ( $N_O = 9$ ) est choisi en tant que bon compromis entre une solution convergée et un temps de calcul rapide. Les temps de calcul associés sont de 2 min pour la détermination de la dynamique réduite, et de 1 min pour sa résolution.

La figure 2 montre les résultats obtenus pour trois vitesses de rotation différentes : 0, 75 et 130 rad/s. L'amplitude représentée pour la courbe maîtresse correspond à l'amplitude de vibration transverse selon l'axe y en bout de poutre, et au centre de la section. On peut tout d'abord observer la forte dépendance de la relation amplitude-fréquence à la vitesse de rotation. En effet, alors que le comportement est raidissant pour les deux premières vitesses de rotation sélectionnées, le comportement est de plus en plus assouplissant jusqu'à l'être complètement pour une vitesse de rotation de 130 rad/s. Cet effet de la rotation sur le comportement non linéaire d'une poutre est classique et a déjà fait l'objet d'études antérieures, cf. par exemple [8].

Concernant la comparaison entre modèle complet et réduit, on peut remarquer un accord très satisfaisant sans rotation, qui semble cependant se détériorer lorsque l'on augmente la vitesse de rotation. Des calculs supplémentaires en augmentant l'ordre du modèle réduit devrait permettre de corriger ces erreurs. En effet, étant donné que le comportement de la courbe maîtresse est clairement unimodal et ne fait pas apparaître de boucles de résonance interne, seule l'approximation de la variété à un ordre insuffisant peut expliquer la divergence des solutions. Il est par ailleurs à noter que les deux solutions (réduite et référence) ont été obtenues avec deux codes et deux types d'éléments différents, aussi les erreurs numériques associées aux approximations lors de l'utilisation des solveurs de valeurs propres et des règles d'intégration numérique peuvent expliquer les différences observées.

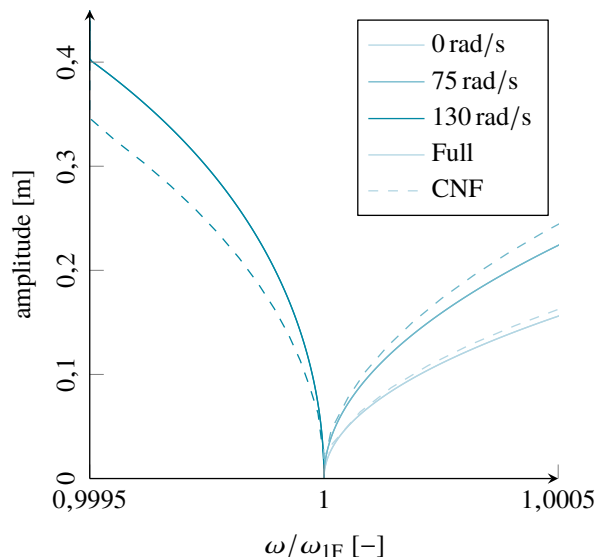


Figure 2 – Comparaison des résultats sur les modèles complet et réduit pour différentes vitesses de rotation.

Comme résultat complémentaire, nous montrons figure 3 la différence que l'on peut trouver sur une relation amplitude-fréquence selon le style de paramétrisation choisi, en particulier nous comparons le style fonctionnel au style forme normale. Le cas sans rotation pour une poutre console a déjà été étudié dans [12], et a mis en évidence que la variété invariante du mode fondamental présente un point de repliement qui n'est pas dû à une résonance interne. A cause de l'existence de ce point de repliement, le style fonctionnel, qui suppose une relation fonctionnelle entre les variables modales maîtres et esclaves, n'est pas en mesure de calculer la variété au-delà du point de repliement puisque l'on perd la correspondance et la relation fonctionnelle n'est plus possible. A contrario, le style forme normale, qui propose une relation complètement non linéaire entre les variables maîtres et esclaves, est en mesure de passer au-delà du point de repliement.

Enfin, avec l'augmentation de la vitesse de rotation et l'assouplissement qui en résulte, on observe que le point de repliement disparaît. Cependant, même sans la présence de ce point, on observe tout de

