Le mouvement des corps célestes : quand la gravitation rencontre la géométrie !

Jérôme Perez

Comment s'effectue le mouvement de la Terre autour du Soleil, et plus généralement d'une masse m autour d'une masse M sous l'effet unique de la gravitation ?

La réponse est connue depuis fort longtemps mais tout dépend de ce que l'on entend par réponse… Essayons de répondre en faisant principalement de la géométrie ! La réponse sera décomposée en deux parties : la première explique comment en définissant la notion de force Newton a pu introduire la gravitation universelle ; la seconde détaille comment on peut construire le mouvement en ne disposant que de la position et de la vitesse en un instant de la trajectoire et avec les outils de l'époque de Newton, c'est-à-dire très peu de calcul différentiel et beaucoup de géométrie.

Depuis l'antiquité, on avait remarqué que la trajectoire était périodique, on a donc simplement pensé (pendant plus de 15 siècles) qu'il s'agissait d'une orbite circulaire plus ou moins composée. Même si cette affirmation est très correcte dans le cas de la Terre autour du Soleil, Kepler, au début du XVII^{e} siècle, constata qu'il était plus simple et plus direct d'associer cette orbite à une ellipse dont le Soleil occupait l'un des deux foyers. Il généralisa ce résultat à toutes les planètes connues à l'époque en accord avec les mesures dont il disposait. Les premières affirmations un peu moins empiriques (c'est-à-dire déduites d'un raisonnement mathématique) apparurent à la fin de ce même siècle grâce aux travaux de Newton qui fournissent à la physique des outils d'investigation assez généraux.

Les principes de Newton sont nés de la description du mouvement :

1) Un corps isolé est en mouvement rectiligne uniforme : sa vitesse ne varie pas dans le temps, et donc à cette vitesse constante près, son mouvement « est comme rien », c'était une remarque de Galilée contemporain de Kepler…

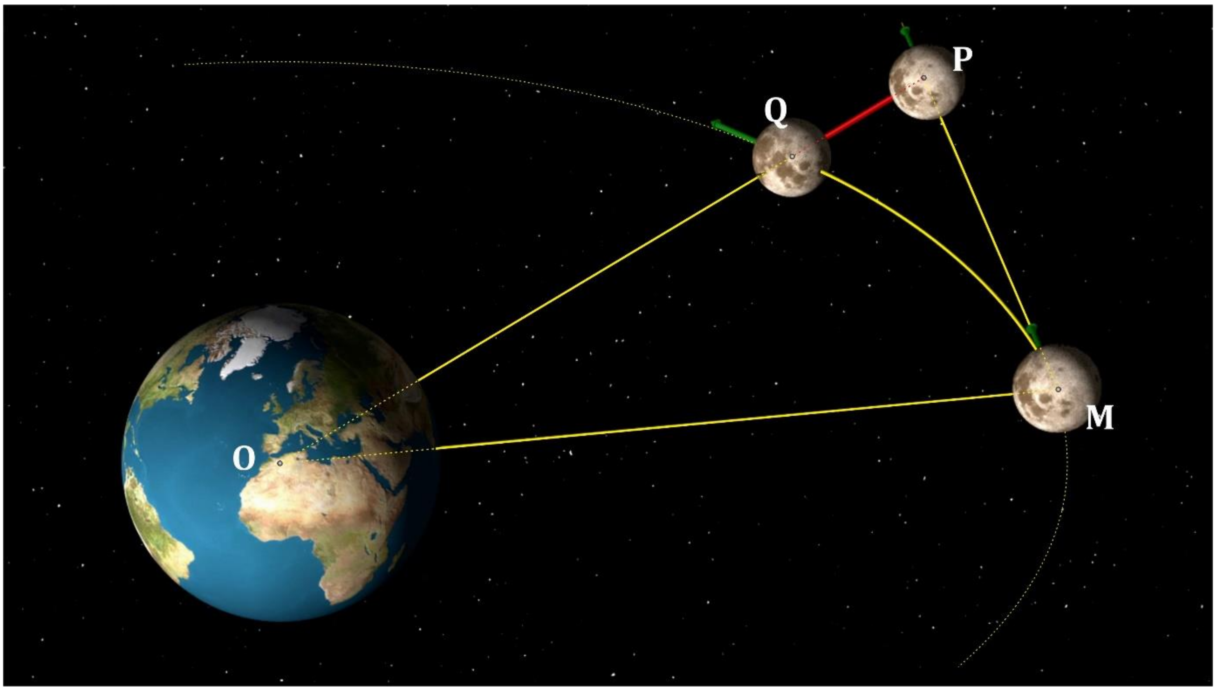
2) Un corps dont la vitesse varie dans le temps est soumis à des forces. C'est là une sorte de définition de la notion de force, et c'est la fameuse équation de Newton qui relie dans les cas simples l'ensemble **F** des forces appliquées à un corps (en fait la somme) à son accélération **a** : **F**=m**a**. La police grasse utilisée pour écrire **a** et **F** indique que ces quantités sont des vecteurs. En effet, l'accélération n'est autre que la variation de vitesse dans le temps or tout le monde sait qu'il faut plus d'une information pour parler d'une vitesse. On parle souvent de la « valeur » de la vitesse, en mathématique on dit sa norme, mais il faut également préciser son sens et l'axe qui porte sa direction. Une vitesse est donc une flèche et une flèche contient plus d'informations qu'un nombre ! On sait additionner les flèches, il suffit de les mettre bout à bout, on peut donc parler de variation de la vitesse et donc d'accélération ! En multipliant la norme de cette variation par la masse, Newton définit la force totale qui appliquée à un corps fait varier sa vitesse.

