

Lagrange et la méthode de variation de la constante en astronomie

Jérôme Perez

29 août 2015

Table des matières

1	Le problème des 2 corps en astronomie	1
1.1	Equation du mouvement	1
1.2	La trajectoire elliptique	2
2	Problème des deux corps perturbé	4
2.1	Variation des constantes	4
2.1.1	Méthode générale	4
2.1.2	Application de la méthode au problème des 2 corps perturbés.	4
3	Théorie de la Lune	6
3.1	Le calcul	6
3.2	Erreur ou progrès	8

1 Le problème des 2 corps en astronomie

1.1 Equation du mouvement

Le problème du mouvement de 2 corps ponctuels A et B de masse m_A et m_B (dit problème de Képler) a en fait été résolu par Isaac Newton à la fin du XVII^{ème} siècle. Dans le référentiel attaché au corps A , l'équation du mouvement de B s'écrit

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = 0 \quad \text{avec } \mu = G(m_A + m_B), \mathbf{r} = \overrightarrow{AB} \text{ et } r = |\mathbf{r}|, \quad (1)$$

Il est bien connu que le moment cinétique \mathbf{L} par unité de masse de B est constant, le mouvement s'effectue donc dans un plan où l'on repère le point B par ses coordonnées polaires (r, ϕ) . La conservation du moment cinétique rend la quantité $C = r^2 d\phi/dt$ constante. On montre ensuite facilement que l'équation reliant r et ϕ est celle d'une conique de foyer A de paramètre focal p et d'excentricité e :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \omega)} \quad (2)$$

avec

$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2\xi}{\mu^2}} \quad p = \frac{C^2}{\mu} \quad (3)$$

La quantité ξ représente l'énergie mécanique totale par unité de masse de la particule B et ω est une constante d'intégration. Si B est lié à A , c'est à dire si $\xi < 0$, on vérifie que $e \in [0, 1[$, la trajectoire est confinée sur un cercle si $e = 0$ ou sur une ellipse si $0 < e < 1$. Par contre, si B est libre, c'est-à-dire si $\xi \geq 0$, alors $e \geq 1$, la trajectoire n'est pas confinée : c'est une parabole si $e = 1$ ou une hyperbole pour $e > 1$.

1.2 La trajectoire elliptique

De toutes les trajectoires précédentes, l'ellipse est la plus courante en astronomie. Les trajectoires non confinées correspondent à des événements exceptionnels (car non périodiques) comme des "collisions" ou des transferts d'énergie.

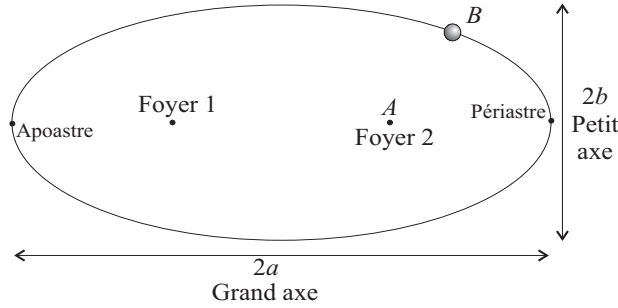


Fig. 1 : Caractéristiques de la trajectoire elliptique

Les points caractéristiques de la trajectoire elliptique (ou mouvement képlerien) sont :

- Le périastre (périhélie si A est le soleil, périégée si A est la terre) : lorsque B est au plus proche de A , c'est à dire lorsque $\phi = \omega$, nous avons alors $r = r_{\min} = p/(1 + e)$.
- L'apoastre (aphélie si A est le soleil, apogée si A est la terre) : lorsque B est au plus loin de A , c'est à dire lorsque $\phi = \omega + \pi$, nous avons alors $r = r_{\max} = p/(1 - e)$.

Le demi grand axe de l'ellipse a est égal à la demi somme du périastre et de l'apoastre

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = \frac{p}{1 - e^2} \quad (4)$$

et le demi petit axe $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Il est alors facile d'exprimer l'énergie ξ et le module de la vitesse v en fonction du demi grand axe

$$\xi = -\frac{\mu}{2a} \quad \text{et} \quad v = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

la vitesse est donc maximale au périastre et minimale à l'apoastre.

