



XIX^e Festival d'astronomie de Fleurance

FIL NOIR ASTROMATH



L'univers comme un système dynamique

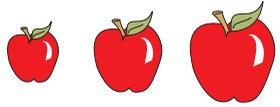
Jérôme Perez

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA
Laboratoire Univers & Théories de l'observatoire de Meudon

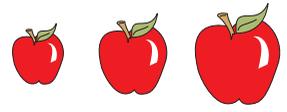
Aout 2009



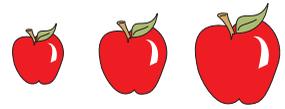
Dynamique de l'Univers homogène isotrope



Espacetemps et Gravitation

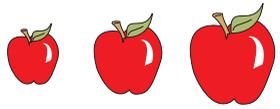


Gravitation



Gravitation

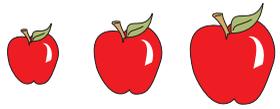
 Isaac Newton (fin XVII^{ème}) : *La gravitation est une force mystérieuse,*



Gravitation

🍏 Isaac Newton (fin XVII^{ème}) : *La gravitation est une force mystérieuse,*

🍓 Lagrange aurait pu voir l'aspect géométrique,



Gravitation

🍏 Isaac Newton (fin XVII^{ème}) : *La gravitation est une force mystérieuse,*

🍓 Lagrange aurait pu voir l'aspect géométrique,

🍋 Albert Einstein, 1915 : Théorie de la relativité générale,

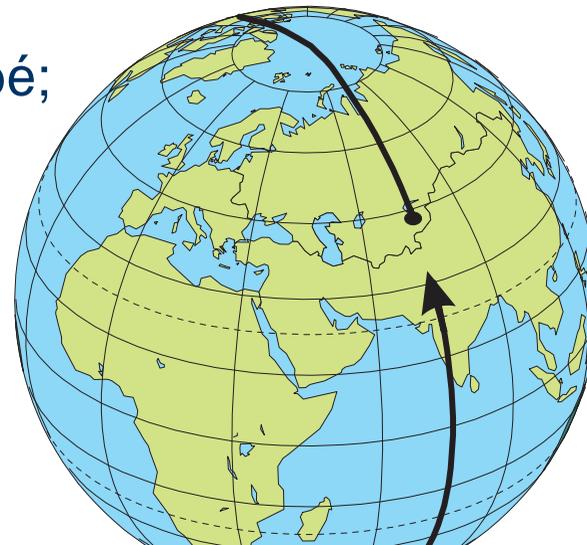
⇒ Principe d'équivalence

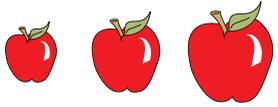
⇒ Espacetemps = combinaison $4D$ de l'espace et du temps qui permet de décrire l'Univers et ses composants;

⇒ Matière et énergie façonnent l'espacetemps;

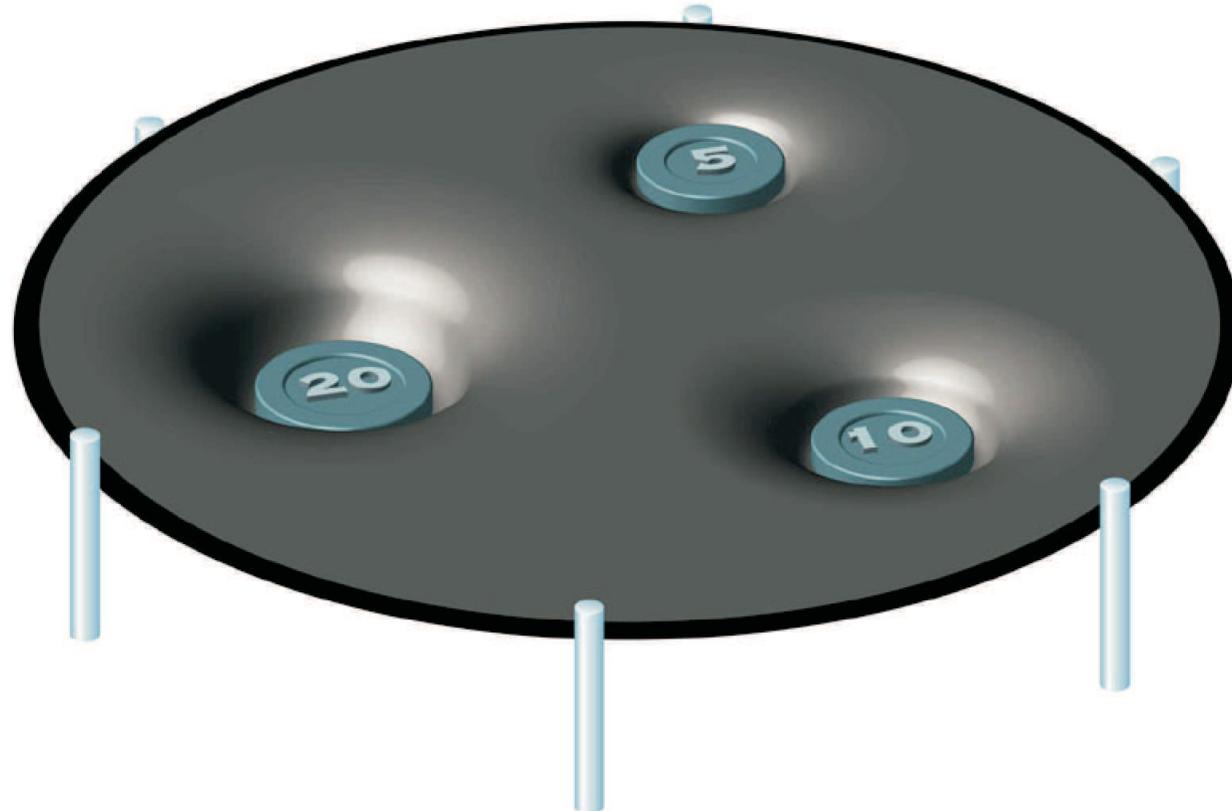
⇒ L'espacetemps peut lui-même être courbé;

⇒ Mouvements géodésiques

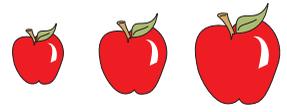




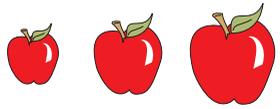
La matière déforme l'espace-temps



plus il y a de masse plus celui-ci est déformé



Le principe d'équivalence

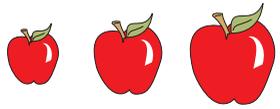


Le principe d'équivalence

Albert est dans
une cabine d'ascenseur
au repos



Il peut mettre
en évidence
un champ gravitationnel



Le principe d'équivalence

Albert est dans
une cabine d'ascenseur
au repos



Il peut mettre
en évidence
un champ gravitationnel

Le démon de Maxwell coupe le câble ...



Le principe d'équivalence

Albert est dans
une cabine d'ascenseur
au repos



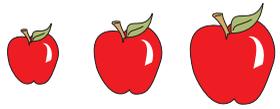
Il peut mettre
en évidence
un champ gravitationnel

Le démon de Maxwell coupe le câble ...



Aucune expérience ne permet
plus de savoir qu'il est
toujours dans
un champ gravitationnel

$$m_i \mathbf{a} = m_g \mathbf{g}$$



Le principe d'équivalence

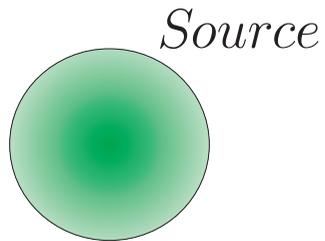
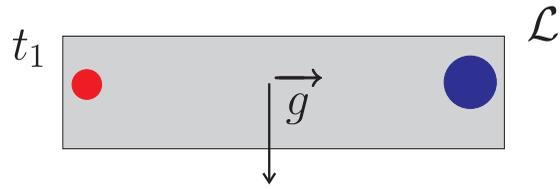
Tout ceci n'est que local ...
Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !

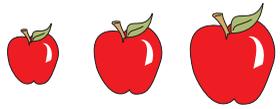


Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !

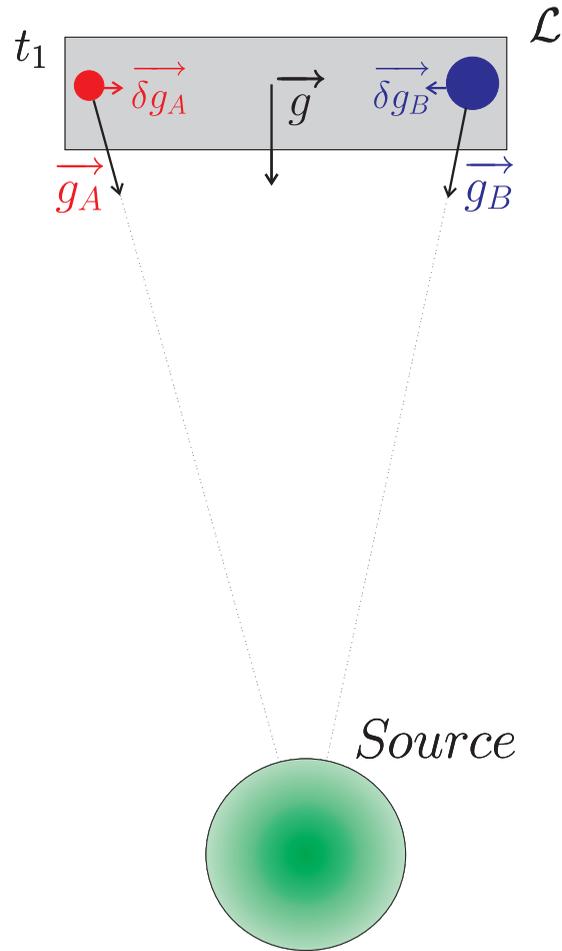


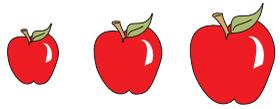


Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !

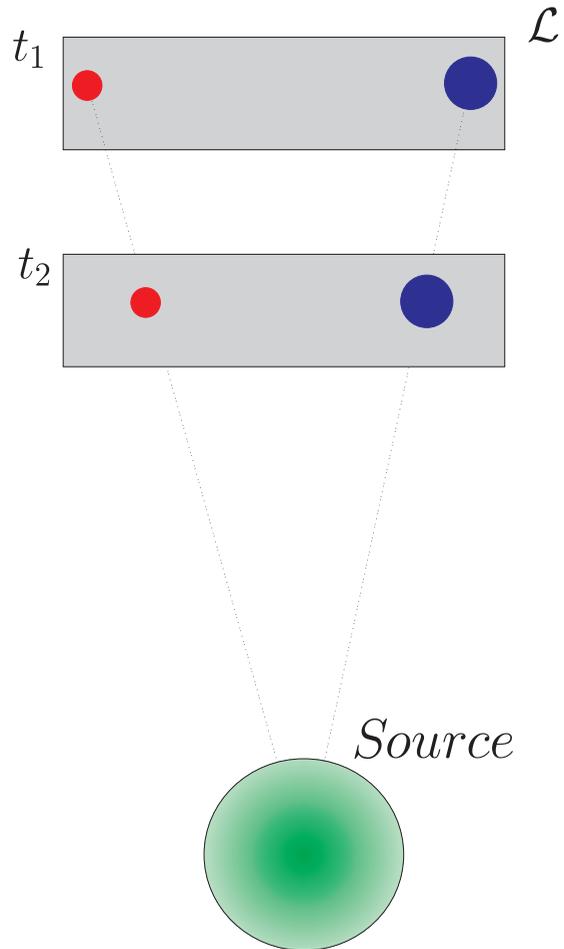


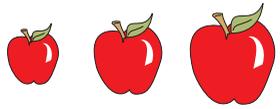


Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !

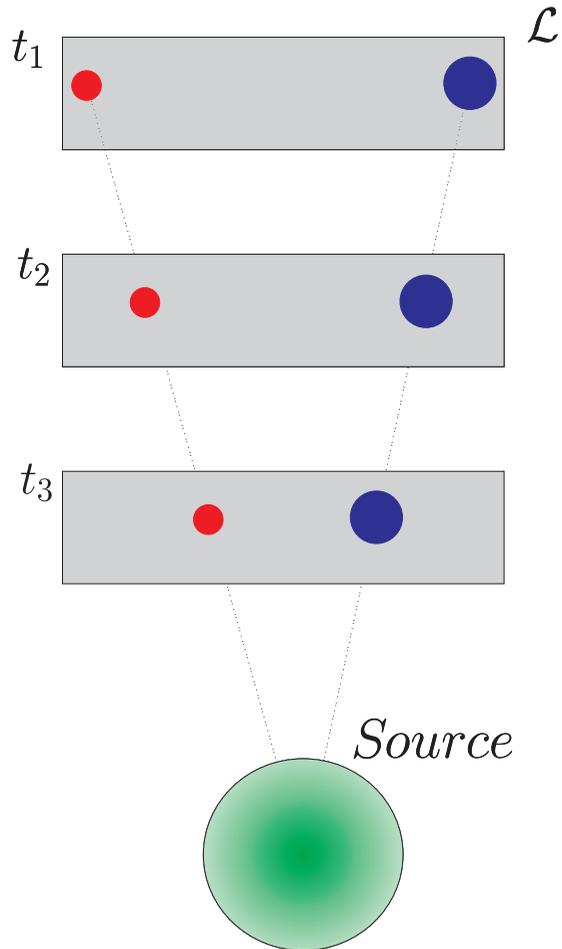




Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !

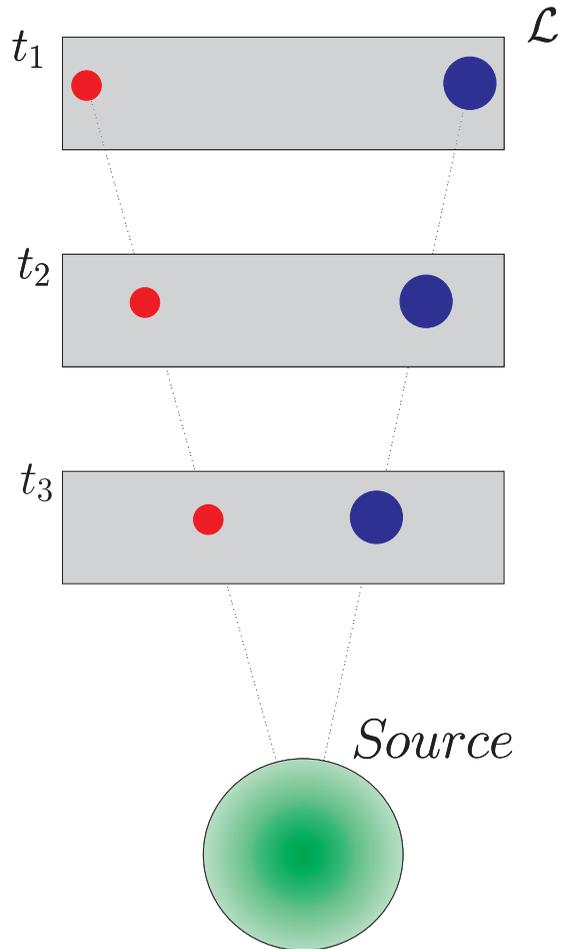


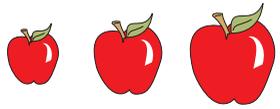


Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

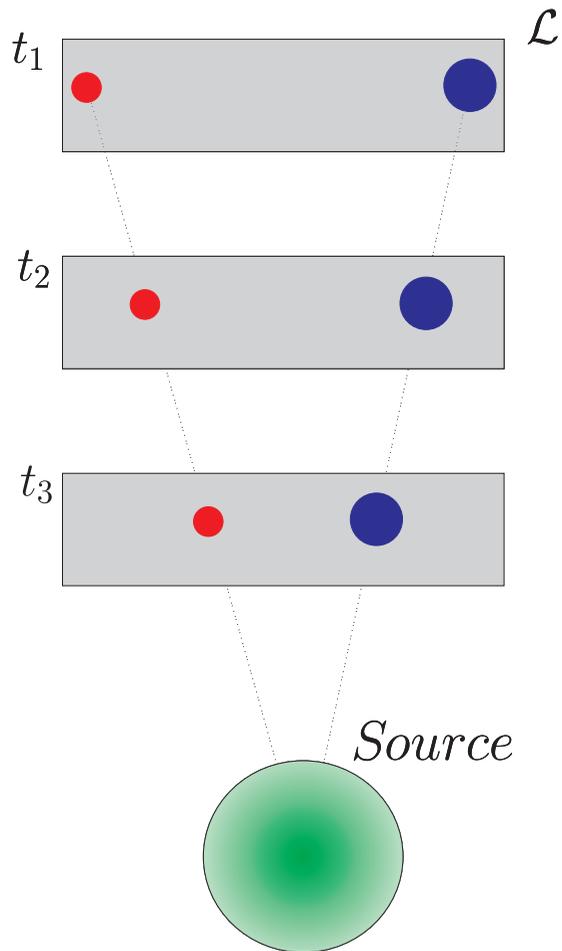
Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !





Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...
Si l'ascenseur \mathcal{L} était très grand !

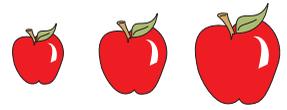


Un champ de gravitation peut être localement compensé par une accélération absolue

ou

D'un point de vue local, il n'y a pas de différence entre une accélération absolue et un champ de gravitation

Principe d'équivalence *faible*



Les relativités



Les relativités

Un repère galiléen global associé à une variété plate $\dim = 4$.

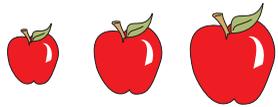
→ PRR : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

$$x^\mu = [x^0, x^1, x^2, x^3]^T = [ct, x, y, z]^T$$

$$\eta_{00} = 1, i = 1, 2, 3 \quad \eta_{ii} = -1$$

$$\text{Si } \mu \neq \nu \quad \eta_{\mu\nu} = 0$$



Les relativités

Un repère galiléen global associé à une variété plate $\dim = 4$.