Expérimentalement, il était nécessaire d'introduire cette masse. Elle permet, en appliquant une même force, d'avoir un effet variable sur la vitesse: pensez à l'action d'une même force sur un moustique et sur un train de banlieue…

Comment Newton a-t-il déduit de ces définitions la force de gravitation universelle ?

Le raisonnement est fort simple et peut s'exposer en quelques lignes…

Une pomme attachée à son pommier est immobile. Puis tout d'un coup elle tombe. Sa vitesse avant de se décrocher de l'arbre était nulle, puis on la voit accélérer jusqu'à s'arrêter brutalement en touchant le sol. Dans toutes ses aventures la vitesse de la pomme a varié, c'est donc que la pomme est soumise à une force ! Quel est l'effet de cette force : faire parcourir 5 mètres à la pomme, sa hauteur de chute avant d'atteindre le sol, en une seconde, vous pouvez vérifier… Pour la Lune, en fait c'est un peu la même chose. Imaginez que la vitesse de la Lune ne varie pas, au moins en direction, comment pourrait-elle rester en orbite autour de la Terre ? Faisons un schéma sans respecter les échelles afin de mieux comprendre !



Si la Lune allait tout droit, sans subir aucune force, en une seconde elle serait au point P. Mais en fait, à cause de la force qu'exerce sur elle la Terre, elle se trouve au point Q. La hauteur de chute est donc la distance PQ. Depuis l'antiquité, on savait que l'orbite de la Lune est quasiment circulaire et uniforme, la vitesse de la Lune en M est donc tangente au cercle orbital et donc perpendiculaire au segment OM. Le vecteur **MP**, contenu dans la droite engendrée par cette vitesse est donc perpendiculaire au vecteur **OM**, ainsi le triangle OMP est rectangle en M. On peut vérifier par ailleurs que la Lune revient à peu près au même endroit dans le ciel tous les 28 jours, et depuis l'antiquité (Aristarque de Samos) on avait déterminé (par des mesures de parallaxe) que la Lune se situait à 60 rayons Terrestres de la Terre. Le rayon Terrestre avait lui aussi été déterminé par les grecs (Eratosthène de Cyrène), il vaut 6400 km. On peut donc calculer la norme de la vitesse de la Lune : elle parcourt un cercle dont on peut déterminer la circonférence en 28 jours, on trouve $v=2\pi \times 60 \times 6400/(28 \times 24 \times 3600) =$ 1 kilomètre par seconde, quel résultat numérique merveilleux : il nous donne la norme du vecteur **MP** qui mesure donc 1 kilomètre. Ainsi dans le triangle rectangle OMP on connait les longueurs MP et OM, le théorème de Pythagore nous donne alors $(OQ+QP)^2=OP^2+MP^2$. Sachant que OQ=OP on peut résoudre une équation du second degré pour trouver QP=1,3 millimètre. Chaque seconde, la Lune tombe d'un peu plus d'un millimètre pour rester en orbite circulaire autour de la Terre, quelle histoire !