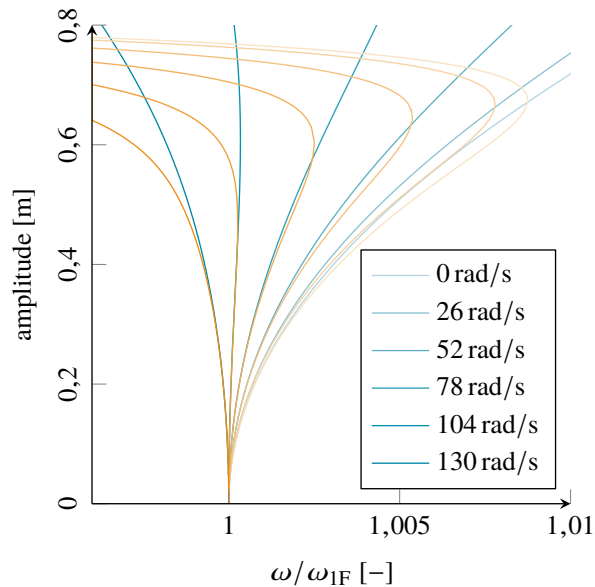


Figure 3 – Évolutions des solutions réduites en fonction de la rotation et comparaison des deux styles de paramétrisation.  $\square$  : style forme normale ;  $\square$  : style fonctionnel

même une différence notable entre la solution en style fonctionnel et la solution en style forme normale.

## Conclusion

La méthode directe de paramétrisation des variétés invariantes a été appliquée au cas des structures en rotation, en se limitant dans un premier temps à la prise en compte de l'effet centrifuge et en négligeant les efforts gyroscopiques. La méthode de paramétrisation fournit des modèles réduits efficaces et d'ordre arbitraire, ce qui permet d'en vérifier la convergence lorsque la forme des variétés invariantes devient complexe en augmentant l'amplitude. Par ailleurs il est possible de choisir différents styles de paramétrisation. La méthode a été appliquée au cas d'une poutre encastree-libre en rotation. Les résultats numériques mettent clairement en évidence l'assouplissement du comportement dû à la prise en compte de la rotation. La réduction à un mode maître permet de retrouver le comportement donné par le modèle complet. Des petites différences sont observées lorsque l'on augmente la vitesse de rotation, et des investigations futures permettront d'en comprendre clairement l'origine. Enfin il a été montré que l'assouplissement dû à la rotation permet aussi de faire disparaître le point de repliement de la variété invariante associée au mode fondamental. Au niveau des temps de calcul, les gains obtenus avec l'utilisation du modèle réduit sont spectaculaires, en faisant un outil de calcul prédictif d'excellente qualité.

## Références

- [1] T. M. Cameron and J. H. Griffin. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :149–154, 03 1989. [doi:10.1115/1.3176036](https://doi.org/10.1115/1.3176036).
- [2] T. Gmür. *Dynamique des Structures : Analyse modale numérique des systèmes mécaniques*. EPFL Press, 2012.
- [3] A. Haro, M. Canadell, J.-L. Figueras Romero, A. Luque, and J. Mondelo. *The Parameterization Method for Invariant Manifolds From Rigorous Results to Effective Computations*, volume 195. Springer, 01 2016. [doi:10.1007/978-3-319-29662-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-29662-3).
- [4] S. Jain and G. Haller. How to compute invariant manifolds and their reduced dynamics in high-dimensional finite element models. *Nonlinear Dynamics*, Oct 2021. [doi:10.1007/s11071-021-06957-4](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06957-4).
- [5] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley, 1995. [doi:10.1002/9783527617548](https://doi.org/10.1002/9783527617548).

- [6] A. Opreni, A. Vizzaccaro, A. Frangi, and C. Touzé. Model Order Reduction based on Direct Normal Form : Application to Large Finite Element MEMS Structures Featuring Internal Resonance. *Nonlinear Dynamics*, 105 :1237–1272, 2021. doi:[10.1007/s11071-021-06641-7](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06641-7).
- [7] S. Shaw and C. Pierre. Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1) :170–173, 1991. doi:[10.1016/0022-460X\(91\)90412-D](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90412-D).
- [8] O. Thomas, A. Sénéchal, and J.-F. Deü. Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams. *Nonlinear Dynamics*, 86(2) :1293–1318, 2016. doi:[10.1007/s11071-016-2965-0](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2965-0).
- [9] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2) :77–101, 2004. doi:[10.1016/j.jsv.2003.04.005](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.04.005).
- [10] C. Touzé, A. Vizzaccaro, and O. Thomas. Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures : a review of nonlinear techniques. *Nonlinear Dynamics*, 105 :1141–1190, 2021. doi:[10.1007/s11071-021-06693-9](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06693-9).
- [11] R. Veltz. BifurcationKit.jl, July 2020. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02902346>.
- [12] A. Vizzaccaro, A. Opreni, L. Salles, A. Frangi, and C. Touzé. High order direct parametrisation of invariant manifolds for model order reduction of finite element structures : application to large amplitude vibrations and uncovering of a folding point, 2021. arXiv:2109.10031.
- [13] A. Vizzaccaro, Y. Shen, L. Salles, J. Blahoš, and C. Touzé. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 384 :113957, 2021. doi:[10.1016/j.cma.2021.113957](https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113957).