→ PRR : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

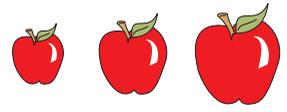
$$\begin{aligned} x^\mu &= [x^0, x^1, x^2, x^3]^T = [ct, x, y, z]^T \\ \eta_{00} &= 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad \eta_{ii} = -1 \\ \text{Si } \mu &\neq \nu \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \end{aligned}$$

Principe d'équivalence : A cause des effets gravitationnels on ne peut pas trouver un référentiel galiléen global

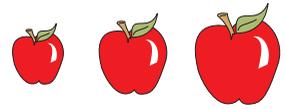
→ PRG : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\mu)$$

Espacetemps = variété riemannienne $\dim = 4$

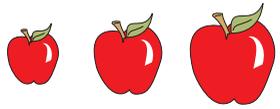


Equations d'Einstein



Equations d'Einstein

Physique classique : Équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$



Equations d'Einstein

Physique classique : Équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$

Relativité générale : Équations d'Einstein

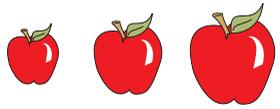
$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Tenseur d'Einstein

Tenseur énergie-impulsion

Géométrie de l'espacetemps

Contenu de l'espacetemps



Equations d'Einstein

Physique classique : Équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$

Relativité générale : Équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Tenseur d'Einstein	Tenseur énergie-impulsion
Géométrie de l'espacetemps	Contenu de l'espacetemps

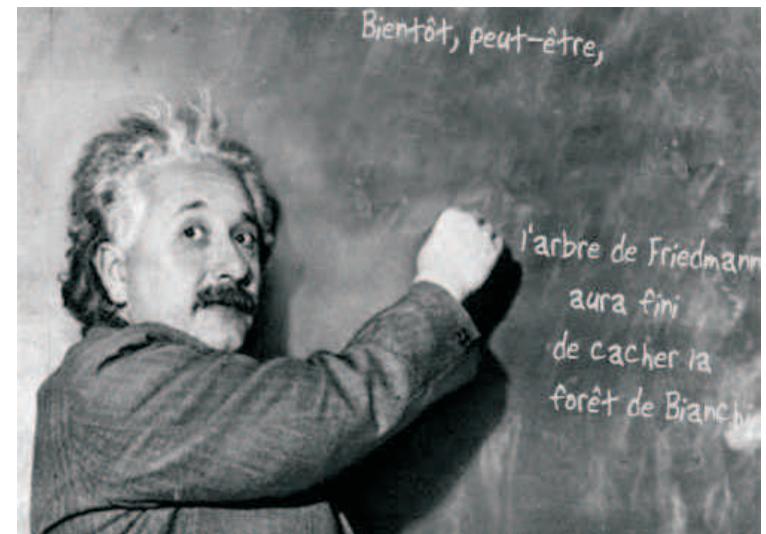
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\lambda,\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu,\lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\lambda}^{\lambda}$$

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$$

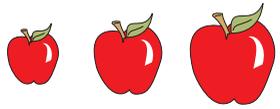
$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu})g^{\nu\sigma}$$

Principe d'équivalence : $\psi \Leftrightarrow g_{\mu\nu}$





Solution de Friedmann-Lemaître



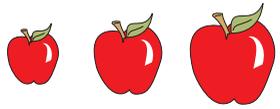
Solution de Friedmann-Lemaître

Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$R(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure



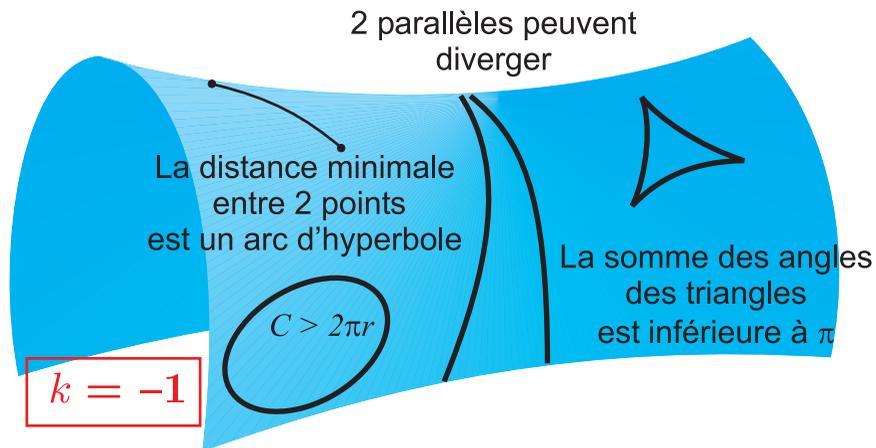
Solution de Friedmann-Lemaître

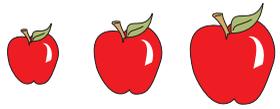
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$R(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





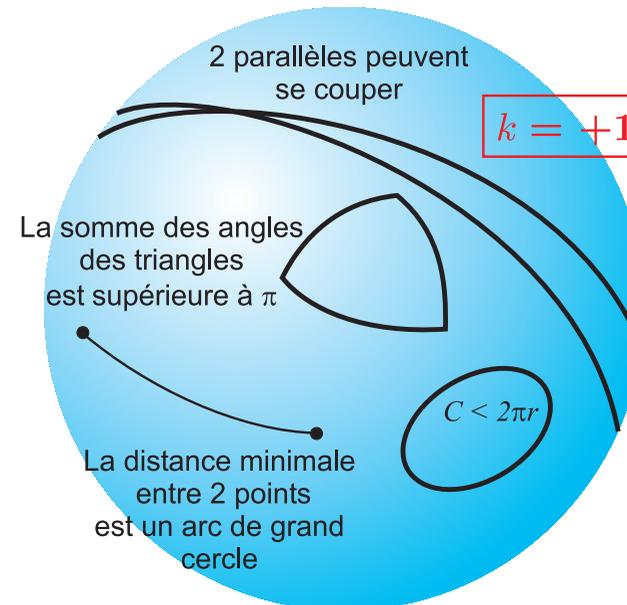
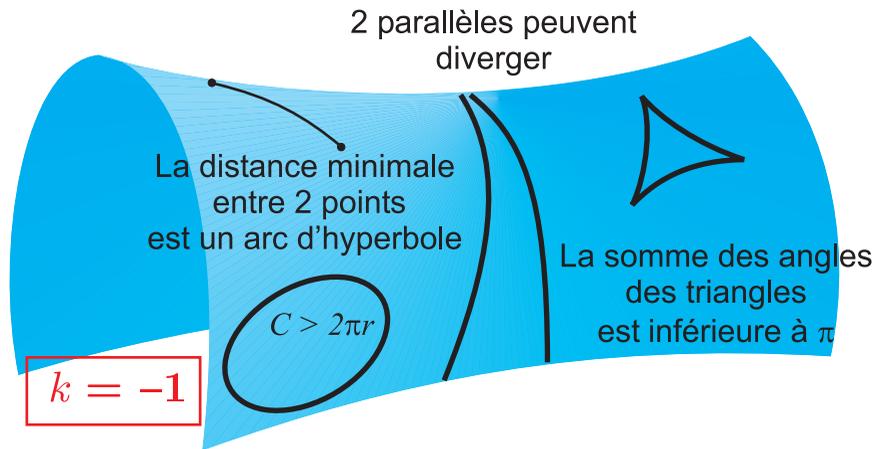
Solution de Friedmann-Lemaître

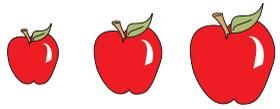
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

$R(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





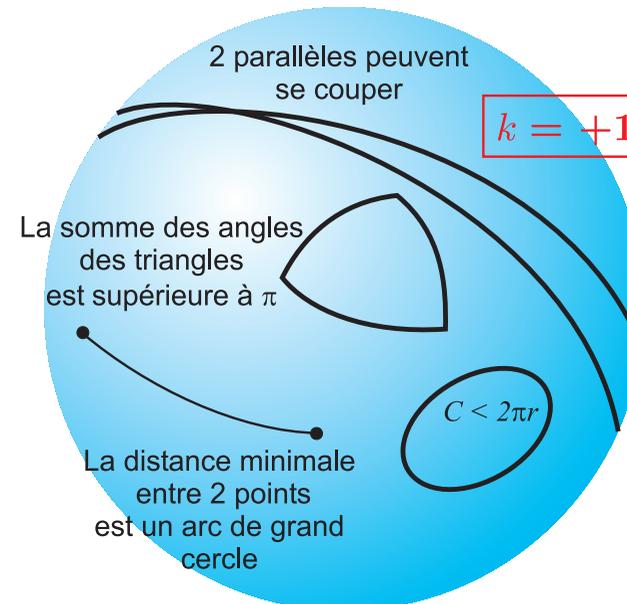
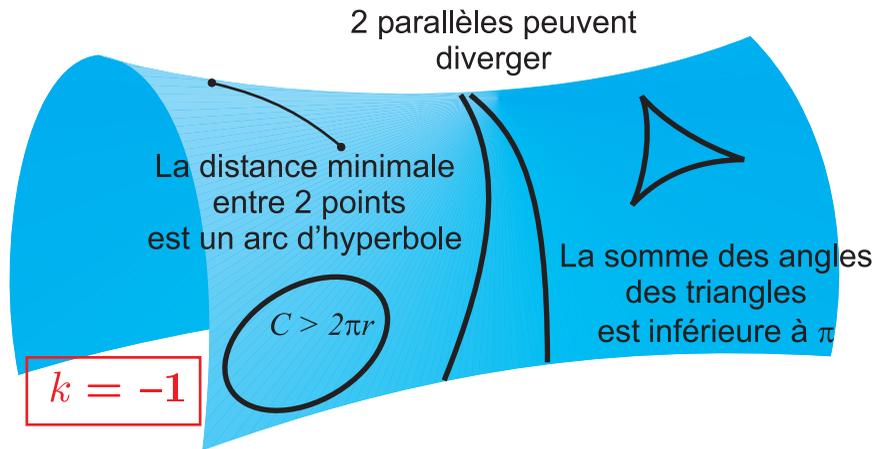
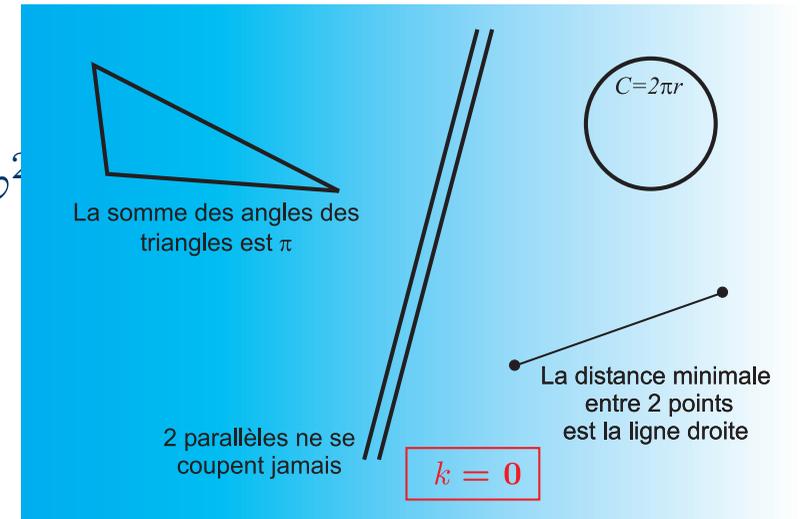
Solution de Friedmann-Lemaître

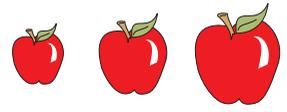
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

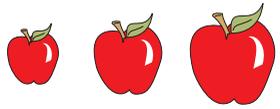
$R(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





Equations de Friedmann



Equations de Friedmann

Equations d'Einstein →

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_2)$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d[(\epsilon + P) R^3]}{dt} \quad (F_3)$$

conservation de l'énergie impulsion



Equations de Friedmann

Equations d'Einstein →

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_2)$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d[(\epsilon + P) R^3]}{dt} \quad (F_3)$$

conservation de l'énergie impulsion

 $(F_2) + (\Lambda = 0) : \left(R > 0, \frac{dR}{dt} > 0, \frac{d^2 R}{dt^2} < 0 \right) \Rightarrow R \text{ concave} \Rightarrow \text{Big-Bang}$



Equations de Friedmann

Equations d'Einstein →

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (F_2)$$

$$R^3 \frac{dP}{dt} = \frac{d[(\epsilon + P) R^3]}{dt} \quad (F_3)$$

conservation de l'énergie impulsion

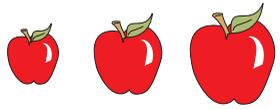
 $(F_2) + (\Lambda = 0) : \left(R > 0, \frac{dR}{dt} > 0, \frac{d^2 R}{dt^2} < 0 \right) \Rightarrow R \text{ concave} \Rightarrow \text{Big-Bang}$

 $(F_1) + (\Lambda = 0) : \text{Constante de Hubble} : H = \dot{R}/R$

Densité critique : $\epsilon_o = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1,1 \times 10^{-29} \left[\frac{cH}{75 \text{ km/s/Mpc}} \right]^2 \text{ g/cm}^3$

Mesurer k ?

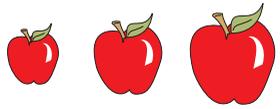
$$3k = 8\pi G R^2 (\epsilon - \epsilon_o)$$



Quelques solutions pour $\Lambda = 0$

Fluide parfait barotropique $P = (\Gamma - 1) \epsilon$
Temps conforme : $d\tau = dt/R$

Γ	k	0	1	-1
1	Poussières	$\propto t^{2/3}$	$\propto (1 - \cos \tau)$	$\propto (1 - \cosh \tau)$
4/3	Rayonnement	$\propto t^{1/2}$	$\propto \sin \tau$	$\propto \sinh \tau$



Quelques solutions pour $\Lambda = 0$

Fluide parfait barotropique $P = (\Gamma - 1) \epsilon$
Temps conforme : $d\tau = dt/R$

Γ	k	0	1	-1
1	Poussières	$\propto t^{2/3}$	$\propto (1 - \cos \tau)$	$\propto (1 - \cosh \tau)$
4/3	Rayonnement	$\propto t^{1/2}$	$\propto \sin \tau$	$\propto \sinh \tau$

Quand $t \rightarrow 0$, les solutions dégènèrent $\approx k = 0$



Quelques solutions pour $\Lambda = 0$

Fluide parfait barotropique $P = (\Gamma - 1) \epsilon$
Temps conforme : $d\tau = dt/R$

Γ	k	0	1	-1
1	Poussières	$\propto t^{2/3}$	$\propto (1 - \cos \tau)$	$\propto (1 - \cosh \tau)$
4/3	Rayonnement	$\propto t^{1/2}$	$\propto \sin \tau$	$\propto \sinh \tau$

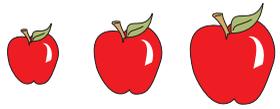
Quand $t \rightarrow 0$, les solutions dégènèrent $\approx k = 0$

Si $\Gamma = 0$ (Champ scalaire, vide ...) $R(t) \propto e^{\kappa t}$ avec $\kappa = 40$: Inflation !!!



Quel est le destin des univers de Friedmann ?





Mise en forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\epsilon} = -3H (P + \epsilon) \end{array} \right.$$

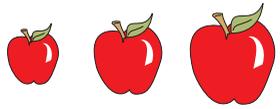


Mise en forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\epsilon} = -3H (P + \epsilon) \end{array} \right.$$

, on pose

$$\left[\begin{array}{l} H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{d(\ln R)}{dt} \\ q(t) = -\frac{\ddot{R}}{R} \frac{1}{H^2} = -\frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2} \\ \Omega_m(t) = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2}, \quad \Omega_k(t) = -\frac{k}{R^2 H^2} \\ \text{et } \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H^2} \end{array} \right.$$



Mise en forme

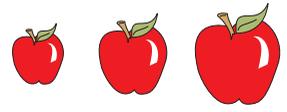
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{\epsilon} = -3H (P + \epsilon) \end{array} \right.$$

, on pose

$$\left[\begin{array}{l} H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{d(\ln R)}{dt} \\ q(t) = -\frac{\ddot{R}}{R} \frac{1}{H^2} = -\frac{\ddot{R} R}{\dot{R}^2} \\ \Omega_m(t) = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2}, \quad \Omega_k(t) = -\frac{k}{R^2 H^2} \\ \text{et } \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H^2} \end{array} \right.$$

et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (F1.1) \\ \frac{4\pi G}{3H^2} (\epsilon + 3P) = q + \Omega_\Lambda \quad (F2.1) \\ \dot{\epsilon} = -3H (P + \epsilon) \quad (F3.1) \end{array} \right.$$



Equation d'état



Equation d'état

$$\text{Barotropique : } P = \omega \epsilon = (\Gamma - 1) \epsilon = \frac{(w - 1)}{3} \epsilon$$

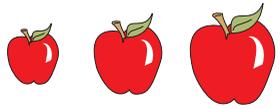


Equation d'état

$$\text{Barotropique : } P = \omega \epsilon = (\Gamma - 1) \epsilon = \frac{(w - 1)}{3} \epsilon$$

ω	-1	0	1/3	2/3	1
Etat	Vide quantique	gaz de poussières incohérentes	gaz parfait de photons	gaz parfait monoatomique	matière raide

$$\omega \in [-1, 1] , \quad \Gamma \in [0, 2] , \quad w \in [-2, 4]$$



Equation d'état

$$\text{Barotropique : } P = \omega \epsilon = (\Gamma - 1) \epsilon = \frac{(w - 1)}{3} \epsilon$$

ω	-1	0	1/3	2/3	1
Etat	Vide quantique	gaz de poussières incohérentes	gaz parfait de photons	gaz parfait monoatomique	matière raide

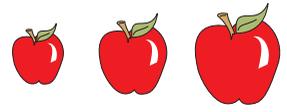
$$\omega \in [-1, 1], \quad \Gamma \in [0, 2], \quad w \in [-2, 4]$$

Equations de Friedmann barotropiques :

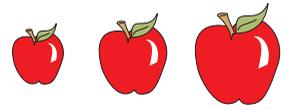
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ q = \frac{\Omega_m (1 + 3\omega)}{2} - \Omega_\Lambda \\ (\ln \epsilon)' = -3(1 + \omega) \end{array} \right.$$



$$' = \frac{d}{d \ln R}$$

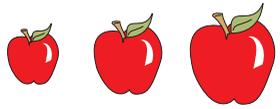


Quelques manipulations ...



Quelques manipulations ...

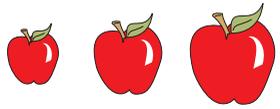
 Première équation :



Quelques manipulations ...

 Première équation :

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

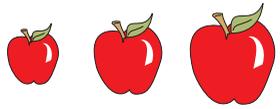


Quelques manipulations ...

🍏 Première équation :

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

mais $[\ln(\epsilon)]' = -3(1 + \omega)$



Quelques manipulations ...

🍏 Première équation :

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

mais $[\ln(\epsilon)]' = -3(1 + \omega)$ et

$$\begin{aligned} [\ln H]' &= [\ln \dot{R} - \ln R]' = \frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} - 1 = \frac{\frac{d \ln \dot{R}}{dt}}{\frac{d \ln R}{dt}} - 1 = \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} - 1 = -q - 1 \\ &= \frac{(1 + 3\omega)}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda - 1 \end{aligned}$$



Quelques manipulations ...

🍏 Première équation :

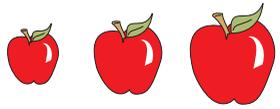
$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

mais $[\ln(\epsilon)]' = -3(1 + \omega)$ et

$$\begin{aligned} [\ln H]' &= [\ln \dot{R} - \ln R]' = \frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} - 1 = \frac{\frac{d \ln \dot{R}}{dt}}{\frac{d \ln R}{dt}} - 1 = \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} - 1 = -q - 1 \\ &= \frac{(1 + 3\omega)}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda - 1 \end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = (1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda$$



Quelques manipulations ...

 Première équation :

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

mais $[\ln(\epsilon)]' = -3(1 + \omega)$ et

$$\begin{aligned} [\ln H]' &= [\ln \dot{R} - \ln R]' = \frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} - 1 = \frac{\frac{d \ln \dot{R}}{dt}}{\frac{d \ln R}{dt}} - 1 = \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} - 1 = -q - 1 \\ &= \frac{(1 + 3\omega)}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda - 1 \end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = (1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda$$

 Deuxième équation :



Quelques manipulations ...

🍏 Première équation :

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

mais $[\ln(\epsilon)]' = -3(1 + \omega)$ et

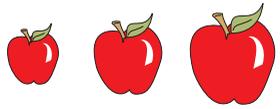
$$\begin{aligned} [\ln H]' &= [\ln \dot{R} - \ln R]' = \frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} - 1 = \frac{\frac{d \ln \dot{R}}{dt}}{\frac{d \ln R}{dt}} - 1 = \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} - 1 = -q - 1 \\ &= \frac{(1 + 3\omega)}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda - 1 \end{aligned}$$

on a donc

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = (1 + 3\omega)(\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda$$

🍌 Deuxième équation :

$$\frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_\Lambda} = [\ln \Omega_\Lambda]'$$



Quelques manipulations ...