On montre de plus que le temps T mis par B pour parcourir la totalité de l'ellipse est constant : C'est la période $T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$.

Pour repérer de façon univoque un objet en mouvement képlerien, outre l'instant t d'observation, il est nécessaire de fixer les 6 constantes d'intégration inhérentes aux 3 équations différentielles du second ordre provenant du principe fondamental de la dynamique résumées dans l'équation (1).

En mécanique du point, ces constantes sont généralement des conditions initiales, en astronomie de telles quantités ne peuvent évidemment être atteintes et l'on préfère utiliser des constantes plus observables.

Le repérage en astronomie est l'objet de la figure 2.

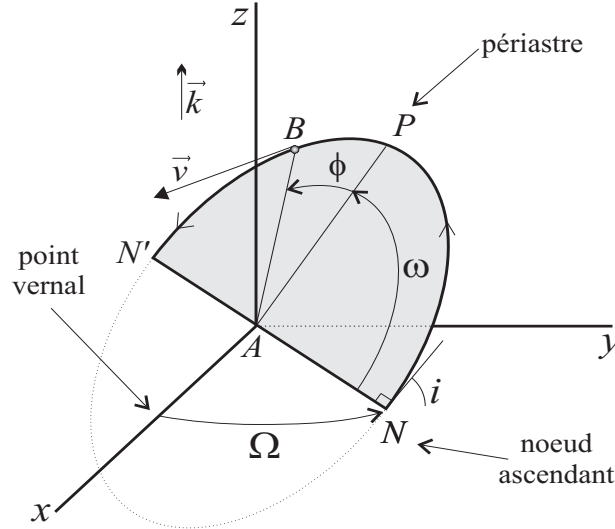


Fig. 2 : Repérage du plan orbital dans l'espace et du point B sur l'ellipse.

L'espace est rapporté au trièdre $Axyz$, il est tout d'abord nécessaire de connaître l'inclinaison i du plan orbital par rapport au plan de base Axy , ainsi que la position de la ligne d'intersection de ces deux plans appelée ligne des noeuds. Cette ligne coupe l'orbite en deux points opposés : Le noeud ascendant N , défini par $\vec{v} \cdot \vec{k} \Big|_N = v_z(N) > 0$, B passe au dessus du plan de base, et le noeud descendant N' , défini par $\vec{v} \cdot \vec{k} \Big|_{N'} = v_z(N') < 0$, B passe au dessous du plan de base.

La direction Ax est celle dite du point vernal, c'est une référence astronomique. L'angle $(Ax, AN) = \Omega$, entre les directions du point vernal et du noeud ascendant est appelé longitude du noeud ascendant. L'angle $(AN, AP) = \omega$ est appelé argument du périastre, il est mesuré dans le plan de l'orbite entre la ligne des noeuds et la direction du périastre de l'orbite. L'anomalie vraie ϕ est définie dans le plan de l'orbite à partir du périastre, soit $\phi = (AP, AB)$.

L'inclinaison de l'orbite est comptée de 0 à 180° . Si $0^\circ < i \leq 90^\circ$ le mouvement est dit direct, si par contre $90^\circ < i \leq 180^\circ$ le mouvement est dit rétrograde.

Nous obtenons donc finalement cinq éléments déterminant univoquement la trajectoire dans l'espace : Le demi grand axe de l'ellipse a , son excentricité e , son inclinaison i par rapport à un plan de référence, la longitude du noeud ascendant Ω et l'argument du périastre ω .

Afin de compléter la collection de constantes on utilise un paramètre temporel τ : L'instant du passage au périastre. Ce dernier est une durée correspondant au temps écoulé entre une date de référence et l'instant du premier passage de B au périastre depuis la référence.

Les 6 constantes $\lambda_{i=1,\dots,6} = \{a, e, i, \omega, \Omega, \tau\}$ complétées de l'instant d'observation définissent parfaitement la position de B dans le plan et sur l'ellipse qu'il décrit autour de A . Cet ensemble constitue ce que l'on appelle les éléments elliptiques.