L'affaire prend une autre envergure lorsque Newton propose que la force qui fait tomber la pomme est la même que celle qui fait tomber la Lune, et que cette force ne dépend que de la distance au centre de la Terre : les pommes du Lincolnshire, comme celles d'Australie et tout comme la Lune se déplacent en direction du centre de la Terre… Cette force serait donc universelle, mais comment dépend elle de la distance ? Pour le savoir il faut comparer ses effets : la pomme située à un rayon Terrestre du centre de la Terre tombe de 5 mètres en une seconde, la Lune située 60 fois plus loin ne tombe que de 1,3 mm soit exactement $5/60^2$… Il n'en faut pas plus pour que Newton propose que cette force de gravitation universelle dépende de l'inverse du carré de la distance. Le reste est une affaire d'unités : il faut que l'expression de cette force dépende des deux masses et que si l'une de ces deux masses est nulle, la force soit nulle. Sans masse il n'y a pas de gravitation chez Newton… Le plus simple est d'introduire le produite de ces deux masses au numérateur de la norme de cette force. Il faut ensuite ajuster cette norme aux effets observés et faire en sorte que les unités de la formule obtenue soient celles d'une force, c'est-à-dire celles d'une masse multipliée par une accélération ! Il est donc conduit à introduire ce que l'on appelle en physique une constante fondamentale qui règle ce genre de problème, il fixe $G = 6{,}67\text{x}10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^2. Il obtient donc

$$\mathbf{F}_{\mathrm{M}\to\mathrm{m}} = -\,G\,\frac{\mathrm{M\,m}}{\mathrm{r}^2}\,\mathbf{e_r}$$

Cette formule donne l'expression de la force de gravitation $\mathbf{F}_{\mathrm{M}\to\mathrm{m}}$ avec laquelle le corps de masse M attire celui de masse m, ces deux masses étant supposées ponctuelles et séparées d'une distance r. Le vecteur $\mathbf{e_r}$ est un vecteur de norme 1, dirigé de M vers m (ce qui explique le signe – car $\mathbf{F}_{\mathrm{M}\to\mathrm{m}}$ attire m vers M) : il sert à bien définir la direction et le sens de la force. La constante de gravitation G sert comme nous l'avons expliqué à « rétablir » les choses.

On peut retrouver une explication plus visuelle de ce raisonnement dans l'épisode 2 des vidéos de l'auteur [1]

Cette force est donc symétrique dans l'échange des masses mais son effet sur chacune d'elle peut varier en fonction de l'importance relative de celles-ci. Par exemple la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la Terre met celle-ci en mouvement en faisant varier sa vitesse. Par contre l'influence gravitationnelle de la Terre sur le Soleil est souvent négligeable en première approximation et le Soleil supposé fixe dans de nombreux problèmes.

Comment avec cette expression de la force peut-on obtenir géométriquement l'ensemble des points de la trajectoire d'un corps sous l'influence de la gravitation d'un autre ? C'est un peu plus technique mais pas trop difficile quand même…

Toute l'astuce consiste à déduire le lieu des points de la trajectoire de celui du lieu des vitesses successives. On appelle cette courbe un hodographe. Ces idées sont dues à Hamilton [2] dans la lignée de celles de Newton, mais presque deux siècles plus tard. La variation temporelle dont il est question dans la loi de Newton se décrit en mathématiques par la notion de dérivée par rapport au temps. Appliquée à un vecteur, décrit par des coordonnées dans un référentiel fixe, cette dérivée revient simplement à dériver chacune de ses coordonnées. On peut le démontrer en appliquant la définition de la dérivée à un vecteur dépendant du temps. Si l'on considère deux corps ponctuels isolés de masses M et m telles que M est très grand devant m, on peut considérer que l'action de m sur M ne modifie pas la vitesse de M qui peut donc être supposé fixe (ou en mouvement rectiligne uniforme…). Si l'on note $\mathbf{r} = \mathbf{Mm} = \mathrm{r}\,\mathbf{e}_\mathrm{r}$ le vecteur position de m par rapport à M et $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{dt}}$ sa vitesse, le principe fondamental de la dynamique de Newton s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = -\,\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}^2}\,\mathbf{e}_\mathbf{r}$$