🍏 Première équation :

$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = [\ln \Omega_m]' = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

mais $[\ln(\epsilon)]' = -3(1 + \omega)$ et

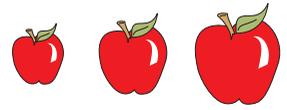
$$\begin{aligned} [\ln H]' &= [\ln \dot{R} - \ln R]' = \frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} - 1 = \frac{\frac{d \ln \dot{R}}{dt}}{\frac{d \ln R}{dt}} - 1 = \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} - 1 = -q - 1 \\ &= \frac{(1 + 3\omega)}{2} \Omega_m - \Omega_\Lambda - 1 \end{aligned}$$

on a donc

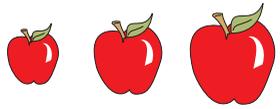
$$\frac{\Omega'_m}{\Omega_m} = (1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda$$

🍌 Deuxième équation :

$$\frac{\Omega'_\Lambda}{\Omega_\Lambda} = [\ln \Omega_\Lambda]' = \left[\ln \left(\frac{\Lambda}{3} \right) - 2 \ln H \right]' = \Omega_m (1 + 3\omega) - 2\Omega_\Lambda + 2$$

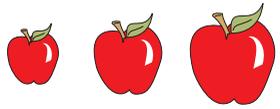


Le système dynamique



Le système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ \Omega'_m = \Omega_m [(1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda] \\ \Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda [\Omega_m (1 + 3\omega) + 2(1 - \Omega_\Lambda)] \end{array} \right.$$



Le système dynamique

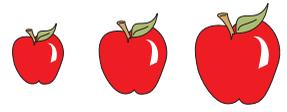
$$\begin{cases} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ \Omega'_m = \Omega_m [(1 + 3\omega) (\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda] \\ \Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda [\Omega_m (1 + 3\omega) + 2(1 - \Omega_\Lambda)] \end{cases}$$

en posant $w = 1 + 3\omega$ variant dans l'intervalle $[-2, 4]$

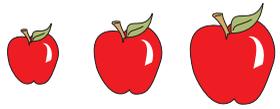
$$X' = F_w(X) \quad \text{avec } X = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top \quad \text{et } F_w : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{array}$$

où l'on a posé pour plus de concision dans l'écriture

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x [w(x - 1) - 2y] \\ f_2(x, y) = y [wx + 2(1 - y)] \end{cases}$$



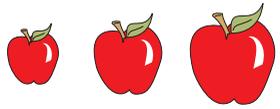
Les équilibres



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :



Les équilibres

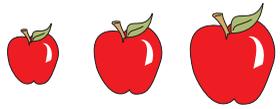
Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

🍏 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

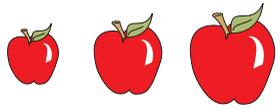
Il existe 3 solutions :

🍏 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

🍌 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x - 1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x - 1)(w - 2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

🍏 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

🍌 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x - 1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x - 1)(w - 2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

🍏 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

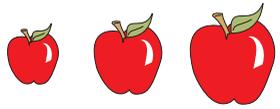
$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

🍌 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x - 1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x - 1)(w - 2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :

🍋 L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^T$ et $\Omega_k = 0$,



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^T = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^T$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x - 1)$ et

$$\frac{1}{2}w(x - 1)(w - 2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :

 L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^T$ et $\Omega_k = 0$,

 L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^T$ et $\Omega_k = 0$,



Les équilibres

Equilibre : $X^* = [x, y]^\top = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top$ tels que $F_w(X^*) = 0$ soit

$$\begin{cases} x [w(x - 1) - 2y] = 0 \\ y [wx + 2(1 - y)] = 0 \end{cases}$$

Il existe 3 solutions :

 Si $x = 0$, alors $2y(1 - y) = 0$ ce qui laisse 2 possibilités

$$x = 0 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou bien} \quad x = 0 \text{ et } y = 1$$

 Si $x \neq 0$, alors $y = \frac{1}{2}w(x - 1)$ et

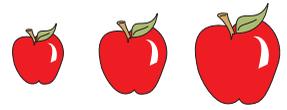
$$\frac{1}{2}w(x - 1)(w - 2) = 0 \quad \text{soit } x = 1 \text{ et donc } y = 0.$$

Les équilibre de la dynamique des univers de Friedmann sont :

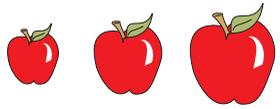
 L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$ et $\Omega_k = 0$,

 L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^\top$ et $\Omega_k = 0$,

 L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^\top$ et $\Omega_k = 1$.

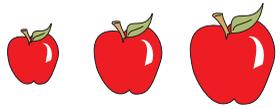


L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^T$



L'univers de de Sitter : $X_1^ = [0, 1]^T$*

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{ Univers plat} \end{array} \right.$$

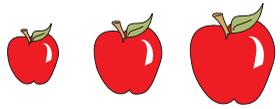


L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{ Univers plat} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G w}{3}\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{R} = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R}{dt}$$



L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{ Univers plat} \end{array} \right.$$

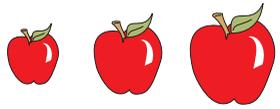
Equations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi Gw}{3}\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{R} = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R}{dt}$$

soit

$$\ln \dot{R} = \ln(\alpha R) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \dot{R} = \alpha R \quad \text{et} \quad R(t) = R(0) e^{\alpha t}$$



L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 3H^2 \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{ Univers plat} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann :

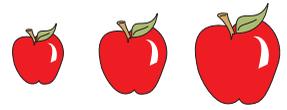
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G w}{3}\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{R} = \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R}{dt}$$

soit

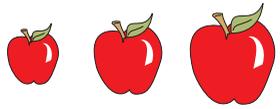
$$\ln \dot{R} = \ln(\alpha R) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \dot{R} = \alpha R \quad \text{et} \quad R(t) = R(0) e^{\alpha t}$$

univers incr e en perpétuelle inflation exponentielle !

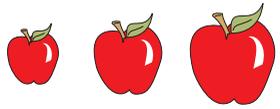


L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^T$



L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{constamment critique} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{Univers plat} \end{array} \right.$$

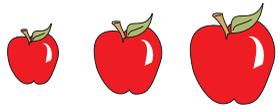


L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{constamment critique} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{Univers plat} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} w\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = -\frac{w}{2} \frac{\dot{R}}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R^{-\frac{w}{2}}}{dt}$$



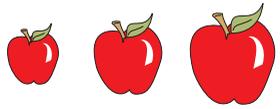
L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{constamment critique} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{ Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{ Univers plat} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} w\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = -\frac{w}{2} \frac{\dot{R}}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R^{-\frac{w}{2}}}{dt}$$

soit $\dot{R} = \alpha R^{-\frac{w}{2}}$ c'est-à-dire $R^{\frac{w}{2}} dR = \alpha dt$. Deux familles de solutions sont possibles en fonction de w :



L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^T$

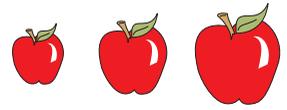
$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \text{constamment critique} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 : \text{Univers plat} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann :

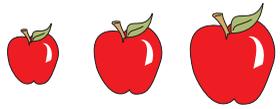
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} w\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = -\frac{w}{2} \frac{\dot{R}}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R^{-\frac{w}{2}}}{dt}$$

soit $\dot{R} = \alpha R^{-\frac{w}{2}}$ c'est-à-dire $R^{\frac{w}{2}} dR = \alpha dt$. Deux familles de solutions sont possibles en fonction de w :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R(t) = R(0) e^{\alpha t} & \text{si } w = -1 \quad \approx \text{ de Sitter} \\ R(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+3w)}} & \text{si } w > -1 \quad \text{Big-Bang puis expansion décélérée} \end{array} \right.$$



L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^T$



L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière (équilibre?)} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{ Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -R^2 H^2 < 0 : \text{ Univers hyperbolique} \end{array} \right.$$



L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière (équilibre?)} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{ Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -R^2 H^2 < 0 : \text{ Univers hyperbolique} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} w\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{R} = 0 \text{ soit } R(t) = \dot{R}(0)t + R(0)$$



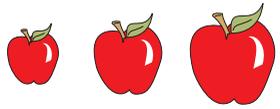
L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière (équilibre?)} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{ Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -R^2 H^2 < 0 : \text{ Univers hyperbolique} \end{array} \right.$$

Equations de Friedmann

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} w\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{R} = 0 \text{ soit } R(t) = \dot{R}(0)t + R(0)$$

depuis le Big-Bang , expansion linéaire (très lente au début ...) , modèles exotiques ?



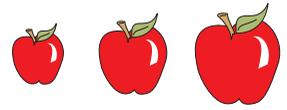
L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^T$

$$\left[\begin{array}{l} \Omega_m = \frac{8\pi G\epsilon}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 0 \text{ et donc } P = 0 : \text{ Pas de matière (équilibre?)} \\ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0 : \text{ Pas de constante cosmologique} \\ \Omega_k = -\frac{k}{R^2 H^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = -R^2 H^2 < 0 : \text{ Univers hyperbolique} \end{array} \right.$$

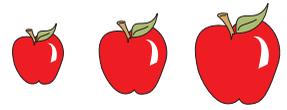
Equations de Friedmann

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} w\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{R}}{R} = 0 \text{ soit } R(t) = \dot{R}(0)t + R(0)$$

depuis le Big-Bang , expansion linéaire (très lente au début ...) , modèles exotiques ?

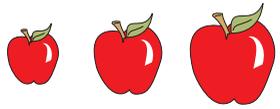


Le destin des univers de Friedmann



Le destin des univers de Friedmann

$$X' = F_{\omega}(X)$$



Le destin des univers de Friedmann

$X' = F_\omega(X)$: Dynamique linéarisée

$$Y' = DF(X)(X^*) Y + o(\|X - X^*\|) \quad \text{avec } Y = X - X^*$$



Le destin des univers de Friedmann

$X' = F_\omega(X)$: Dynamique linéarisée

$$Y' = DF(X)(X^*) Y + o(\|X - X^*\|) \quad \text{avec } Y = X - X^*$$

matrice jacobienne

$$DF(X)(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} -w - 2y + 2wx & -2x \\ wy & wx + 2 - 4y \end{bmatrix}_{X=X^*}$$



Le destin des univers de Friedmann

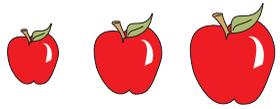
$X' = F_\omega(X)$: Dynamique linéarisée

$$Y' = DF(X)(X^*) Y + o(\|X - X^*\|) \quad \text{avec } Y = X - X^*$$

matrice jacobienne

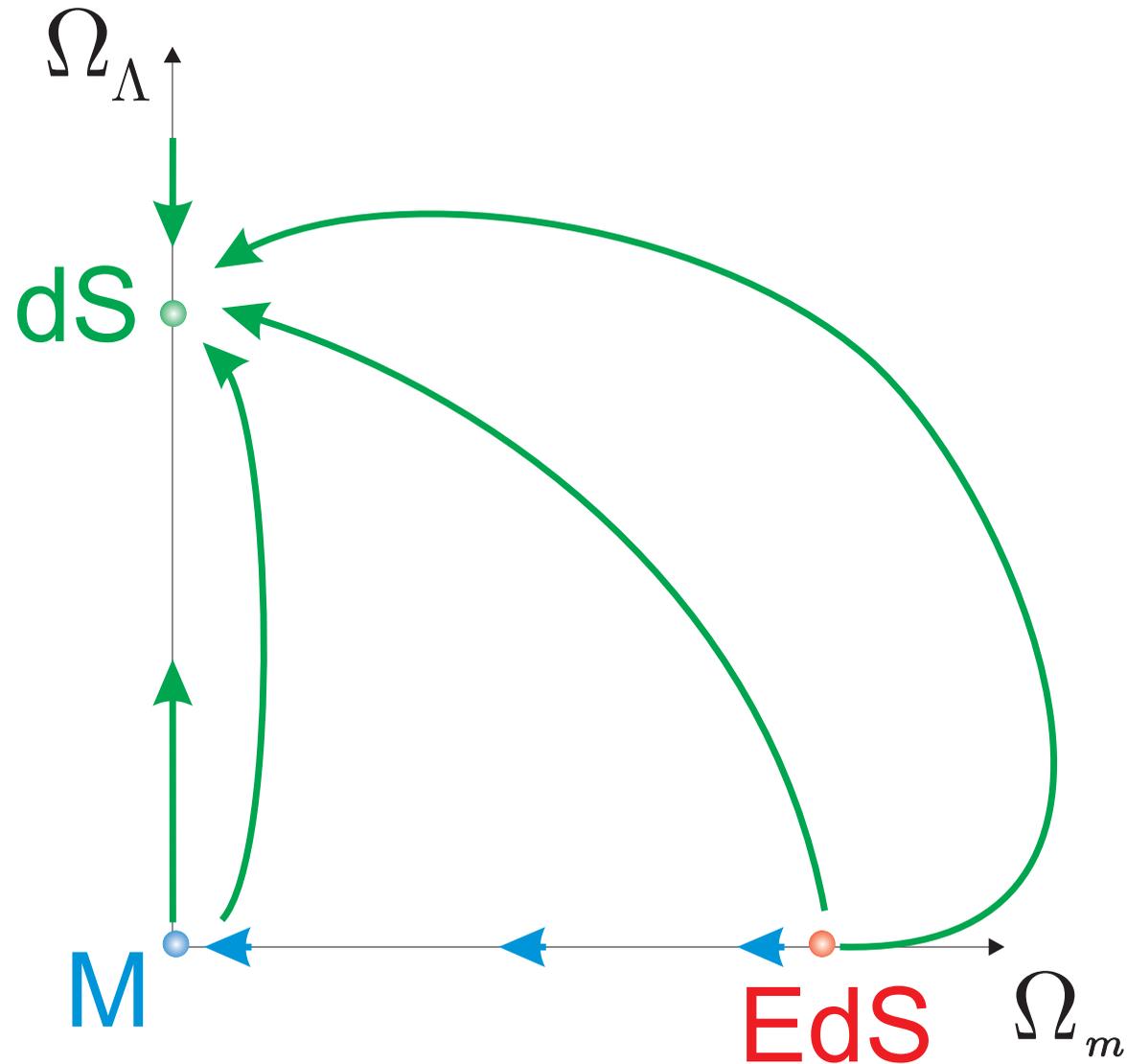
$$DF(X)(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{X=X^*} = \begin{bmatrix} -w - 2y + 2wx & -2x \\ wy & wx + 2 - 4y \end{bmatrix}_{X=X^*}$$

$$\text{valeurs propres de } DF(X)(X^*) : \begin{cases} -3(1 + \omega) \text{ et } -2 & \text{pour } X_1^* : (\text{dS}) \\ 3(1 + \omega) \text{ et } -(1 + 3\omega) & \text{pour } X_2^* : (\text{EdS}) \\ (1 + 3\omega) \text{ et } 2 & \text{pour } X_3^* : (\text{M}) \end{cases}$$



Le destin des univers de Friedmann

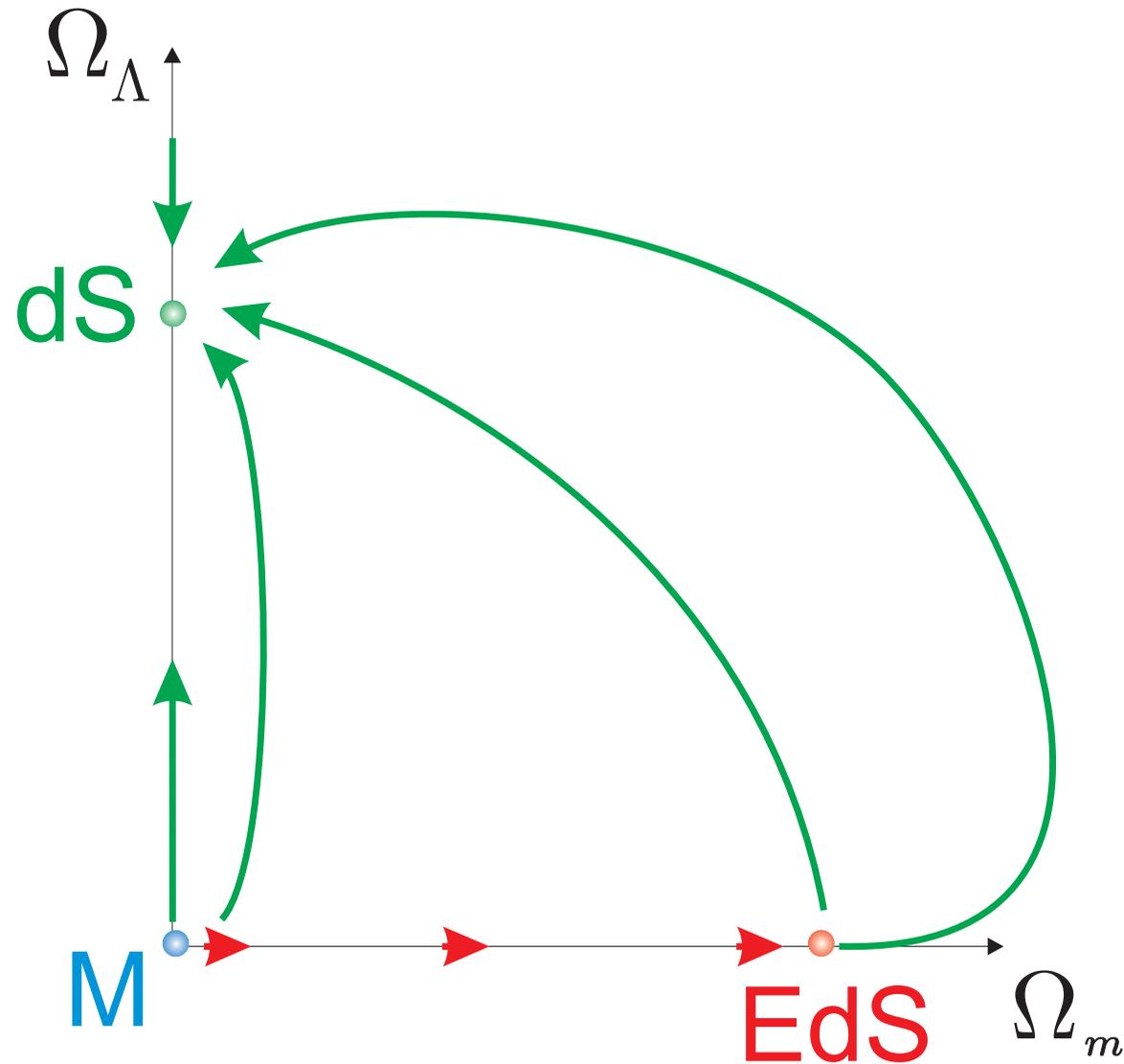
avec de la matière exotique : $\omega \in] - 1, -1/3[$

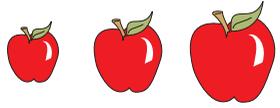




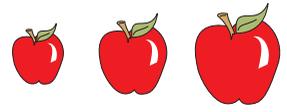
Le destin des univers de Friedmann

avec de la matière ordinaire : $\omega \in] - 1/3, 1[$

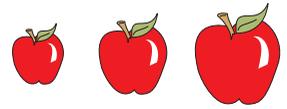




Dynamique de l'Univers homogène anisotrope



Introduction



Introduction

 1915 A. Einstein : Théorie du champ de gravitation



Introduction

 **1915** A. Einstein : Théorie du champ de gravitation

 **1922-27** A. Friedmann et G. Lemaître : Solution homogène & isotrope (Big Bang \approx 1960)



Introduction

 **1915** A. Einstein : Théorie du champ de gravitation

 **1922-27** A. Friedmann et G. Lemaître : Solution homogène & isotrope (Big Bang \approx 1960)

 **1965-66** R. Penrose et S. Hawking : Toutes les solutions sont singulières !



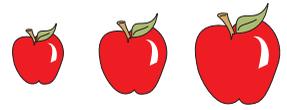
Introduction

 **1915** A. Einstein : Théorie du champ de gravitation

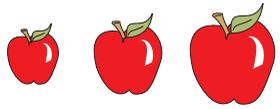
 **1922-27** A. Friedmann et G. Lemaître : Solution homogène & isotrope (Big Bang \approx 1960)

 **1965-66** R. Penrose et S. Hawking : Toutes les solutions sont singulières !

 **1969** V. Belinski, L. Khalatnikov et E. Lifchitz : La singularité pourrait être chaotique si l'Univers est anisotrope !