2 Problème des deux corps perturbé

2.1 Variation des constantes

2.1.1 Méthode générale

Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$a_n(t) y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y^{(1)}(t) + a_0(t) y(t) = f(t) \quad (6)$$

où les fonctions $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ sont connues ainsi que le second membre $f(t)$. L'inconnue est la fonction $y(t)$ et ses dérivées $n^{\text{ièmes}}$, $y^{(n)}(t)$. On montre facilement que l'ensemble des solutions de l'équation (6) est un espace affine $E = \{y_p(t) + E_o\}$ de dimension n . La fonction $y_p(t)$ est une solution particulière de (6) et E_o l'espace vectoriel de dimension n rassemblant toutes les solutions de l'équation (6) dans laquelle on a pris $f(t) \equiv 0$ (Equation sans second membre).

Si l'on connaît n fonctions $y_{i=1..n}$ solutions indépendantes de l'équation sans second membre, E_o est donc simplement une combinaison linéaire de ces fonctions

$$E_o = \left\{ y(t) \mid \exists (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, y(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t) \right\} \quad (7)$$

Joseph-Louis Lagrange montra au début du XIX^{ème} siècle que l'on pouvait toujours écrire la solution particulière nécessaire à la définition de E sous la forme

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) y_i(t) \quad (8)$$

où les fonctions $C_1(t), \dots, C_n(t)$ sont de nouvelles inconnues du problème. Les constantes c_i deviennent des fonctions, d'où le nom de la méthode ...

Pour ne pas introduire de degré de liberté supplémentaire dans le problème, il est nécessaire d'imposer un ensemble de $n - 1$ contraintes indépendantes liant ces nouvelles inconnues. Un choix astucieux de ces contraintes permet toujours de ramener l'ensemble des équations vérifiées par les $C_i(t)$ à n équations de la forme

$$\forall j = 1, \dots, n \quad C'_j(t) = g_j(\{y_{i=1..n}(t)\}, \{a_{i=0..n}(t)\}, \{c_{i=1..n}\}) = g_j(t, \{c_{i=1..n}\}) \quad (9)$$

où les g_j dépendent du problème. Il est donc possible de trouver les n fonctions C_j par un simple calcul d'intégrale. Pour un jeu de constantes $\{c_{i=1..n}\}$, par exemple des conditions initiales, il existe donc une seule solution.

2.1.2 Application de la méthode au problème des 2 corps perturbés.

L'équation (1) du mouvement du problème des deux corps constitue un système d'équations différentielles *non linéaires* du second ordre. Comme nous l'avons vu, à chaque instant t une solution de ce système d'équations est déterminée par la donnée d'un jeu de 6 constantes $\lambda_{i=1..6} = \{a, e, i, \omega, \Omega, \tau\}$. En présence d'une *petite* perturbation on peut toujours faire l'hypothèse que les équations du mouvement dans le référentiel centré sur A , vont s'écrire

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{f} \quad (10)$$

le second membre \mathbf{f} représente alors le vecteur associé à la force perturbatrice introduite dans notre problème. Il est alors raisonnable de penser que si la force perturbatrice est très petite devant la force du problème de Kepler, la trajectoire issue du système (10) s'éloignera très peu de la trajectoire du problème keplerien. L'idée qu'eut Lagrange au tout début du XIX^{ème} siècle est d'appliquer la méthode de variation de la constante à ce problème.

En considérant les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du vecteur position \mathbf{r} , toute solution du problème de Képler s'écrit $x = x(\{\lambda_{i=1,\dots,6}\}, t)$, $y = y(\{\lambda_{i=1,\dots,6}\}, t)$ et $z = z(\{\lambda_{i=1,\dots,6}\}, t)$, en présence d'une petite perturbation (et donc d'un second membre dans l'esprit de Lagrange), on cherche des solutions de la forme $x = x(\{\Lambda_{i=1,\dots,6}(t)\}, t)$, $y = y(\{\Lambda_{i=1,\dots,6}(t)\}, t)$ et $z = z(\{\Lambda_{i=1,\dots,6}(t)\}, t)$.