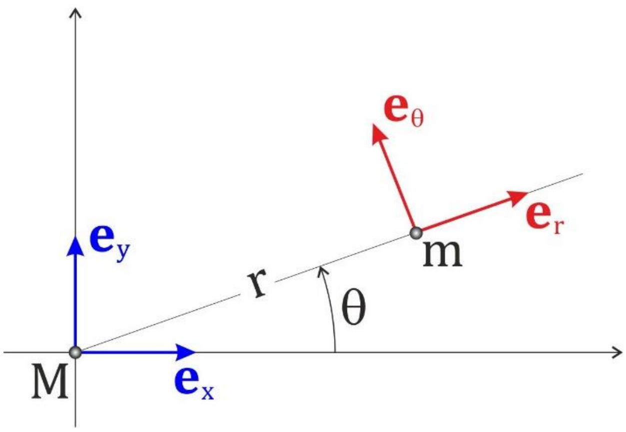
La première conséquence que l'on peut tirer de cette relation est le fait que $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ restent dans le même plan lors du mouvement. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que pour que la masse m sorte du plan déterminé par $\mathbf{e}_\mathrm{r}$ et $\mathbf{v}$, il faudrait que l'accélération $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}}$ (sans laquelle la direction d'une trajectoire ne peut changer) « sorte » elle-même du plan, ce qui est impossible puisque sa direction est celle de $\mathbf{e}_\mathrm{r}$.

Le fait que $\mathbf{a}$ soit dirigé en permanence par $\mathbf{e}_\mathrm{r}$ permet également de montrer que le vecteur $\mathbf{L}$ orthogonal à $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ et de norme égale à l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteur est constant. Il n'évolue pas dans le temps alors que $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ varient. Ce résultat avait également été observé empiriquement par Kepler et constituait sa seconde loi.

La difficulté du problème posé par Newton réside en partie dans le fait que le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\mathbf{r}$ dirigeant l'axe (Mm) varie au cours du temps. En effet, si M peut être supposé fixe ce n'est pas le cas de m qui subit l'influence gravitationnelle du corps lourd : la distance r est une fonction du temps, le vecteur $\mathbf{e}_\mathbf{r}$ ne change pas de norme car il reste unitaire mais il change de direction en suivant la masse m au gré de son mouvement.

Pour résoudre le problème du mouvement Newton commence par un peu de calcul différentiel (ou théorie des fluxions comme il disait), suivons sa piste pour obtenir un résultat assez méconnu du grand public mais très utile pour ses implications géométriques : l'hodographe de ce problème est inclus dans un cercle de centre fixe.

Choisissons un système de référence fixe dans lequel on va pouvoir décomposer simplement le vecteur unitaire $\mathbf{e}_\mathrm{r}$, on parle de repère cartésien en mathématique ou galiléen en physique. Choisissons ce repère orthonormé ($\mathbf{e}_\mathrm{x}$, $\mathbf{e}_\mathrm{y}$) et faisons un nouveau dessin de la situation dans le plan contenant le mouvement.



Il est clair sur ce schéma que

$$\mathbf{e}_r = \cos(\theta)\,\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\,\mathbf{e}_y$$

La variabilité temporelle de $\mathbf{e}_r$ est ainsi transportée dans celle de $\theta = \theta(t)$, mais les vecteurs $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ sont désormais fixes.

Nous pouvons donc dériver $\mathbf{e}_r$ et obtenir

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = [-\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_y]\frac{d\theta}{dt}$$

On remarque alors que le vecteur $\mathbf{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\,\mathbf{e}_y$ est également unitaire et qu'il correspond à $\mathbf{e}_r$ tourné de $\pi/2$: $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r(\theta + \pi/2)$. Le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ est donc orthonormé, on le nomme repère polaire local, il est local car il faut le reconstruire à chaque instant ! En dérivant $\mathbf{e}_\theta$ par rapport au temps la rotation continue, on vérifie sans peine que $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_r$ soit $\mathbf{e}_r = -\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$.