Variété homogène 3+1



Variété homogène 3+1

\mathbb{E} Homogène : $\forall (x, y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}, \exists \mathcal{I}, y = \mathcal{I}(x)$

L'ensemble des \mathcal{I} forme un groupe \mathbb{G} .

\mathcal{I} est unique et \mathbb{G} agit sur tout \mathbb{E} : action transitive simple.

Exception : Kantowski-Sachs

\mathbb{G} caractérise \mathbb{E}



Variété homogène 3+1

Réf. synchrone : $ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2$, $\mathbb{E} = \Sigma_t$, $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(t)$

Formes de base invariantes par \mathbb{G} : $e_j^i dx^j$

$$C_{ab}^c = (\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) e_a^j e_b^i \quad (\text{Constantes de structure})$$

$$\sigma_a := e_a^i \partial_i \quad \text{vérifie } [\sigma_a, \sigma_b] = C_{ab}^c \sigma_c$$

Les C_{ab}^c caractérisent \mathbb{G} .



Variété homogène 3+1

Réf. synchrone : $ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2$, $\mathbb{E} = \Sigma_t$, $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(t)$

Formes de base invariantes par \mathbb{G} : $e_j^i dx^j$

$$C_{ab}^c = (\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) e_a^j e_b^i \quad (\text{Constantes de structure})$$

$$\sigma_a := e_a^i \partial_i \quad \text{vérifie} \quad [\sigma_a, \sigma_b] = C_{ab}^c \sigma_c$$

Les C_{ab}^c caractérisent \mathbb{G} .

Décomposition $C_{ab}^c := \varepsilon_{abd} N^{dc} + \delta_b^c A_a - \delta_a^c A_b \Rightarrow N^{ab}$ symétrique

Classes d'équivalence
d'Univers Homogènes

\equiv

Classes d'équivalence
de N^{ab} et A_b tels que $N^{ab} A_b = 0$

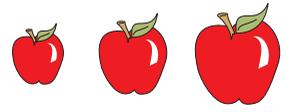
$$N^{ab} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad A_b = [a, 0, 0]$$



Classification de Bianchi

Classe A : $a = 0$, Classe B : $a \neq 0$

	n_1	n_2	n_3	a	Modèle
0 est valeur propre triple de N	0	0	0	0	B_I
	0	0	0	\forall	B_V
0 est valeur propre double de N	1	0	0	0	B_{II}
	0	1	0	\forall	B_{IV}
0 est valeur propre simple de N	1	1	0	0	B_{VII_o}
	0	1	1	\forall	B_{VII_a}
	1	-1	0	0	B_{VI_o}
	0	1	-1	$\neq 1$	B_{VI_a}
	0	1	-1	1	B_{III}
0 n'est pas valeur propre de N	1	1	1	0	B_{IX}
	1	1	-1	0	B_{VIII}



Equations d'Einstein



Equations d'Einstein

Élément de longueur dans l'Univers

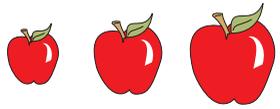
$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2 = \gamma(\tau) \omega^i \omega^j - L^2(\tau) d\tau^2$$

$$\gamma(\tau) = \text{diag} \left(e^{A_i(\tau)} \right) \quad dt = L(\tau) d\tau$$

Formes de base [Mc Callum,79]:

$$\omega_i = \omega_i(dx_i, e^{x_i}, \cos(x_i), n_i)$$

⇒ Etat de courbure de l'Univers (Tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$)



Equations d'Einstein

Elément de longueur dans l'Univers

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2 = \gamma(\tau) \omega^i \omega^j - L^2(\tau) d\tau^2$$

$$\gamma(\tau) = \text{diag} \left(e^{A_i(\tau)} \right) \quad dt = L(\tau) d\tau$$

Formes de base [Mc Callum,79]:

$$\omega_i = \omega_i(dx_i, e^{x_i}, \cos(x_i), n_i)$$

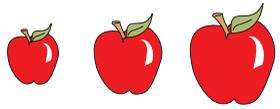
⇒ Etat de courbure de l'Univers (Tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$)

Contenu matériel

Fluide barotrope : $P = (\Gamma - 1) \epsilon$

⇒ Tenseur Energie-Impulsion $T_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad \chi := \frac{8\pi G}{c^4}$$



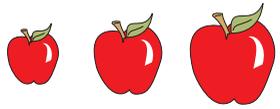
Formalisme BKL

e.g. [Belinski, Khalatnikov et Lifchitz, 69]

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + E_m = H \\ \chi(2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} = A_1'' + (n_1 e^{A_1})^2 - (n_2 e^{A_2} - n_3 e^{A_3})^2 \\ \chi(2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} = A_2'' + (n_2 e^{A_2})^2 - (n_3 e^{A_3} - n_1 e^{A_1})^2 \\ \chi(2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} = A_3'' + (n_3 e^{A_3})^2 - (n_1 e^{A_1} - n_2 e^{A_2})^2 \end{array} \right.$$

$$L^2 = e^{A_1 + A_2 + A_3}, \quad dt = L d\tau$$

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^3 A_i' A_j' \quad E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i}$$
$$E_m = -4\chi\epsilon V^2 \quad ' = \frac{d}{d\tau}$$



Solutions analytiques



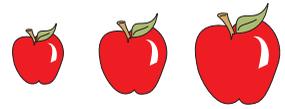
: L'univers de Kasner : B_1



: La transition Kasnerienne : B_2



Solution fondamentale : B_1 vide



Solution fondamentale : B_1 vide

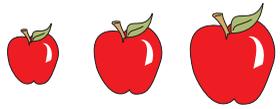
Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)



Solution fondamentale : B_1 vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ E_m \\ E_m \\ E_m \end{array} \right. = \begin{array}{l} E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array} \right.$$

B_1 vide : $n_1 = n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = 0 \\ A_1'' = A_2'' = A_3'' = 0 \end{array} \right.$$



Solution fondamentale : B_1 vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

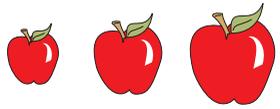
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array} \right.$$

B_1 vide : $n_1 = n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = 0 \\ A_1'' = A_2'' = A_3'' = 0 \end{array} \right.$$

Les solutions sont immédiates, attendu que $V \neq 0$

$$A_i'' = 0 \Rightarrow V \frac{d}{dt} \left(V \frac{dA_i}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \exists k_i \in \mathbb{R}, \quad \dot{A}_i = \frac{k_i}{V}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

On se souvient que $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, ainsi $\ln(V) = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + A_3)$ et

$$\frac{d \ln V}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2V}$$

soit

$$\dot{V} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} := \frac{\Omega}{2} \in \mathbb{R} \text{ soit } V = \frac{\Omega}{2}t + \Omega_o$$



Solution fondamentale : B_1 vide

On se souvient que $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, ainsi $\ln(V) = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + A_3)$ et

$$\frac{d \ln V}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2V}$$

soit

$$\dot{V} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} := \frac{\Omega}{2} \in \mathbb{R} \text{ soit } V = \frac{\Omega}{2}t + \Omega_o$$



Hypothèse : $V(t=0) = 0 \Rightarrow \Omega_o = 0$ donc

$$V = \frac{\Omega}{2}t \Rightarrow \dot{A}_i = \frac{2k_i}{\Omega t} \Rightarrow A_i = \ln \left(\lambda_i t^{\frac{2k_i}{\Omega}} \right) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

On se souvient que $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, ainsi $\ln(V) = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + A_3)$ et

$$\frac{d \ln V}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2V}$$

soit

$$\dot{V} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} := \frac{\Omega}{2} \in \mathbb{R} \text{ soit } V = \frac{\Omega}{2}t + \Omega_o$$

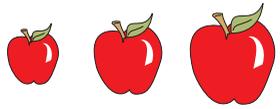


Hypothèse : $V(t=0) = 0 \Rightarrow \Omega_o = 0$ donc

$$V = \frac{\Omega}{2}t \Rightarrow \dot{A}_i = \frac{2k_i}{\Omega t} \Rightarrow A_i = \ln \left(\lambda_i t^{\frac{2k_i}{\Omega}} \right) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et comme $A_i = \ln \alpha_i$, il vient finalement

$$\alpha_i(t) = \lambda_i t^{\frac{2k_i}{\Omega}}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

On se souvient que $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, ainsi $\ln(V) = \frac{1}{2} (A_1 + A_2 + A_3)$ et

$$\frac{d \ln V}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_3) = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2V}$$

soit

$$\dot{V} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{2} := \frac{\Omega}{2} \in \mathbb{R} \text{ soit } V = \frac{\Omega}{2}t + \Omega_o$$



Hypothèse : $V(t=0) = 0 \Rightarrow \Omega_o = 0$ donc

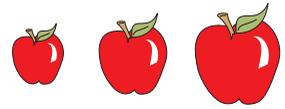
$$V = \frac{\Omega}{2}t \Rightarrow \dot{A}_i = \frac{2k_i}{\Omega t} \Rightarrow A_i = \ln \left(\lambda_i t^{\frac{2k_i}{\Omega}} \right) \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et comme $A_i = \ln \alpha_i$, il vient finalement

$$\alpha_i(t) = \lambda_i t^{\frac{2k_i}{\Omega}}$$

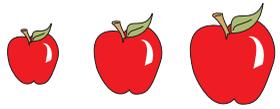
les λ_i sont liés par

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2}t = V &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = \left[\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 t^{\frac{2(k_1+k_2+k_3)}{\Omega}} \right]^{1/2} \\ &\Rightarrow \Omega^2 = 4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

Reste la relation : $A'_1 A'_2 + A'_1 A'_3 + A'_3 A'_2 = 0$.



Solution fondamentale : B_1 vide

Reste la relation : $A'_1 A'_2 + A'_1 A'_3 + A'_3 A'_2 = 0$.

$$A'_i = V \dot{A}_i = \left(\frac{\Omega}{2} t \right) \left(\frac{2k_i}{\Omega t} \right) = k_i$$

ainsi

$$k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 = 0$$



Solution fondamentale : B_1 vide

Reste la relation : $A'_1 A'_2 + A'_1 A'_3 + A'_3 A'_2 = 0$.

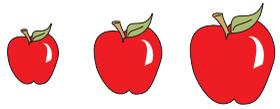
$$A'_i = V \dot{A}_i = \left(\frac{\Omega}{2} t \right) \left(\frac{2k_i}{\Omega t} \right) = k_i$$

ainsi

$$k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 = 0$$

par définition $\Omega = k_1 + k_2 + k_3$, on a donc en plus

$$\Omega^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$



Solution fondamentale : B_1 vide

Reste la relation : $A'_1 A'_2 + A'_1 A'_3 + A'_3 A'_2 = 0$.

$$A'_i = V \dot{A}_i = \left(\frac{\Omega}{2} t \right) \left(\frac{2k_i}{\Omega t} \right) = k_i$$

ainsi

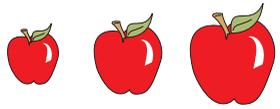
$$k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 = 0$$

par définition $\Omega = k_1 + k_2 + k_3$, on a donc en plus

$$\Omega^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

On utilise alors $p_i := \frac{k_i}{\Omega}$ qui vérifie

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \end{cases}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

Reste la relation : $A'_1 A'_2 + A'_1 A'_3 + A'_3 A'_2 = 0$.

$$A'_i = V \dot{A}_i = \left(\frac{\Omega}{2} t \right) \left(\frac{2k_i}{\Omega t} \right) = k_i$$

ainsi

$$k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 = 0$$

par définition $\Omega = k_1 + k_2 + k_3$, on a donc en plus

$$\Omega^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

On utilise alors $p_i := \frac{k_i}{\Omega}$ qui vérifie

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \end{cases}$$

que l'on peut exprimer en fonction d'un seul paramètre $u \in [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} p_1 &= -u (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_2 &= (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_3 &:= u (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \end{aligned}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

$$\begin{pmatrix} p_1 = -u (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_2 = (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_3 := u (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \end{pmatrix}$$



Solution fondamentale : B_1 vide

$$\begin{cases} p_1 = -u (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_2 = (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_3 := u (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \end{cases}$$

On remarque que

$$\forall u \in [1, +\infty[, \quad -\frac{1}{3} \leq p_1 < 0 < p_2 \leq \frac{2}{3} \leq p_3 < 1$$



Solution fondamentale : B_1 vide

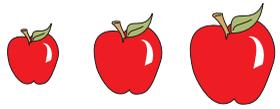
$$\begin{cases} p_1 = -u (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_2 = (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_3 := u (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \end{cases}$$

On remarque que

$$\forall u \in [1, +\infty[, \quad -\frac{1}{3} \leq p_1 < 0 < p_2 \leq \frac{2}{3} \leq p_3 < 1$$

La métrique de l'univers B_1 vide s'écrit donc

$$ds^2 = \lambda_1 t^{2p_1} dx_1^2 + \lambda_2 t^{2p_2} dx_2^2 + \lambda_3 t^{2p_3} dx_3^2 - dt^2$$



Solution fondamentale : B_1 vide

$$\begin{cases} p_1 = -u (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_2 = (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \\ p_3 := u (1 + u) (1 + u + u^2)^{-1} \end{cases}$$

On remarque que

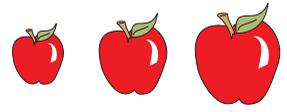
$$\forall u \in [1, +\infty[, \quad -\frac{1}{3} \leq p_1 < 0 < p_2 \leq \frac{2}{3} \leq p_3 < 1$$

La métrique de l'univers B_1 vide s'écrit donc

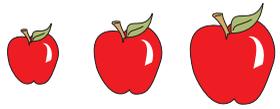
$$ds^2 = \lambda_1 t^{2p_1} dx_1^2 + \lambda_2 t^{2p_2} dx_2^2 + \lambda_3 t^{2p_3} dx_3^2 - dt^2$$

Si $t \rightarrow 0$ (Big-Bang) $\left[\begin{array}{ll} \bullet & : \text{Expansion exponentielle} \\ \bullet \quad \bullet & : \text{Contraction exponentielle} \\ V & : \text{Contraction linéaire} \end{array} \right.$

Cet état représente une ère de Kasner définie par u et Ω



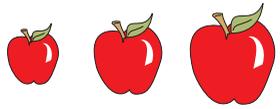
Solution B_{II} vide



Solution B_{II} vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \text{ avec } \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array}$$



Solution $B_{||}$ vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \\ E_m \\ E_m \\ E_m \end{array} \right. = \begin{array}{l} E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array}$$

$B_{||}$ vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$



Solution $B_{||}$ vide

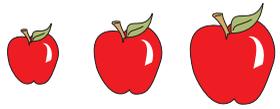
Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array} \right.$$

$B_{||}$ vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$

Résolution de l'équation du milieu ...



Solution $B_{||}$ vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

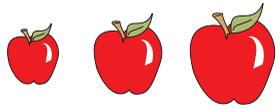
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array} \right.$$

$B_{||}$ vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$

Résolution de l'équation du milieu ...

$$A_1'' = -e^{2A_1}$$



Solution B_{II} vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

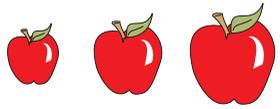
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array} \right.$$

B_{II} vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$

Résolution de l'équation du milieu ...

$$A_1'' = -e^{2A_1} \Rightarrow A_1' A_1'' = -A_1' e^{2A_1}$$



Solution $B_{||}$ vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

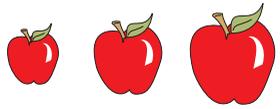
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array}$$

$B_{||}$ vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$

Résolution de l'équation du milieu ...

$$A_1'' = -e^{2A_1} \Rightarrow A_1' A_1'' = -A_1' e^{2A_1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} A_1'^2 \right)' = \left(-\frac{1}{2} e^{2A_1} \right)'$$



Solution $B_{||}$ vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array}$$

$B_{||}$ vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$

Résolution de l'équation du milieu ...

$$A_1'' = -e^{2A_1} \Rightarrow A_1' A_1'' = -A_1' e^{2A_1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} A_1'^2 \right)' = \left(-\frac{1}{2} e^{2A_1} \right)'$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad A_1' = \sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}$$



Solution B_{II} vide

Dynamique Bianchi ($A_i = \ln \alpha_i$, $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, $y' = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dy}{dt} = V \dot{y}$)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = E_c + E_p + 4E_m / (\Gamma - 2) \\ E_m = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ E_m = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ E_m = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} E_m = -\chi \epsilon V^2 (\Gamma - 2) \\ E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \\ E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \end{array}$$

B_{II} vide : $n_1 = 1, n_2 = n_3 = \epsilon = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = e^{2A_1} \\ A_1'' = -e^{2A_1} \\ A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} \end{array} \right.$$

Résolution de l'équation du milieu ...

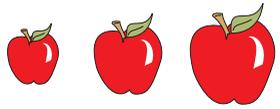
$$A_1'' = -e^{2A_1} \Rightarrow A_1' A_1'' = -A_1' e^{2A_1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} A_1'^2 \right)' = \left(-\frac{1}{2} e^{2A_1} \right)'$$

$$\Rightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad A_1' = \sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}} \quad \text{soit} \quad \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = d\tau$$



Solution B_{II} vide

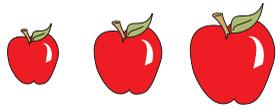
$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

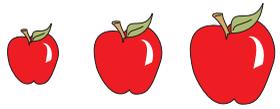
$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1}$$



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow y dy = -e^{2A_1} dA_1$$



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow ydy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{ydy}{y^2 - \lambda_1}$$



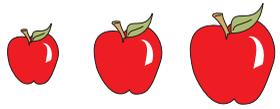
Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow ydy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{ydy}{y^2 - \lambda_1}$$

ainsi

$$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1}$$



Solution B_{II} vide

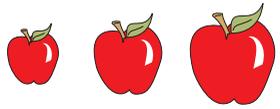
$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow ydy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{ydy}{y^2 - \lambda_1}$$

ainsi

$$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

avec $x = y/\sqrt{\lambda_1}$,



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow ydy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{ydy}{y^2 - \lambda_1}$$

ainsi

$$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

avec $x = y/\sqrt{\lambda_1}$, on reconnaît – arg th ...



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow y dy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{y dy}{y^2 - \lambda_1}$$

ainsi

$$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

avec $x = y/\sqrt{\lambda_1}$, on reconnaît – arg th ...

$$\arg \text{th}(x) = \sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau)$$



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow ydy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{ydy}{y^2 - \lambda_1}$$

ainsi

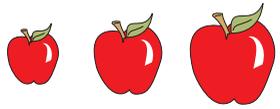
$$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

avec $x = y/\sqrt{\lambda_1}$, on reconnaît – arg th ...

$$\arg \text{th}(x) = \sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau)$$

en revenant aux variables officielles

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\lambda_1} \text{th}(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau)) \Rightarrow e^{2A_1} = \lambda_1 [1 - \text{th}^2(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau))] \\ &\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \ln \{1 - \text{th}^2(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau))\} + \frac{1}{2} \ln \lambda_1 \end{aligned}$$



Solution B_{II} vide

$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}}$, le calcul de cet intégrale est simple :

$$y^2 = \lambda_1 - e^{2A_1} \Rightarrow ydy = -e^{2A_1} dA_1 \Rightarrow dA_1 = \frac{ydy}{y^2 - \lambda_1}$$

ainsi

$$\int \frac{dA_1}{\sqrt{\lambda_1 - e^{2A_1}}} = \int \frac{dy}{y^2 - \lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

avec $x = y/\sqrt{\lambda_1}$, on reconnaît – arg th ...