L'ensemble des six fonctions $\Lambda_i(t)$ forme ce que l'on appelle un système d'éléments *osculateurs elliptiques*, et deviennent les nouvelles inconnues du problème. Pour ne pas augmenter le nombre de degrés de liberté du système il convient d'introduire 3 contraintes indépendantes arbitraires. Un choix astucieux consiste à poser

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial \Lambda_i} \frac{d\Lambda_i}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y}{\partial \Lambda_i} \frac{d\Lambda_i}{dt} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z}{\partial \Lambda_i} \frac{d\Lambda_i}{dt} = 0 \quad (11)$$

En faisant l'hypothèse supplémentaire que la force perturbatrice dérive entièrement d'un potentiel perturbateur V , c'est-à-dire

$$\exists V(x, y, z), \quad \mathbf{f} = \text{grad}V \quad (12)$$

On peut montrer (c'est un calcul plus long que compliqué ...) que les équations du mouvement du problème perturbé s'écrivent sous forme matricielle

$$L \mathbf{\Lambda} = \mathbf{U} \quad (13)$$

La matrice L dite de Lagrange est une matrice carrée d'ordre 6 dont les coefficients sont des fonctions appelées crochets de Lagrange.

$$L_{ij}(t) = [\Lambda_j, \Lambda_i] = \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Lambda_i} - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial x}{\partial \Lambda_i} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Lambda_i} - \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial y}{\partial \Lambda_i} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Lambda_i} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Lambda_j} \frac{\partial z}{\partial \Lambda_i} \right) \quad (14)$$

Le vecteur $\mathbf{\Lambda} = [\Lambda_i(t)] = [a(t), e(t), i(t), \omega(t), \Omega(t), \tau(t)]$ regroupe les éléments osculateurs elliptiques et le vecteur \mathbf{U} est le gradient du potentiel perturbateur par rapport à ces mêmes éléments

$$\mathbf{U} = \left[\left[\frac{\partial V}{\partial \Lambda_i} \right] \right] \quad (15)$$

On montre alors que la matrice L est toujours inversible et même diagonalisable. De lourds calculs permettent de déterminer tous ses coefficients, et d'obtenir de nouvelles équations pour le problème à 2 corps perturbé. En introduisant le *moyen mouvement* $n = 2\pi/T$, elles s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= - \left(\frac{2}{n^2 a} \right) \frac{\partial V}{\partial \tau} & \frac{de}{dt} &= - \left(\frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \right) \frac{\partial V}{\partial \tau} - \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 a e} \right) \frac{\partial V}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \right) \frac{\partial V}{\partial i} & \frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 e} \right) \frac{\partial V}{\partial e} - \left(\frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \right) \frac{\partial V}{\partial i} \\ \frac{d\tau}{dt} &= \left(\frac{2}{n^2 a} \right) \frac{\partial R}{\partial a} + \left(\frac{1-e^2}{n^2 a^2 e} \right) \frac{\partial V}{\partial e} & \frac{di}{dt} &= \left(\frac{\cot i}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \right) \frac{\partial V}{\partial \omega} - \left(\frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \right) \frac{\partial V}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (16)$$

système communément appelé "équations planétaires de Lagrange".

3 Théorie de la Lune

3.1 Le calcul

Le mouvement de la Lune dans le ciel est éminemment complexe, et cette dernière est loin de suivre un mouvement képlerien autour de la Terre. Cette complexité réside dans le fait que le corps perturbateur (le Soleil) possède une très grande masse¹ :

$$\frac{m_{\odot}}{m_{\oplus}} = 3 \times 10^5 \tag{17}$$

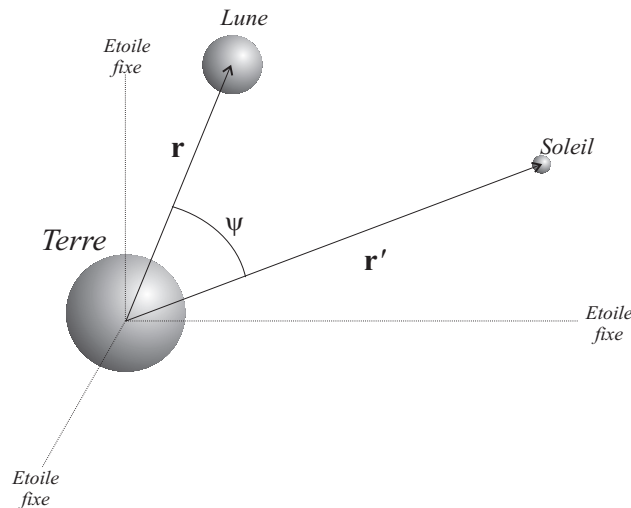
que son éloignement ne compense que très partiellement. La complexité du problème est renforcée par la proximité de la Lune qui nous permet d'obtenir des résultats expérimentaux très précis, que la théorie doit vérifier ...