En utilisant ce dernier résultat dans le principe fondamental de la dynamique il vient

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\,\mathbf{e}_r = +\frac{GM}{r^2\frac{d\theta}{dt}}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$$

Mais on montre facilement par ailleurs que $r^2\frac{d\theta}{dt}$ n'est autre que l'aire du parallélogramme formé par la position et la vitesse, que l'on a vue constante : ainsi la quantité $k = \frac{GM}{r^2\frac{d\theta}{dt}}$ ne dépend pas du temps c'est une constante du mouvement. Le principe fondamental de la dynamique se résume donc pour ce problème en

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} - k\,\mathbf{e}_\theta) = 0$$

Le vecteur de Hamilton $\mathbf{h} = \mathbf{v} - k\,\mathbf{e}_\theta$ est donc constant ! On remarque aussi qu'il est dans le plan de l'orbite. Si, en plus de la position $\mathbf{r}$ qui permet de définir $\mathbf{e}_\theta$, on connait le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ en un instant arbitraire t du mouvement, on peut construire $\mathbf{h}$ à cet instant. Mais comme il ne varie pas… il va nous servir à déterminer le reste de la trajectoire !

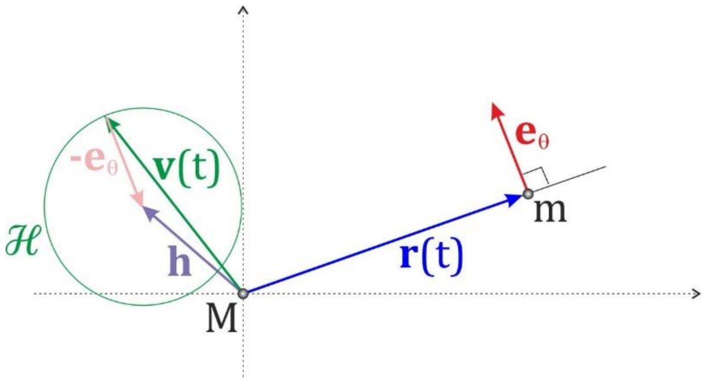
A chaque instant, le vecteur vitesse s'écrit $\mathbf{v}(t) = \mathbf{h} - k\,\mathbf{e}_\theta(t)$ mais nous avons plus haut l'expression de $\mathbf{e}_\theta(t)$ à chaque instant, ainsi en appelant h_x et h_y les coordonnées cartésiennes du vecteur constant $\mathbf{h}$ on obtient :

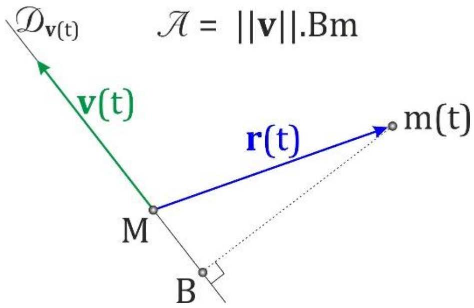
$$\mathbf{v}(t) = \{h_x + k\sin[\theta(t)]\}\mathbf{e}_x + \{h_y - k\cos[\theta(t)]\}\mathbf{e}_y$$

Cette relation permet de voir facilement que l'hodographe $\mathcal{H}$, lieu des vecteurs vitesses paramétrés par le temps, est contenu dans un cercle de rayon k et dont le centre est pointé par le vecteur $\mathbf{h}$. Précisons que $\mathcal{H}$ sera tout le cercle si $\theta(t)$ parcours tout le segment $[0,2\pi]$, ou seulement un arc de ce cercle sinon. Dans le cas des orbites périodiques des planètes autour du Soleil on comprend de l'hodographe est le cercle complet…

Après ce tout petit épisode de calcul différentiel vectoriel, revenons à la géométrie !

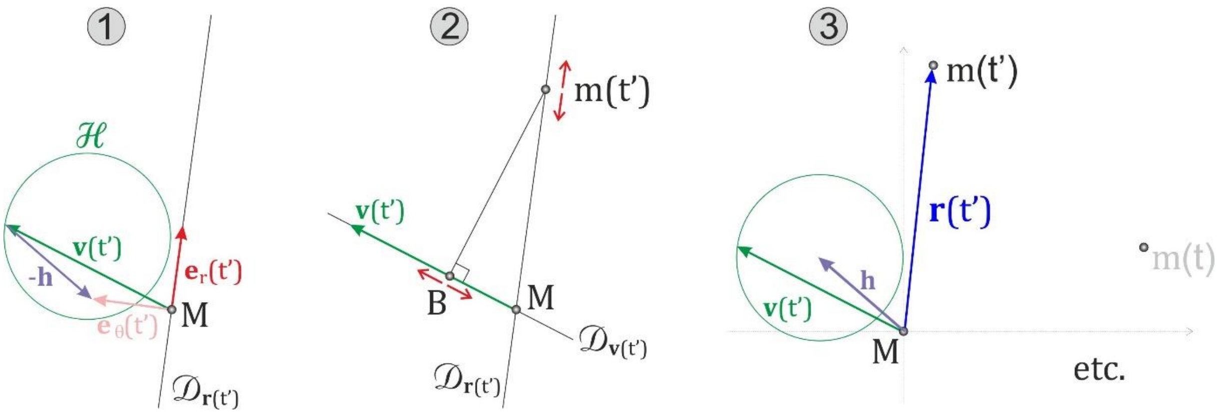
On peut toujours choisir des unités physiques telles que k=1, et l'on peut même construire ce cercle uniquement à la règle et au compas ! Sur le graphique ci-contre nous avons fait le dessin en prenant comme origine des vitesses le point M origine de notre repère cartésien, mais n'oublions pas que $\mathbf{v}(t)$ représente la vitesse, supposée connue, du point m à l'instant t.