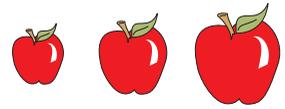
$$\arg \text{th}(x) = \sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau)$$

en revenant aux variables officielles

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\lambda_1} \text{th}(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau)) \Rightarrow e^{2A_1} = \lambda_1 [1 - \text{th}^2(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau))] \\ &\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \ln \{1 - \text{th}^2(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau))\} + \frac{1}{2} \ln \lambda_1 \end{aligned}$$

finalement

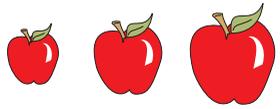
$$A_1 = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{\text{ch}^2(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau))} \right\} + \frac{1}{2} \ln \lambda_1 = \ln \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch}(\sqrt{\lambda_1} (\mu - \tau))} \right\}$$



Solution B_{11} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



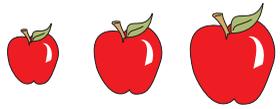
Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ...



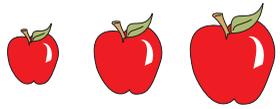
Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ... $\alpha_1 (\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch} (\sqrt{\lambda_1} \tau)$



Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ... $\alpha_1(\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau)$

pour les 2 autres

$$A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} = \frac{\lambda_1}{\text{ch}^2(\sqrt{\lambda_1} \tau)}$$

qui donnent ...



Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



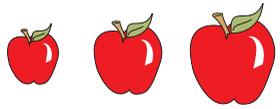
$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ... $\alpha_1(\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau)$

pour les 2 autres

$$A''_2 = A''_3 = e^{2A_1} = \frac{\lambda_1}{\text{ch}^2(\sqrt{\lambda_1} \tau)}$$

qui donnent ...

$$A'_{2,3} = \sqrt{\lambda_1} \text{th}(\sqrt{\lambda_1} \tau) + \lambda_{2,3}$$



Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ... $\alpha_1(\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau)$

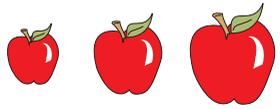
pour les 2 autres

$$A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} = \frac{\lambda_1}{\text{ch}^2(\sqrt{\lambda_1} \tau)}$$

qui donnent ...

$$A_{2,3}' = \sqrt{\lambda_1} \text{th}(\sqrt{\lambda_1} \tau) + \lambda_{2,3}$$

$$A_{2,3} = \ln \left[\text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau) \right] + \lambda_{2,3} \tau + (0 = \mu_{2,3})$$



Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ... $\alpha_1 (\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch} (\sqrt{\lambda_1} \tau)$

pour les 2 autres

$$A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} = \frac{\lambda_1}{\text{ch}^2 (\sqrt{\lambda_1} \tau)}$$

qui donnent ...

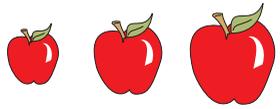
$$A_{2,3}' = \sqrt{\lambda_1} \text{th} (\sqrt{\lambda_1} \tau) + \lambda_{2,3}$$

$$A_{2,3} = \ln [\text{ch} (\sqrt{\lambda_1} \tau)] + \lambda_{2,3} \tau + (0 = \mu_{2,3})$$

finalement

$$\alpha_1 (\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch} (\sqrt{\lambda_1} \tau) \quad , \quad \alpha_2 (\tau) = e^{\lambda_2 \tau} \text{ch} (\sqrt{\lambda_1} \tau)$$

et $\alpha_3 (\tau) = e^{\lambda_3 \tau} \text{ch} (\sqrt{\lambda_1} \tau)$



Solution B_{II} vide

pour le premier facteur d'échelle on trouve donc (ch étant paire...)

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\text{ch} [\sqrt{\lambda_1} (\tau - \mu)]}$$



$\mu = 0$: on choisit l'instant du Big-Bang ... $\alpha_1(\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau)$

pour les 2 autres

$$A_2'' = A_3'' = e^{2A_1} = \frac{\lambda_1}{\text{ch}^2(\sqrt{\lambda_1} \tau)}$$

qui donnent ...

$$A_{2,3}' = \sqrt{\lambda_1} \text{th}(\sqrt{\lambda_1} \tau) + \lambda_{2,3}$$

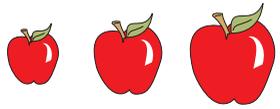
$$A_{2,3} = \ln \left[\text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau) \right] + \lambda_{2,3} \tau + (0 = \mu_{2,3})$$

finalement

$$\alpha_1(\tau) = \sqrt{\lambda_1} / \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau) \quad , \quad \alpha_2(\tau) = e^{\lambda_2 \tau} \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau)$$

et $\alpha_3(\tau) = e^{\lambda_3 \tau} \text{ch}(\sqrt{\lambda_1} \tau)$

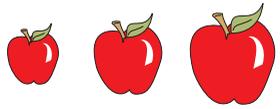
la contrainte $A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = A_{2,3}''$ se résume magiquement à $\lambda_1 = \lambda_2 \lambda_3$



Solution B_{II} vide

Le volume peut maintenant s'écrire

$$V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = \left[\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} e^{(\lambda_2 + \lambda_3) \tau} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} \tau \right) \right]^{1/2} \sim \exp(\tau)$$



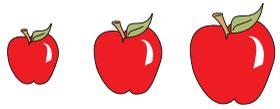
Solution B_{II} vide

Le volume peut maintenant s'écrire

$$V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = \left[\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} e^{(\lambda_2 + \lambda_3)\tau} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} \tau \right) \right]^{1/2} \sim \exp(\tau)$$

et le temps peut apparaître

$$V = \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow dt \sim \exp(\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \tau & \propto \ln(t) \\ t & \propto \exp(\tau) \end{cases}$$



Solution B_{II} vide

Le volume peut maintenant s'écrire

$$V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = \left[\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} e^{(\lambda_2 + \lambda_3)\tau} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} \tau \right) \right]^{1/2} \sim \exp(\tau)$$

et le temps peut apparaître

$$V = \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow dt \sim \exp(\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \tau & \propto \ln(t) \\ t & \propto \exp(t) \end{cases}$$

les limites temporelles sont donc claires :

$$\begin{array}{ll} \text{si } t \rightarrow 0 & \text{alors } \tau \rightarrow -\infty \\ \text{si } t \rightarrow +\infty & \text{alors } \tau \rightarrow +\infty \end{array}$$



Solution B_{II} vide

Le volume peut maintenant s'écrire

$$V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = \left[\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} e^{(\lambda_2 + \lambda_3)\tau} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\lambda_3 \lambda_2} \tau \right) \right]^{1/2} \sim \exp(\tau)$$

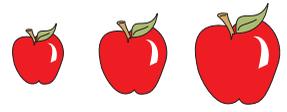
et le temps peut apparaître

$$V = \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow dt \sim \exp(\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} \tau & \propto \ln(t) \\ t & \propto \exp(\tau) \end{cases}$$

les limites temporelles sont donc claires :

$$\begin{array}{ll} \text{si } t \rightarrow 0 & \text{alors } \tau \rightarrow -\infty \\ \text{si } t \rightarrow +\infty & \text{alors } \tau \rightarrow +\infty \end{array}$$

\Rightarrow Comportement asymptotique des α_i de B_{II} vide



Solution B_{II} vide



Solution B_{II} vide



Si $t \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow -\infty$), $\text{ch}(\sqrt{\lambda_1}\tau) \approx \frac{e^{-\sqrt{\lambda_1}\tau}}{2}$

$$B_{II} \text{ vide} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1(\tau) \approx e^{\sqrt{\lambda_1}\tau} \\ \alpha_2(\tau) \approx e^{(\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1})\tau} \\ \alpha_3(\tau) \approx e^{(\lambda_3 - \sqrt{\lambda_1})\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) \approx t^{\sqrt{\lambda_1}} \\ \alpha_2(t) \approx t^{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1}} \\ \alpha_3(t) \approx t^{\lambda_3 - \sqrt{\lambda_1}} \end{cases}$$



Solution $B_{||}$ vide



Si $t \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow -\infty$), $\text{ch}(\sqrt{\lambda_1}\tau) \approx \frac{e^{-\sqrt{\lambda_1}\tau}}{2}$

$$B_{||} \text{ vide} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1(\tau) \approx e^{\sqrt{\lambda_1}\tau} \\ \alpha_2(\tau) \approx e^{(\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1})\tau} \\ \alpha_3(\tau) \approx e^{(\lambda_3 - \sqrt{\lambda_1})\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) \approx t^{\sqrt{\lambda_1}} \\ \alpha_2(t) \approx t^{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1}} \\ \alpha_3(t) \approx t^{\lambda_3 - \sqrt{\lambda_1}} \end{cases}$$



Si $t \rightarrow +\infty$ ($\tau \rightarrow +\infty$), $\text{ch}(\sqrt{\lambda_1}\tau) \approx \frac{e^{+\sqrt{\lambda_1}\tau}}{2}$

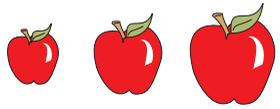
$$B_{||} \text{ vide} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1(\tau) \approx e^{-\sqrt{\lambda_1}\tau} \\ \alpha_2(\tau) \approx e^{(\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1})\tau} \\ \alpha_3(\tau) \approx e^{(\lambda_3 + \sqrt{\lambda_1})\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) \approx t^{-\sqrt{\lambda_1}} \\ \alpha_2(t) \approx t^{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1}} \\ \alpha_3(t) \approx t^{\lambda_3 + \sqrt{\lambda_1}} \end{cases}$$



Solution B_{II} vide

Posons

$$\begin{cases} k_1 = -\sqrt{\lambda_1} \\ k_2 = \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1} \\ k_3 = \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} := \Omega_i \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \dots = \Omega_i^2 \end{cases}$$



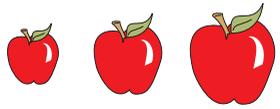
Solution $B_{||}$ vide

Posons

$$\begin{cases} k_1 = -\sqrt{\lambda_1} \\ k_2 = \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1} \\ k_3 = \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} := \Omega_i \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \dots = \Omega_i^2 \end{cases}$$



$B_{||}$ vide en $t \rightarrow +\infty$ est kasnérien



Solution $B_{||}$ vide

Posons

$$\begin{cases} k_1 = -\sqrt{\lambda_1} \\ k_2 = \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1} \\ k_3 = \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} := \Omega_i \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \dots = \Omega_i^2 \end{cases}$$



$B_{||}$ vide en $t \rightarrow +\infty$ est kasnérien

avec

$$\text{🍏 } \Omega_i := \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1}$$



Solution $B_{||}$ vide

Posons

$$\begin{cases} k_1 = -\sqrt{\lambda_1} \\ k_2 = \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1} \\ k_3 = \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} := \Omega_i \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \dots = \Omega_i^2 \end{cases}$$



$B_{||}$ vide en $t \rightarrow +\infty$ est kasnérien

avec

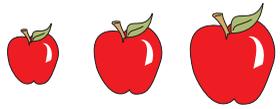


$$\Omega_i := \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1}$$



u_i solution unique de

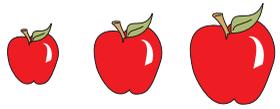
$$\begin{cases} -\sqrt{\lambda_1} = -\Omega_i u_i (1 + u_i + u_i^2)^{-1} \\ \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1} = \Omega_i (1 + u_i) (1 + u_i + u_i^2)^{-1} \\ \lambda_3 + \sqrt{\lambda_1} = \Omega_i u_i (1 + u_i) (1 + u_i + u_i^2)^{-1} \end{cases}$$



Solution B_{II} vide

De la même façon, en posant

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \sqrt{\lambda_1} \\ \tilde{k}_2 = \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1} \\ \tilde{k}_3 = \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 = \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} := \Omega_f \\ \tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 = \dots = \Omega_f^2 \end{cases}$$



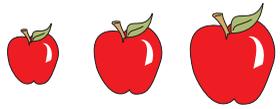
Solution $B_{||}$ vide

De la même façon, en posant

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \sqrt{\lambda_1} \\ \tilde{k}_2 = \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1} \\ \tilde{k}_3 = \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 = \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} := \Omega_f \\ \tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 = \dots = \Omega_f^2 \end{cases}$$

$B_{||}$ vide en $t \rightarrow 0$ est kasnérien avec $\Omega_f := \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1}$ et u_f solution unique de

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_1} = -\Omega_f u_f (1 + u_f + u_f^2)^{-1} \\ \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1} = \Omega_f (1 + u_f) (1 + u_f + u_f^2)^{-1} \\ \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} = \Omega_f u_f (1 + u_f) (1 + u_f + u_f^2)^{-1} \end{cases}$$



Solution $B_{||}$ vide

De la même façon, en posant

$$\begin{cases} \tilde{k}_1 = \sqrt{\lambda_1} \\ \tilde{k}_2 = \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1} \\ \tilde{k}_3 = \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 = \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} := \Omega_f \\ \tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_3^2 = \dots = \Omega_f^2 \end{cases}$$

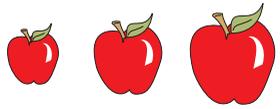
$B_{||}$ vide en $t \rightarrow 0$ est kasnérien avec $\Omega_f := \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1}$ et u_f solution unique de

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda_1} = -\Omega_f u_f (1 + u_f + u_f^2)^{-1} \\ \lambda_2 - \sqrt{\lambda_1} = \Omega_f (1 + u_f) (1 + u_i + u_f^2)^{-1} \\ \lambda_3 - \sqrt{\lambda_1} = \Omega_f u_f (1 + u_f) (1 + u_f + u_f^2)^{-1} \end{cases}$$

On remarque finalement que

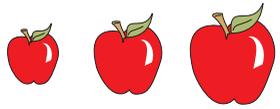
🍏 la relation $\Omega_f = \Omega_i - 2\sqrt{\lambda_1}$ permet de prouver que $u_f = u_i - 1$;

🍏 dans un état kasnérien $p_i(u) = p_i(1/u)$.



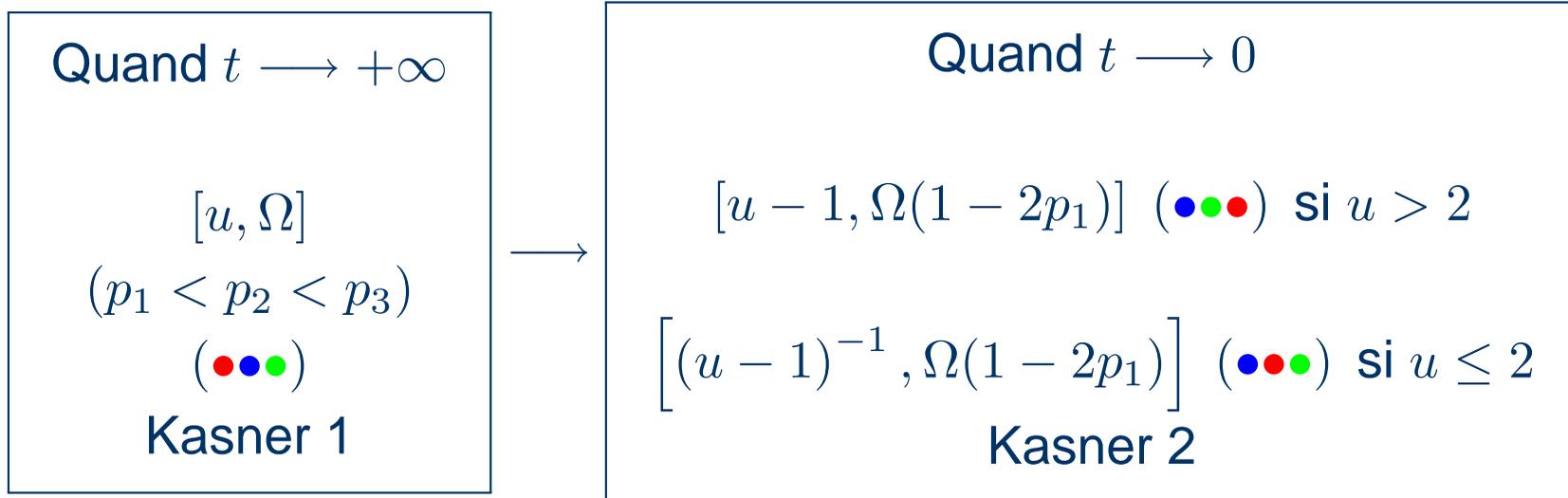
Solution B_{II} vide : conclusion

La dynamique B_{II} est une transition entre 2 états de Kasner

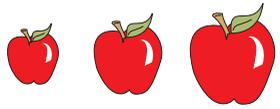


Solution B_{II} vide : conclusion

La dynamique B_{II} est une transition entre 2 états de Kasner



Les bianchi's c'est fantastique !

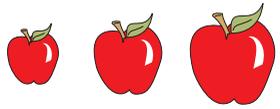


Formalisme hamiltonien

e.g. [Misner '70]



Diagonaliser E_c ...



Formalisme hamiltonien

e.g. [Misner '70]

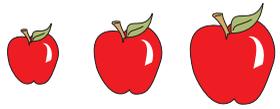


Diagonaliser E_c ...

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} := [q_1 \ q_2 \ q_3]^T = M [A_1 \ A_2 \ A_3]^T$$

$$\mathbf{p} := [p_1 \ p_2 \ p_3]^T = M [A'_1 \ A'_2 \ A'_3]^T$$



Formalisme hamiltonien



e.g. [Misner '70]

Diagonaliser E_c ...