Le mouvement képlerien de la Lune, le plus en adéquation avec les observations, est très grossièrement une ellipse d'excentricité $e \approx 1/18.2$ de foyer la Terre, d'inclinaison $i = 5^{\circ}8'$ par rapport à l'écliptique. La masse de la lune est d'environ $m_L = 7,3 \times 10^{22}kg$, celle de la terre étant $m_{\oplus} = 6 \times 10^{24}kg$ on a

$$\frac{m_{\oplus}}{m_L} = 81.4 \tag{18}$$

La perturbation introduite par la Lune est si faible qu'à un très bon degré d'approximation, dans le référentiel où la Terre est fixe, le Soleil est en mouvement képlerien dont les éléments elliptiques sont les constantes $\{a_{\odot}, e_{\odot}, i_{\odot}, \omega_{\odot}, \Omega_{\odot}, \tau_{\odot}\}$

En se plaçant dans le référentiel centré sur la Terre, en appelant \mathbf{r} le vecteur Terre-Lune et \mathbf{r}' le vecteur Terre-Soleil (cf. figure 3)



La Lune dans le champ gravitationnel terrestre perturbé par le Soleil

La mise en forme des équations du mouvement permet d'obtenir

1. Les quantités indicées \odot, \oplus ou L se rapportent respectivement au Soleil, à la Terre et à la Lune.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{G(m_{\oplus} + m_L)}{r^3}\mathbf{r} = \text{grad}(V) \quad (19)$$

avec un potentiel perturbateur

$$V = Gm_{\odot} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}'|^3} \right) \quad (20)$$

Un développement en série à l'ordre 2 en r/r' (dont la valeur moyenne est d'environ 2×10^{-3} ...) de ce potentiel donne

$$V = \frac{Gm_{\odot}}{r'} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r'} \right)^2 (3 \cos^2 \psi - 1) + O \left(\left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right) \right) \quad (21)$$

Le potentiel perturbateur se sépare en une partie séculaire \bar{V} (non périodique) et une partie périodique \tilde{V} à variation rapide. La partie périodique ne modifie pas de manière profonde le mouvement de la Lune, en la négligeant (en moyenne), on trouve à l'ordre 2

$$V \simeq \bar{V} \simeq \frac{n_{\odot}^2 a^2}{4} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} i^2 \right) \quad (22)$$

où n_{\odot} est le moyen mouvement solaire. On constate immédiatement que V ne dépend pas de Ω, ω ni τ .

Les équations planétaires de Lagrange permettent donc d'affirmer que les éléments osculateurs a, e et i de l'orbite lunaire sont séculairement constants.

Pour la variation séculaire de la longitude du noeud ascendant, nous avons

$$\frac{d\Omega}{dt} = - \frac{3n_{\odot}^2 i}{4n \sin i \sqrt{1 - e^2}} \quad (23)$$

en supposant que les variations périodiques sont négligeables nous obtenons donc $\Omega = \alpha t + \beta$: la longitude du noeud ascendant lunaire régresse ainsi à vitesse constante.

Pour la variation séculaire de l'argument du périégée, nous avons

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3n_{\odot}^2 (1 - e^2 + i \cot i)}{4n \sqrt{1 - e^2}} \quad (24)$$

en supposant que les variations périodiques sont négligeables nous obtenons donc $\omega = \gamma t + \delta$: l'argument du périégée lunaire précesse donc à vitesse constante.

En prenant les valeurs numériques indiquées plus haut et sachant que $G = 6,972 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ on peut calculer le moyen mouvement de la Lune $n = 47434,89$ seconde d'arc par jour⁽²⁾ et du Soleil $n_{\odot} = 3548,19$ secondes d'arc par jour⁽²⁾, desquels on déduit $\alpha = -199,61$ "/j et $\gamma = 397,57$ "/j. Ces effets sont représentés sur la figure 4.