Procédons à une mesure préliminaire, celle de $\mathcal{A}$, l'aire du parallélogramme formé par la position et la vitesse à l'instant t. Il suffit pour cela de projeter orthogonalement en B, le vecteur position $\mathbf{r}(t)$ sur la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{v}(t)}$ engendrée par le vecteur vitesse. C'est l'objet de la figure ci-contre.

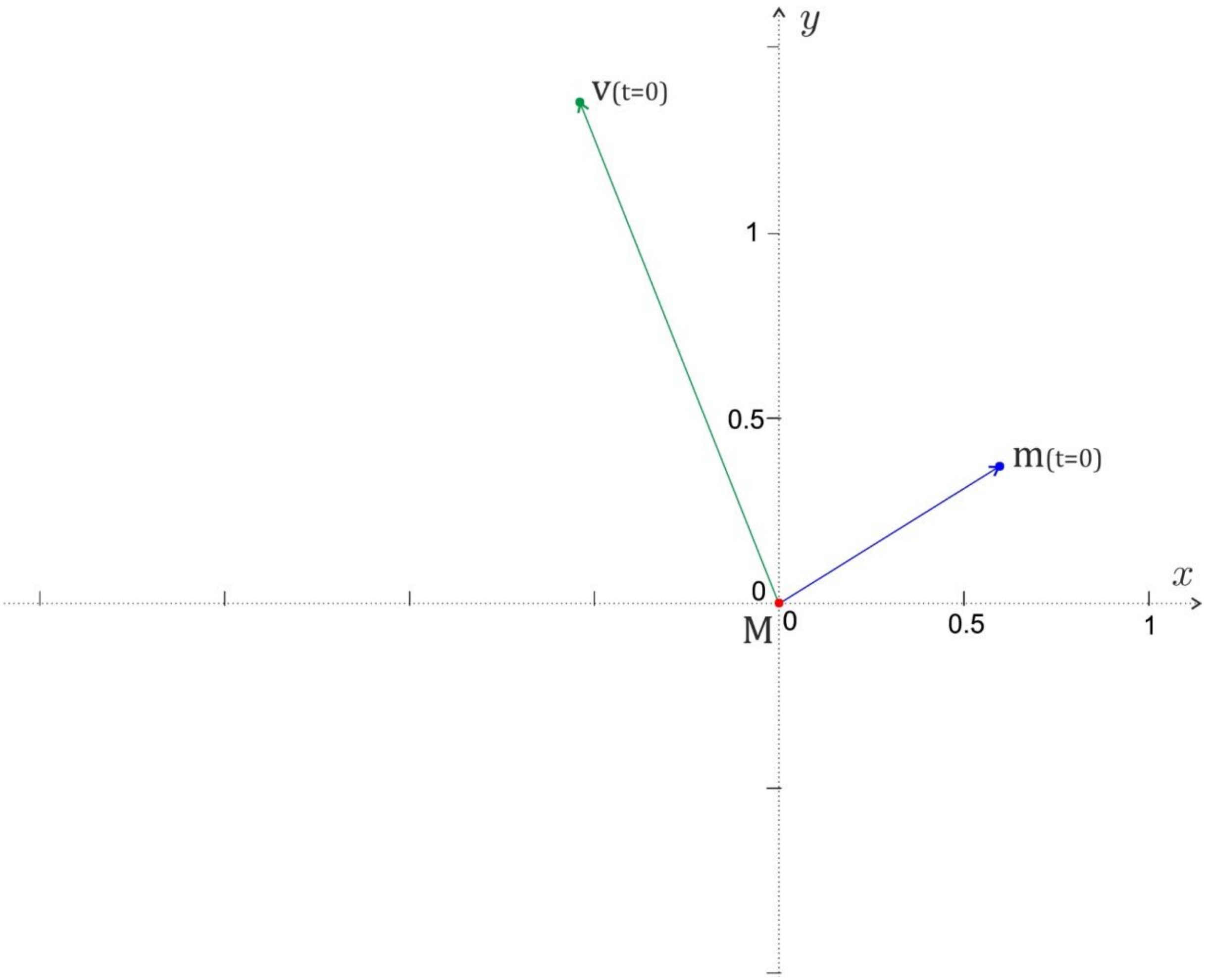
Ceci étant fait, pour chaque nouveau point de la trajectoire, correspondant à un instant t', il faut procéder en 3 étapes :