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q} := [q_1 \ q_2 \ q_3]^T = M [A_1 \ A_2 \ A_3]^T$$

$$\mathbf{p} := [p_1 \ p_2 \ p_3]^T = M [A'_1 \ A'_2 \ A'_3]^T$$

Les équations d'Einstein deviennent

$$\begin{aligned} q'_{1,2} &= -\nabla_{p_{1,2}} H & p'_{1,2} &= -\nabla_{q_{1,2}} H \\ q'_3 &= \nabla_{q_3} H & p'_3 &= -\nabla_{p_3} H \end{aligned}$$

$$(x, y) := +x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

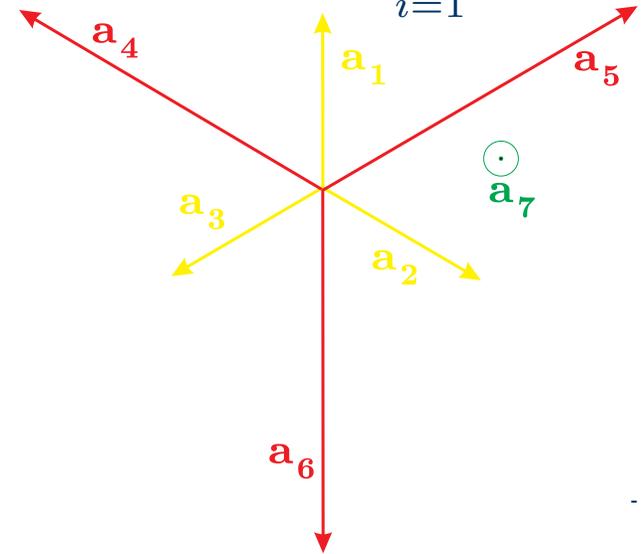
$$\langle x, y \rangle := -x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$$

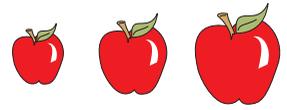
$$k_1 := 2n_1 n_2 \quad k_2 := 2n_1 n_3 \quad k_3 := 2n_2 n_3$$

$$k_4 := -n_1^2 \quad k_5 := -n_2^2 \quad k_6 := -n_3^2$$

$$k_7 = -4\varepsilon_o \chi$$

$$\text{avec } H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \sum_{i=1}^7 k_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})}$$





Les billards de Bianchi

e.g. [Jantzen,82] , [Uggla,97]



Les billards de Bianchi

e.g. [Jantzen,82] , [Uggla,97]

en posant $d\tilde{t} = V^{1/3}dt$ et $m = V^{4/3}$ la dynamique devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_{1,2}}{d\tilde{t}} = \frac{p_{1,2}}{m} = \frac{\partial E}{\partial q_{1,2}} \\ \frac{dp_{1,2}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \xi}{\partial q_{1,2}} = \frac{\partial E}{\partial p_{1,2}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - \xi(q_1, q_2) = \frac{(dV/dt)^2}{V^{2/3}}$$

Pour $t \rightarrow 0 \left| \begin{array}{l} E \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$\xi(q_1, q_2) = \sum_{i=1}^7 k_i e^{(\pi(\mathbf{a}_i), \mathbf{q})} \quad , \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \quad , \pi : \text{Projecteur sur } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$



Les billards de Bianchi

e.g. [Jantzen,82] , [Uggla,97]

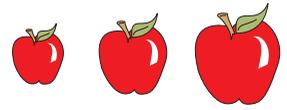
en posant $d\tilde{t} = V^{1/3}dt$ et $m = V^{4/3}$ la dynamique devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_{1,2}}{d\tilde{t}} = \frac{p_{1,2}}{m} = \frac{\partial E}{\partial q_{1,2}} \\ \frac{dp_{1,2}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \xi}{\partial q_{1,2}} = \frac{\partial E}{\partial p_{1,2}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - \xi(q_1, q_2) = \frac{(dV/dt)^2}{V^{2/3}}$$

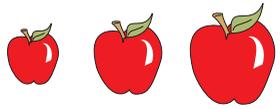
Pour $t \rightarrow 0 \left| \begin{array}{l} E \rightarrow +\infty \\ m \rightarrow 0 \end{array} \right.$

$$\xi(q_1, q_2) = \sum_{i=1}^7 k_i e^{(\pi(\mathbf{a}_i), \mathbf{q})} \quad , \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 , \pi : \text{Projecteur sur } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$$

Univers de Bianchi \Leftrightarrow Dynamique 2D d'une bille de masse \searrow
avec une énergie \nearrow
dans un potentiel exponentiel ξ



Le billard cosmologique



Le billard cosmologique

Dynamique "isolée" : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 e^y$ avec $y(0) = 0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

$$y(x) = \ln \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] = -2 \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] \approx \pm \sqrt{2} kx + 2 \ln 2$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$

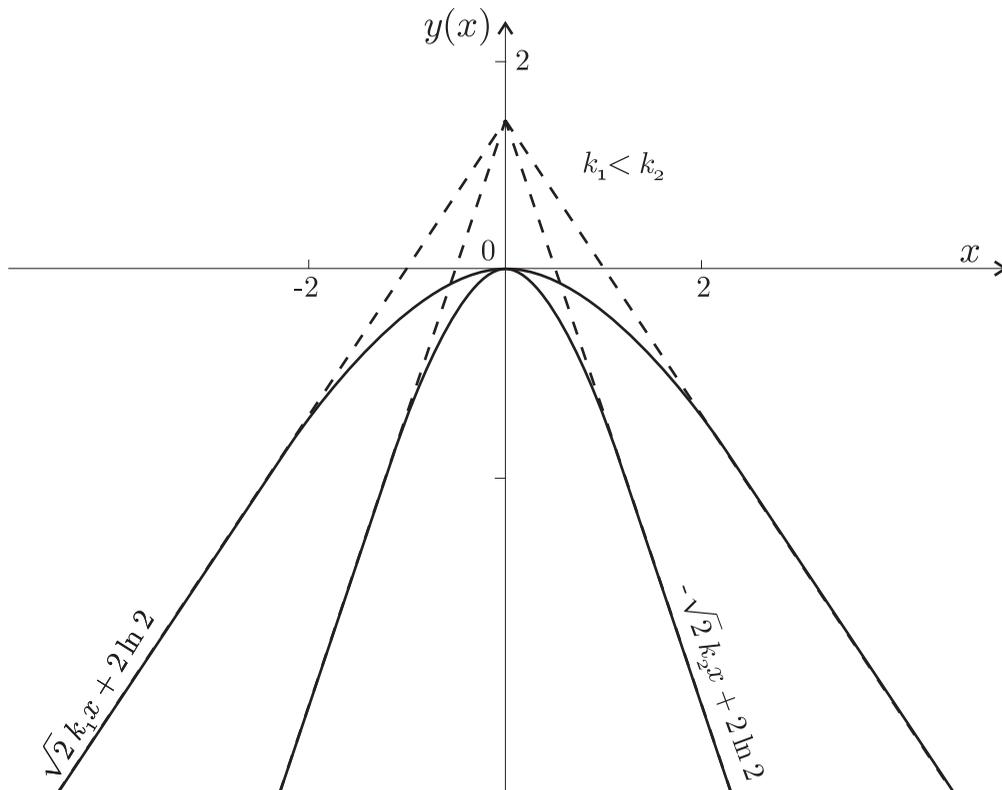


Le billard cosmologique

Dynamique "isolée" : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 e^y$ avec $y(0) = 0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

$$y(x) = \ln \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] = -2 \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] \approx \pm \sqrt{2} kx + 2 \ln 2$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$



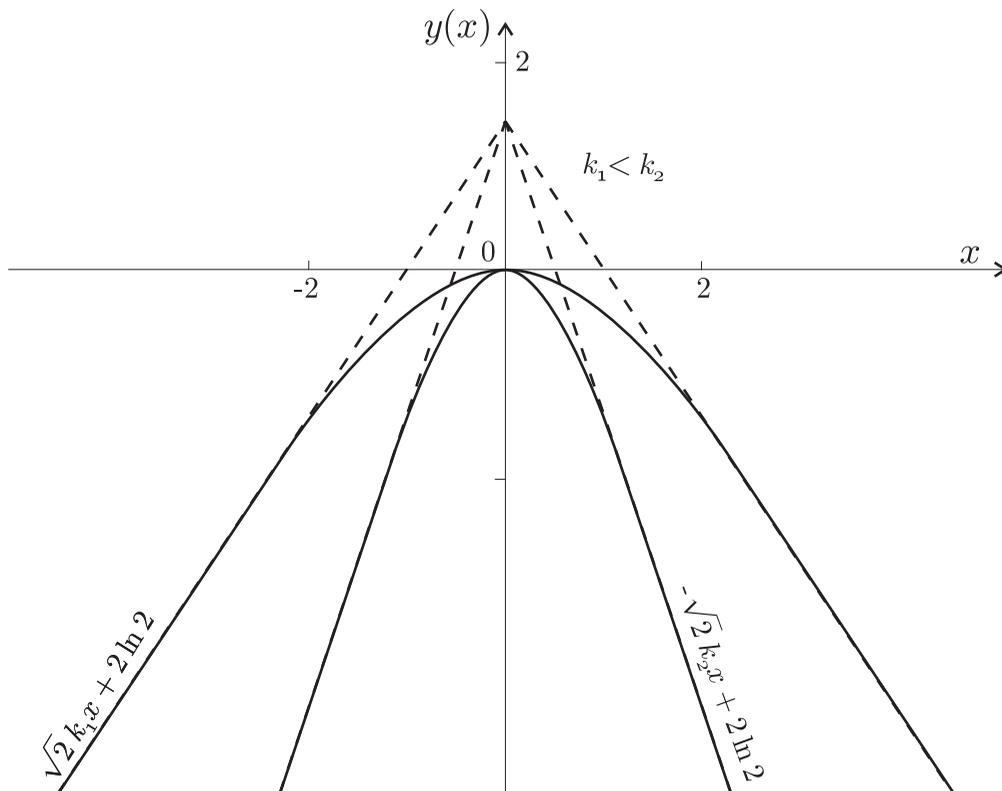


Le billard cosmologique

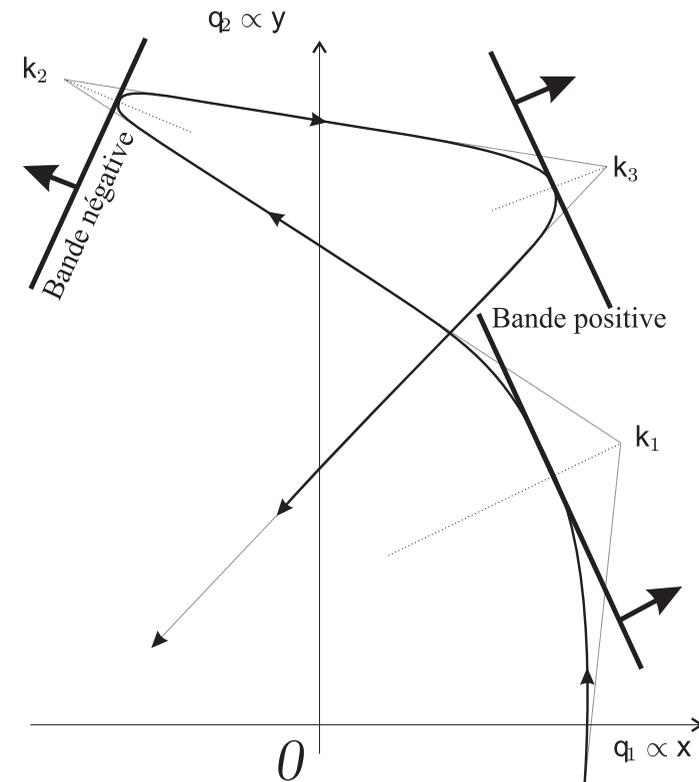
Dynamique "isolée" : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 e^y$ avec $y(0) = 0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

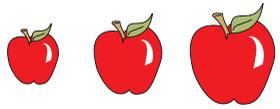
$$y(x) = \ln \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] = -2 \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] \approx \pm \sqrt{2} kx + 2 \ln 2$$

Quand $x \rightarrow \pm\infty$



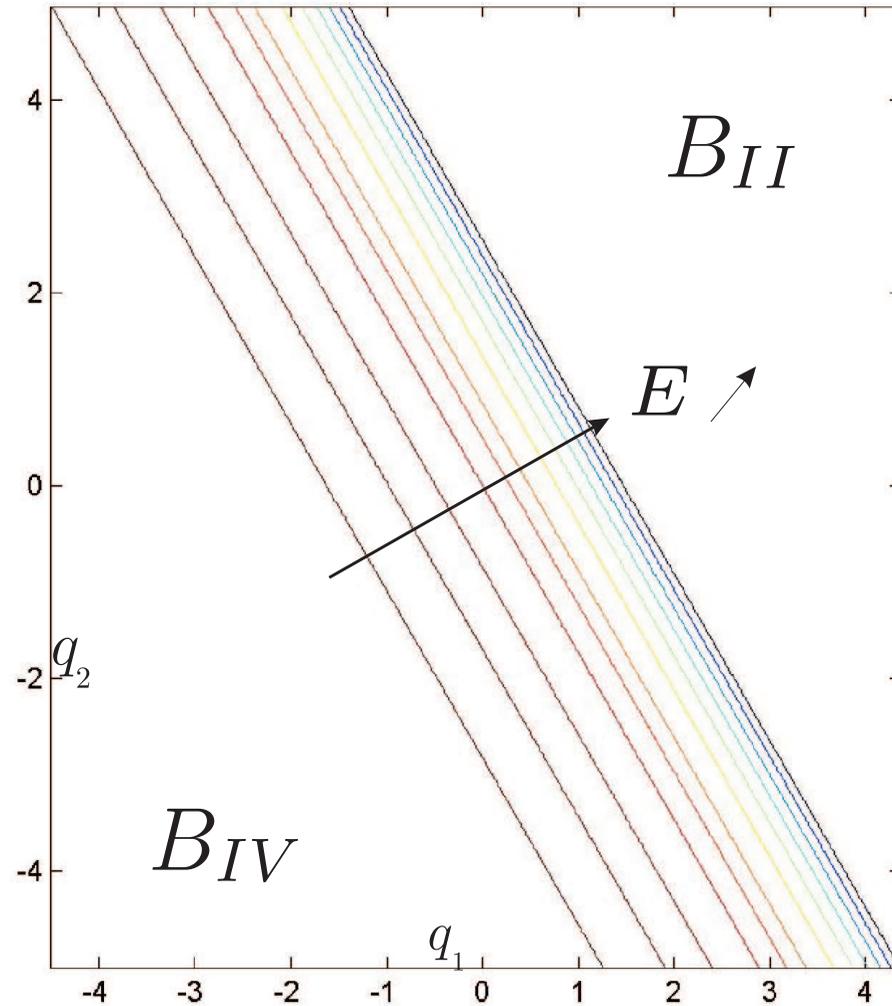
Plusieurs bandes ...



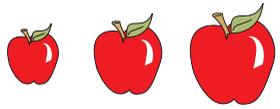


La forme des bandes : B_{II}

$$n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0 : \xi(q_1, q_2) = -e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1}$$

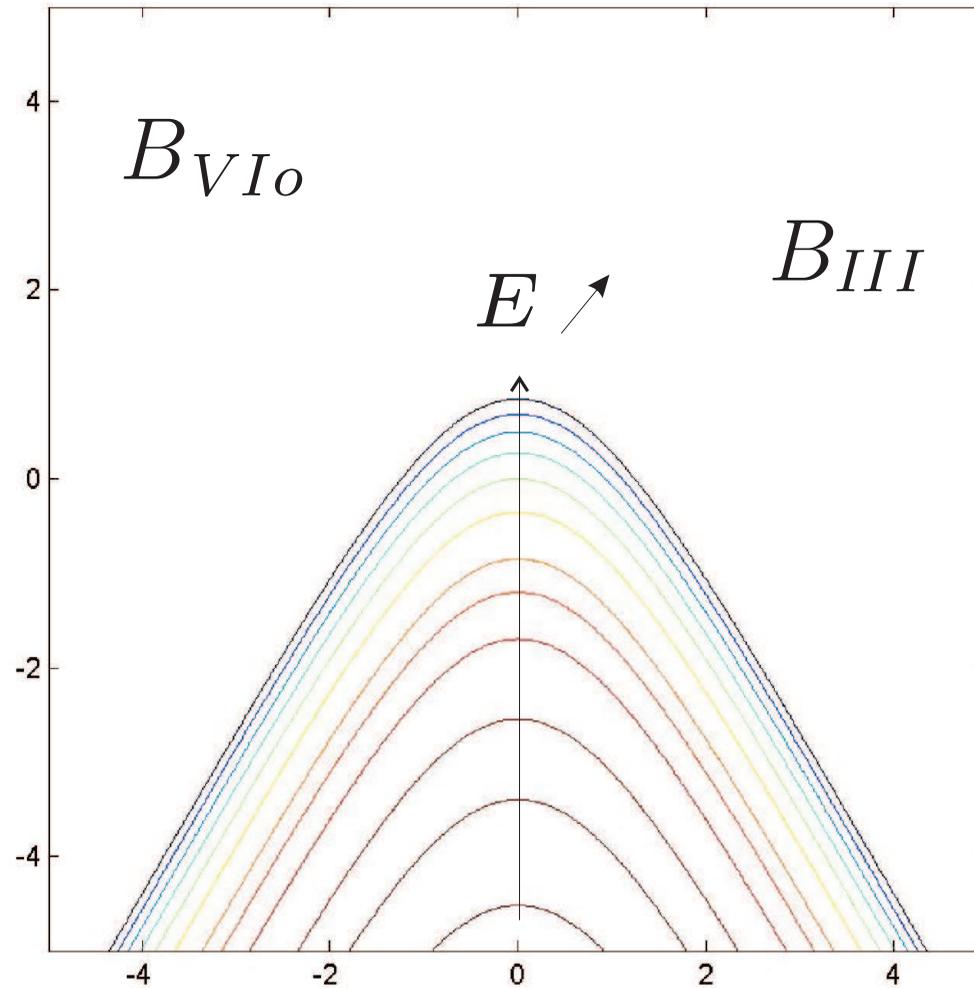


Isovaleurs $\xi = E$



La forme des bandes : B_{III}

$$n_1 = 1, n_2 = -1, n_3 = 0 : \xi(q_1, q_2) = -e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1} - e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 - \sqrt{2}q_1} - 2e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2}$$

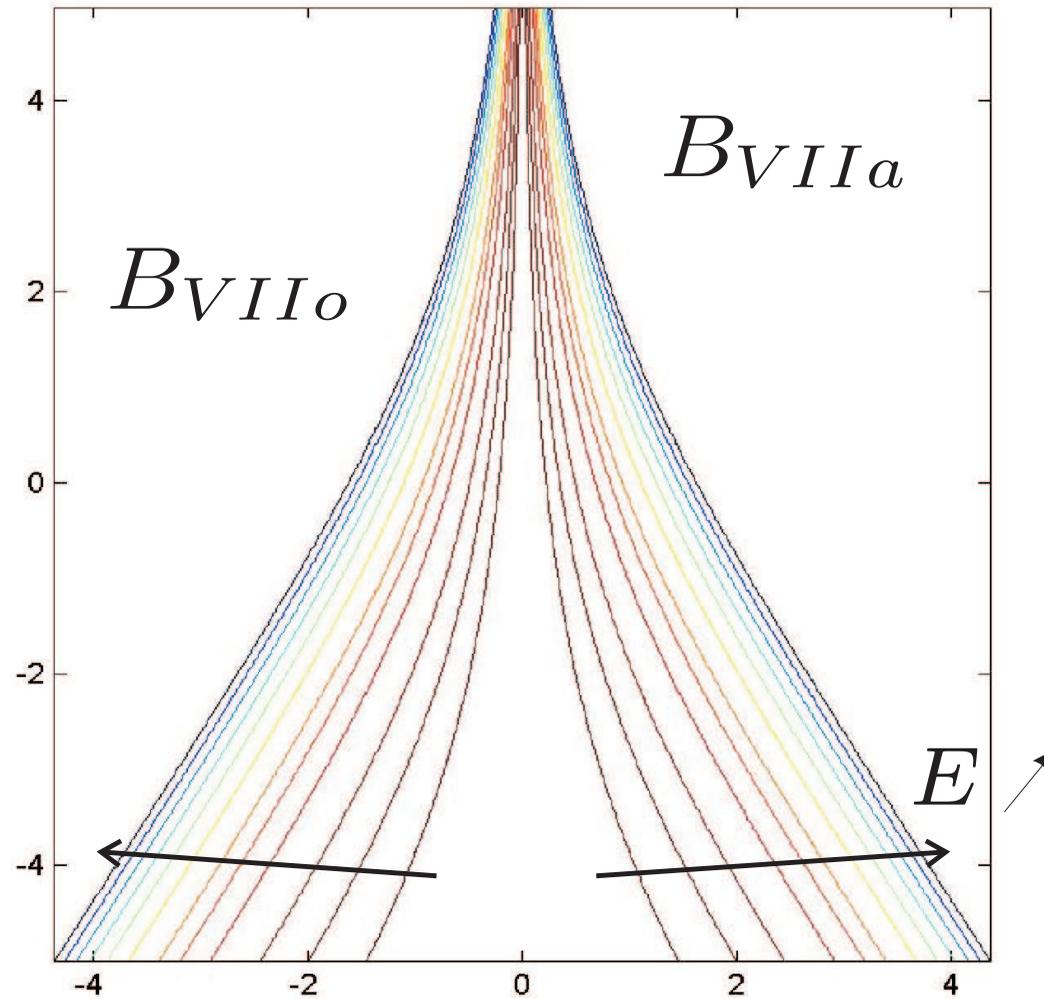


Isovaleurs $\xi = E$



La forme des bandes : B_{VII}

$$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0 : \xi(q_1, q_2) = -e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1} - e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 - \sqrt{2}q_1} + 2e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2}$$

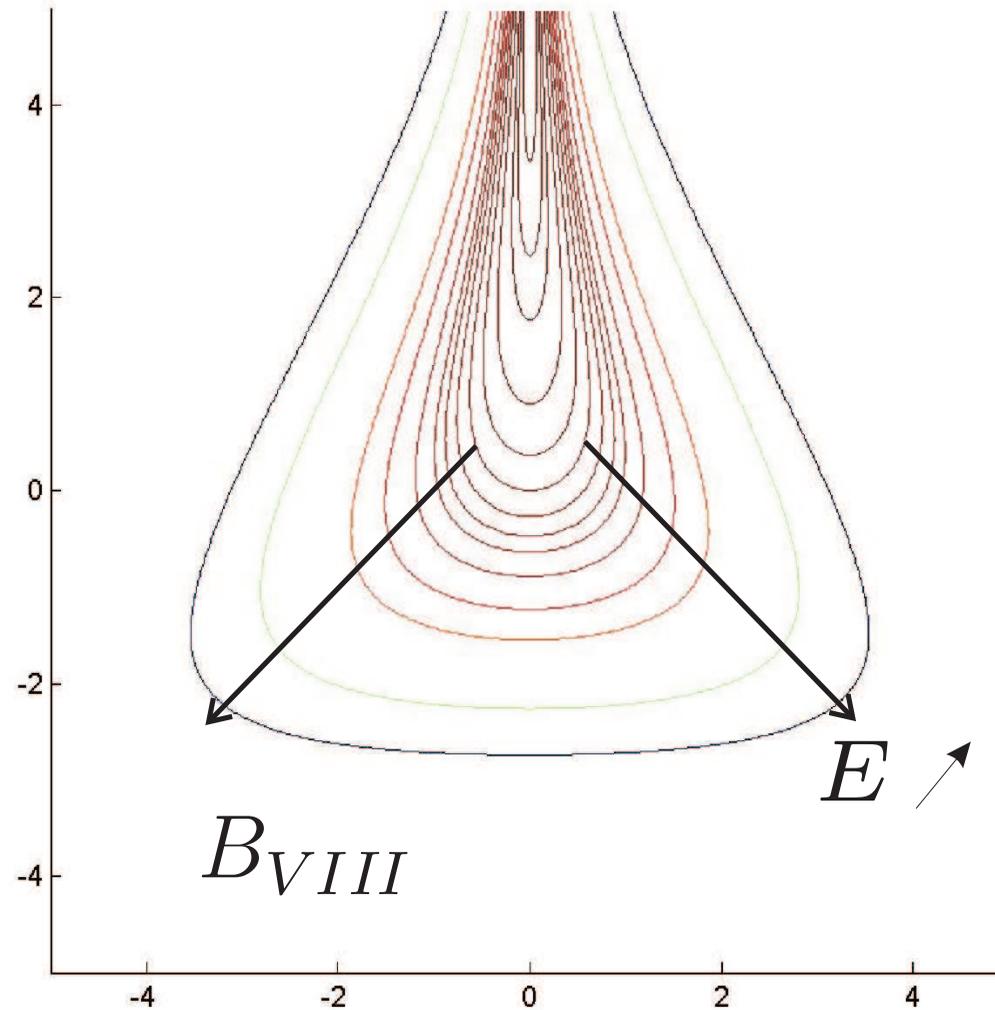


Isovaleurs $\xi = E$

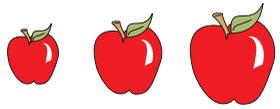


La forme des bandes : B_{VIII}

$$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = -1 : \xi(q_1, q_2) = \dots!$$

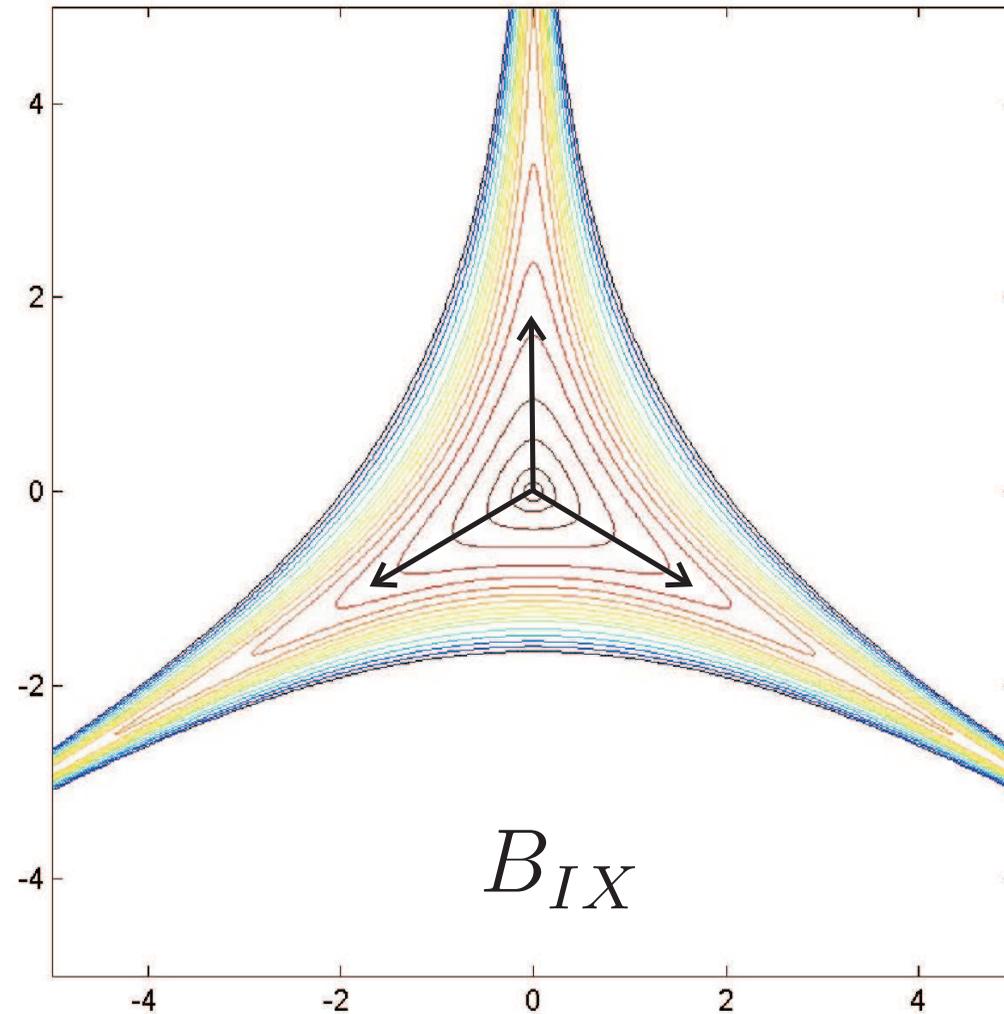


Isovaleurs $\xi = E$

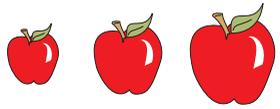


La forme des bandes : B_{IX}

$$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 1 : \xi(q_1, q_2) = \dots!$$

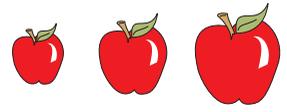


Isovaleurs $\xi = E$

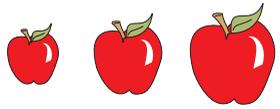


Un peu de numérique ...

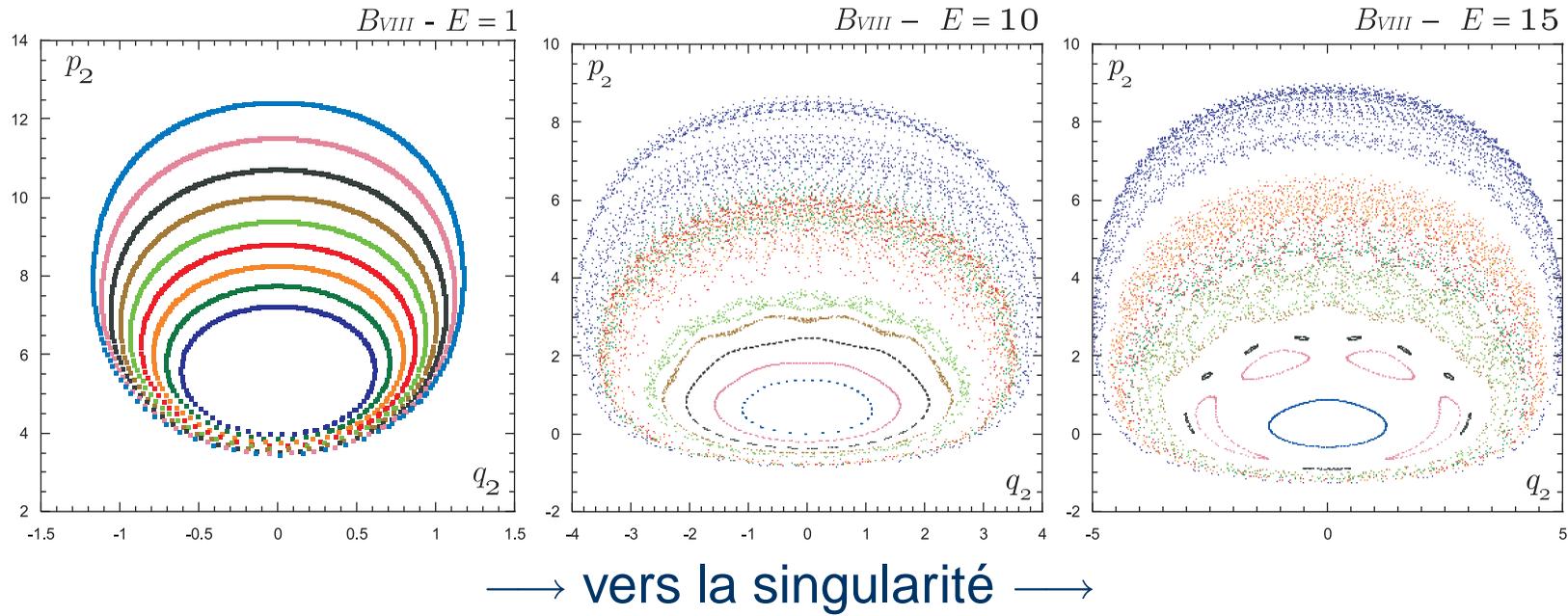
La dynamique dans les billards B_{IX}
pas simple !

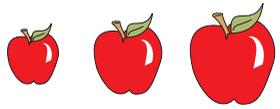


Sections de Poincaré

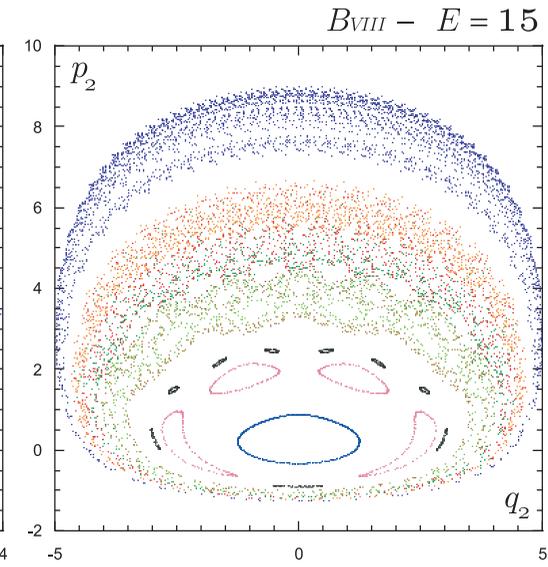
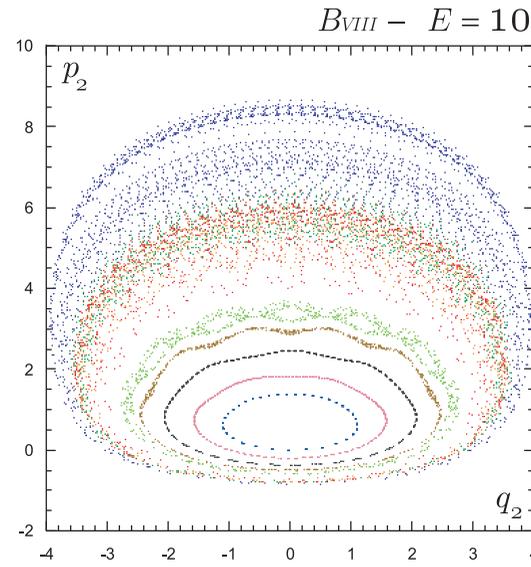
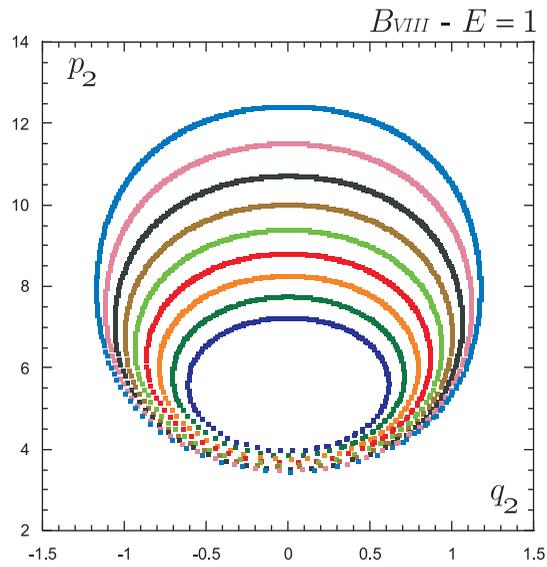


Sections de Poincaré

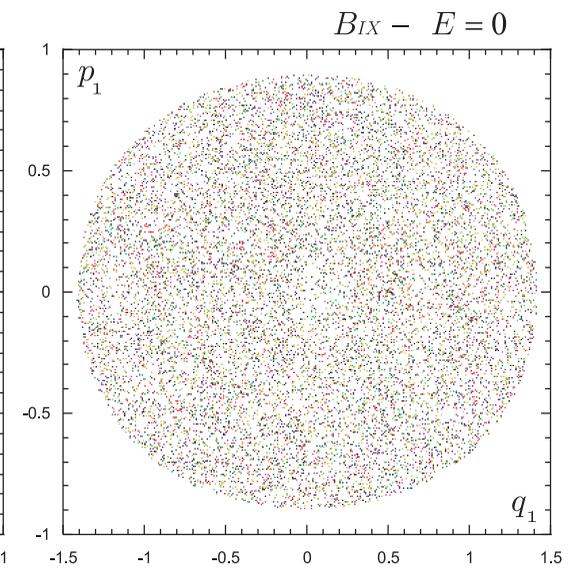
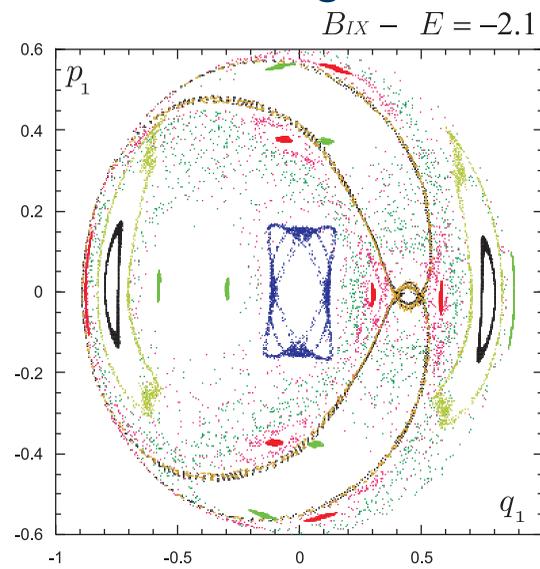
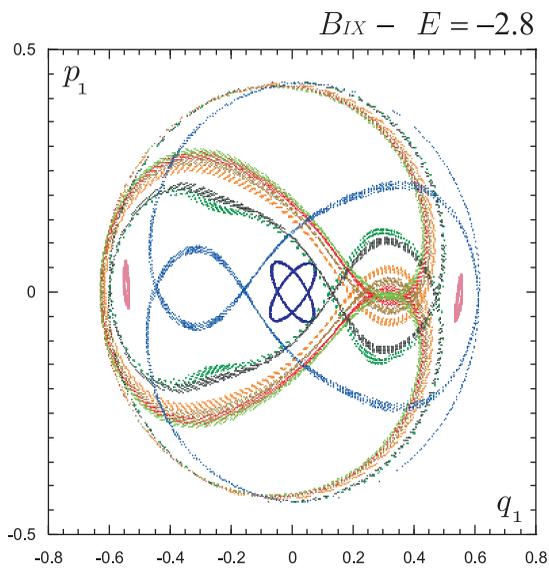