1) Admettons que l'hodographe soit tout le cercle (orbite périodique), en choisissant un autre point sur l'hodographe, on construit un nouveau vecteur vitesse $\mathbf{v}(t')$. Le vecteur de Hamilton constant, permet alors de construire $-\mathbf{e}_\theta(t')=\mathbf{v}(t')-\mathbf{h}$. En faisant tourner ce vecteur de $-\pi/2$, on obtient le vecteur unitaire $\mathbf{e}_r(t')$ qui donne la direction de la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{r}(t')}$.
2) La droite $\mathcal{D}_{\mathbf{r}(t')}$ contient la masse m à l'instant t', comment déterminer sa position ? Il suffit d'utiliser le fait que l'aire du parallélogramme formé par la position et la vitesse n'a pas changé ! En déplaçant m(t') sur la droite $\mathcal{D}_{\mathbf{r}(t')}$, sa projection B orthogonale sur $\mathcal{D}_{\mathbf{v}(t')}$ varie également.
3) Dès que $Bm(t')=\mathcal{A}/||\mathbf{v}'||$ on a trouvé le vecteur $\mathbf{r}(t')$…

En supposant l'orbite fermée on peut construire point par point l'ensemble du le mouvement de m autour de M, En calculant le produit scalaire entre $\mathbf{h}$ et $k\mathbf{e}_\theta$ de deux manières différentes (voir par exemple [3]), on peut montrer que l'orbite est en fait une conique dont l'excentricité est la norme de $\mathbf{h}$ divisée par k.

Les figures précédentes étaient explicatives, puisque c'est comme un jeu passons à un véritable cas avec des unités adaptées au dessin : tracez l'orbite du corps de masse m dont la position est représentée en bleu et la vitesse en vert sur le graphique ci-dessous, en n'utilisant uniquement une règle et un compas !



Tout ceci peut sembler bien futile à une époque où la résolution de ce problème n'est plus enseignée que dans des classes avancées et à très peu d'étudiants, qui plus est par des méthodes différentes et nécessitant beaucoup plus de connaissances, voir [4] par exemple. Il était temps de revenir aux sources et de comprendre que physique, mathématique, mécanique, géométrie sont intimement liées et avant tout sources de plaisir…

N'oublions pas non plus que lorsque Newton a résolu ce problème il ne disposait pas de toutes ces méthodes modernes utilisées intensivement qu'à partir du XIX^{e} siècle, il a donc fait à peu près comme nous l'avons expliqué… en se servant très peu du calcul différentiel, qu'il inventa pour l'occasion, et beaucoup de géométrie. Mais cela nous l'avons oublié !

Bibliographie pour aller plus loin

[1] https://uma.ensta-paristech.fr/conf/expansion/index.php

[2] W. R. Hamilton*, The hodograph, or a new method of expressing in symbolic language the Newtonian law of attraction,* Proceedings of the Royal Irish Academy III, 344–353 (1845)

[3] E. Guillaumín-España and A. L. Salas-Brito, *Tracing a planet's orbit with a straight edge and a compass with the help of the hodograph and the Hamilton vector*, American Journal of Physics, **71**, 585 (2003)

[4] J. Perez, *Gravitation classique : Problème à N corps, de 2 à l'infini*, les Presses de l'ENSTA, 2011