Sections de Poincaré

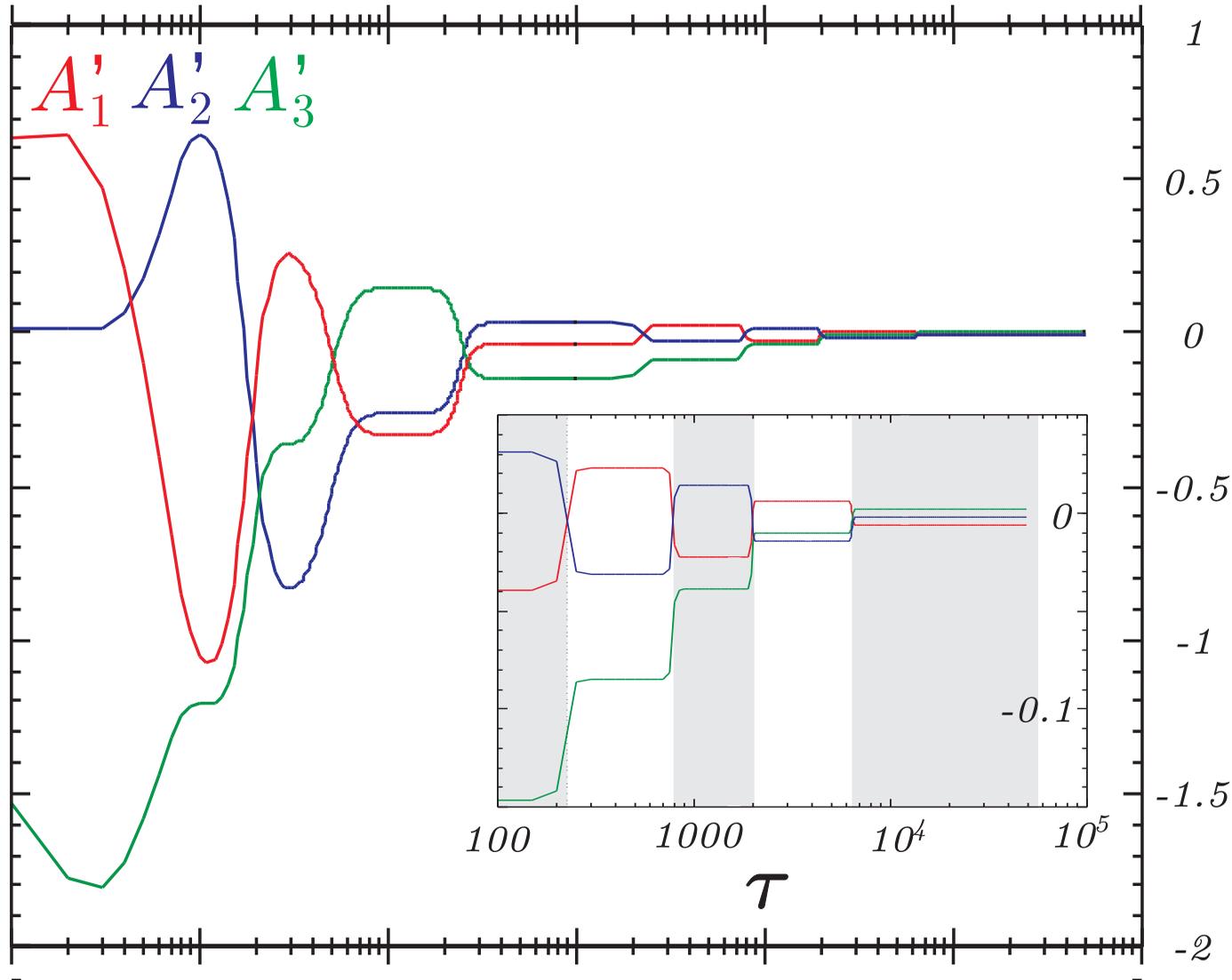


→ vers la singularité →





Dynamique BKL B_{IX} vide

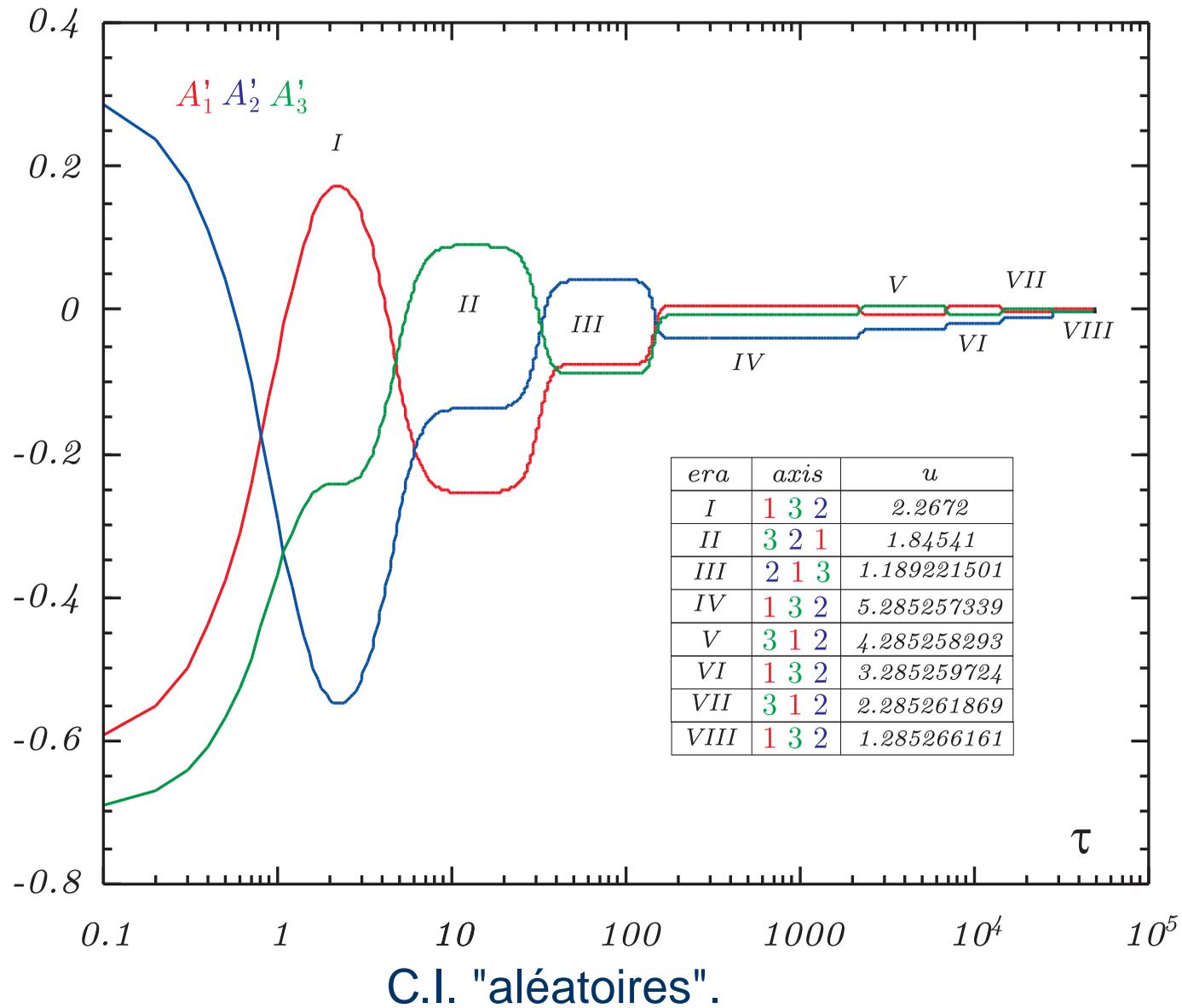


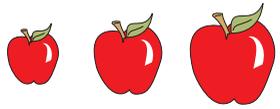
<i>era</i>	<i>axis</i>	<i>u</i>
<i>I</i>	● ● ●	2.31
<i>II</i>	● ● ●	1.272
<i>III</i>	● ● ●	3.714502573
<i>IV</i>	● ● ●	2.714620352
<i>V</i>	● ● ●	1.714827418
<i>VI</i>	● ● ●	1.399961514
<i>VII</i>	● ● ●	2.497215986

C.I. "aléatoires".

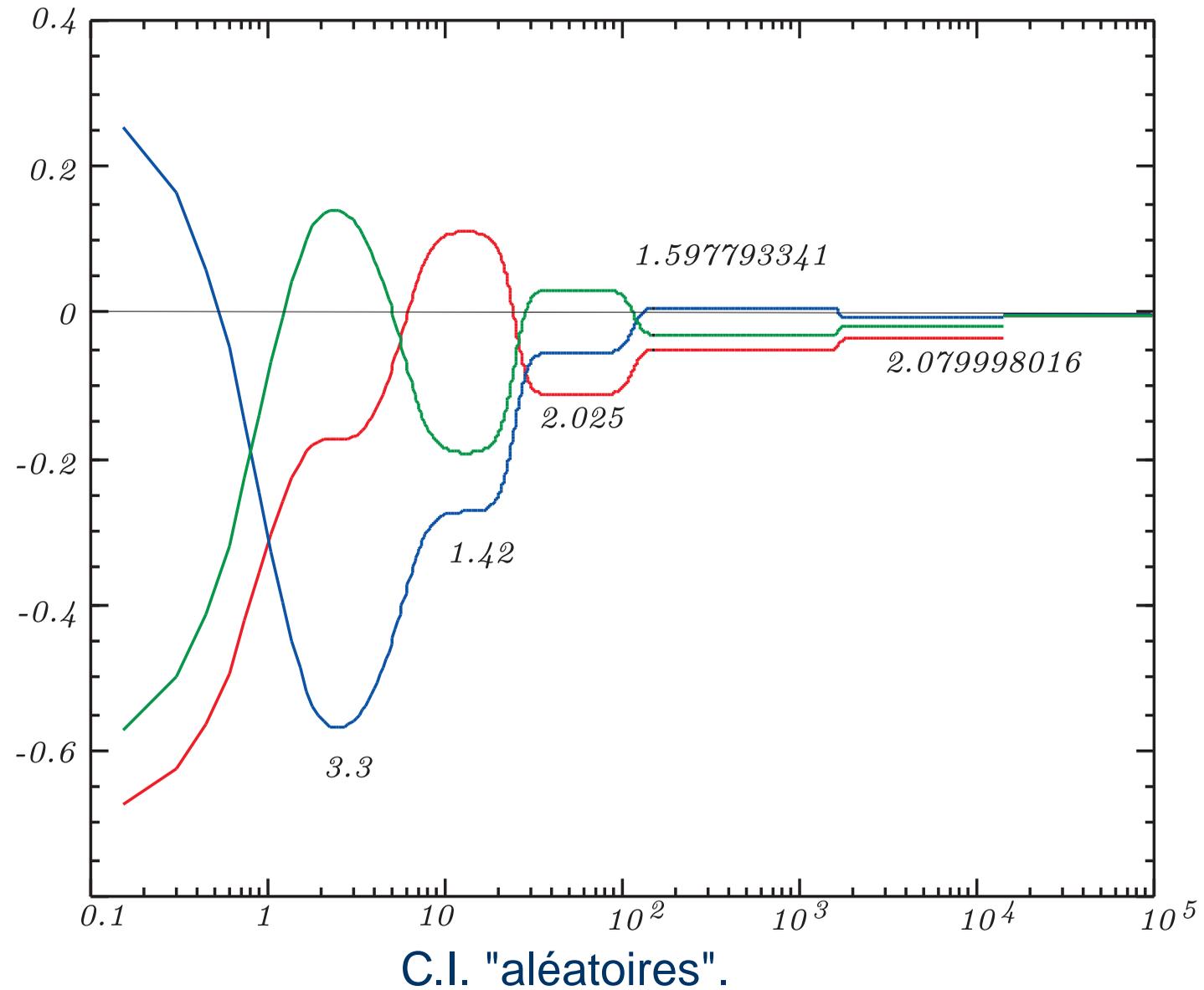


Dynamique BKL B_{IX} $\omega = 1/3$





Dynamique BKL $B_{IX} \omega = 1$





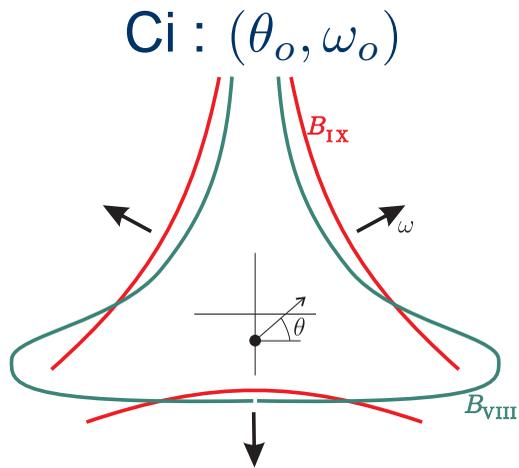
Attracteurs

e.g. [Cornish&Lewin,97]



Attracteurs

e.g. [Cornish&Lewin,97]

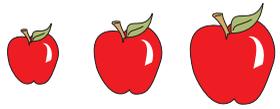


Stop : $u > u_e = 8$

● : $p_1 \rightleftharpoons x_1$

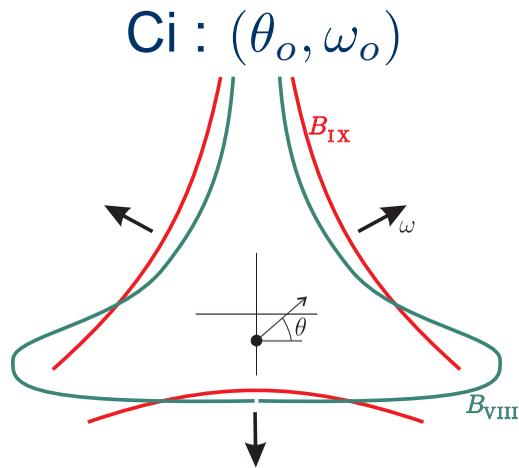
● : $p_1 \rightleftharpoons x_2$

● : $p_1 \rightleftharpoons x_3$



Attracteurs

e.g. [Cornish&Lewin,97]

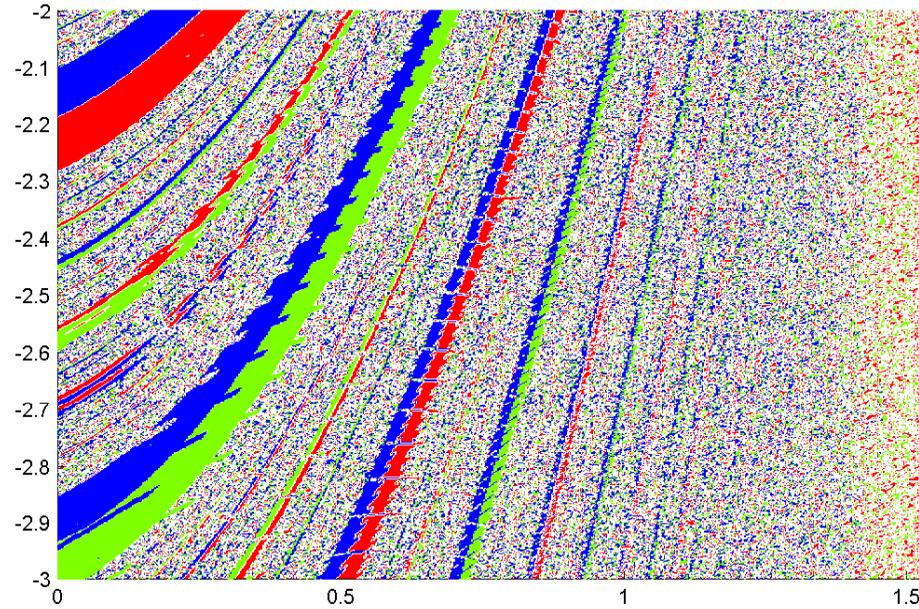


Stop : $u > u_e = 8$

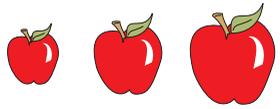
• : $p_1 \rightleftharpoons x_1$

• : $p_1 \rightleftharpoons x_2$

• : $p_1 \rightleftharpoons x_3$

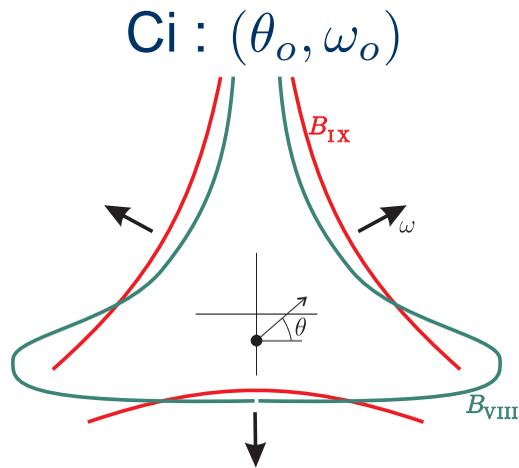


B_{VIII}



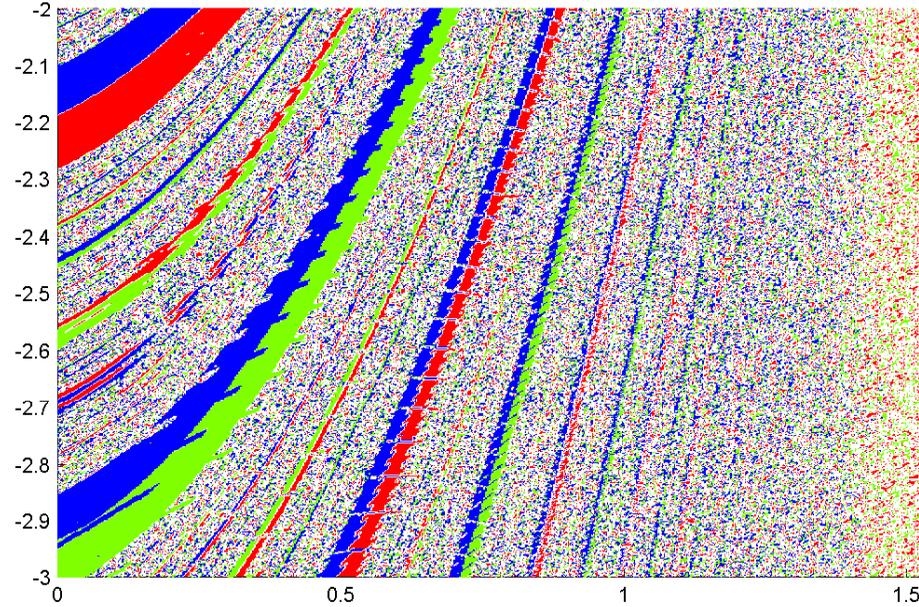
Attracteurs

e.g. [Cornish&Lewin,97]

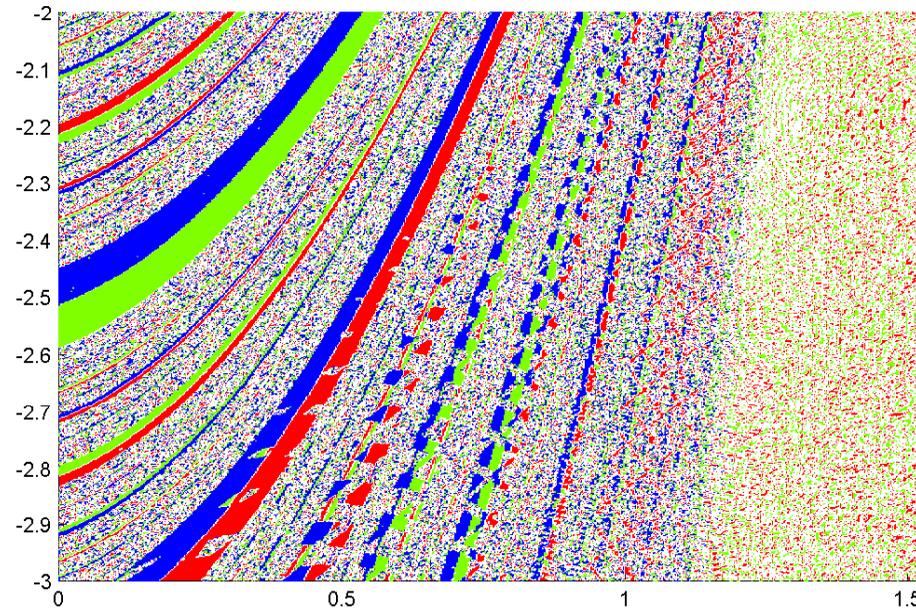


Stop : $u > u_e = \delta$

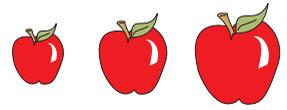
- : $p_1 \rightleftharpoons x_1$
- : $p_1 \rightleftharpoons x_2$
- : $p_1 \rightleftharpoons x_3$



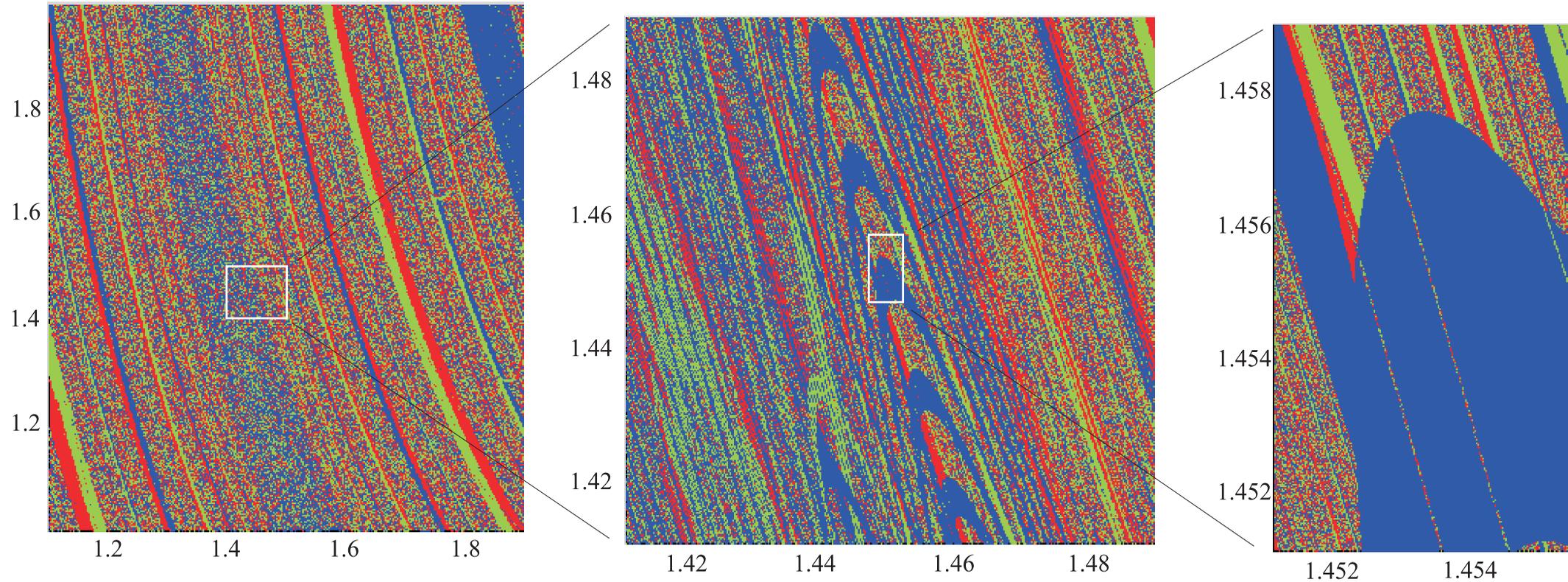
B_{VIII}

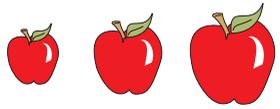


B_{IX} - p. 57/59



Le fractal B_{IX}





Conclusion