2. Une seconde d'arc est la soixantième partie d'une minute d'arc qui est elle même la soixantième partie d'un degré.

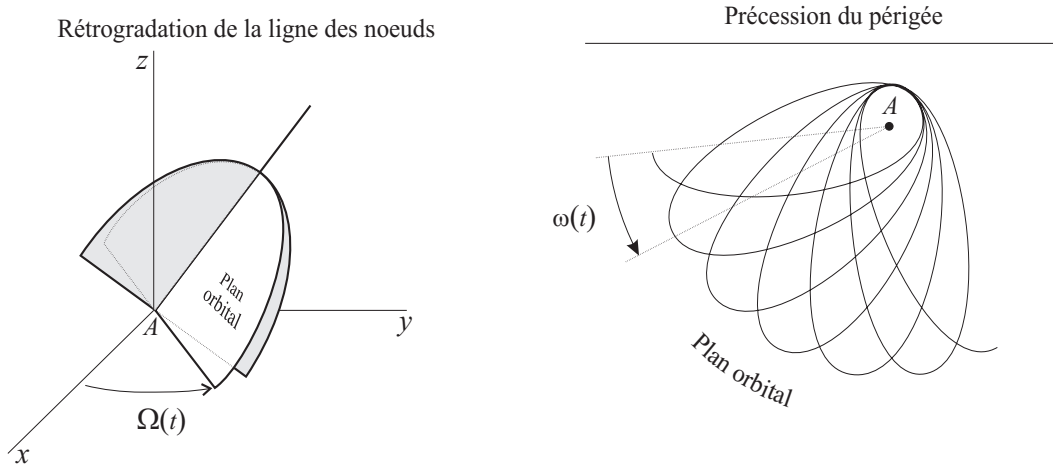


Fig. 4 : Effets séculaires principaux de la présence du Soleil sur l'orbite de la Lune autour de la Terre

3.2 Erreur ou progrès

Les observations montrent que la ligne des noeuds de la Lune tourne à la vitesse quasiment constante de $-190,76''/j$ (on parle de régression) et que son périégée précède à raison de $591,69''/j$. Les éléments a , e et i ne présentent pas de variation séculaire observable.

La théorie de la Lune de Lagrange fournit donc une erreur relative d'environ 5% sur la valeur de α , on peut d'ailleurs "récupérer" cette erreur en partie en prolongeant le développement en série mais la convergence est très lente. L'erreur sur le mouvement du périégée est quant à elle rédhibitoire.

Plusieurs raisons ont été avancées pour expliquer l'échec de cette approche : Sur le plan théorique tout d'abord nous pouvons objecter que la méthode de variation de la constante ne s'applique qu'aux équations différentielles linéaires, ce qui n'est pas le cas de l'équation du mouvement du problème des 2 corps perturbé. Comment expliquer alors les bonnes prévisions de la théorie : valeur plus ou moins correcte de α , constance de certains éléments, et plus tard dans l'histoire parfaite prévision du mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel de la Terre aplatie ...

Il semble que ce soit en fait la notion de théorie perturbative qui perde ici une partie de son sens eût égard à l'amplitude de la force perturbatrice introduite par le Soleil qui vaut en moyenne la moitié de la force newtonienne de la Terre.

Lagrange était totalement conscient de ces problèmes (tant sur le plan théorique qu'observationnel), il ne chercha d'ailleurs pas à défendre sa théorie de la Lune. Il n'en demeure pas moins que l'idée de la prise en compte d'un système de coordonnées adaptées au problème mais surtout de l'intervention conjointe des crochets et d'un potentiel duquel dérivent les forces furent une avancée décisive en mécanique d'abord, et par la suite dans toute la physique. En généralisant la méthode présentée ci-dessus à un problème quelconque de mécanique, Joseph-Louis Lagrange inventa les notions de coordonnées généralisées, d'énergie potentielle et de façon indirecte de crochet de Poisson³. Dans sa théorie de la mécanique analytique, il ouvrit les yeux des physiciens en proposant une nou-

3. Le crochet de Poisson $\{f, g\}$ entre deux fonctions dérivables $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} est un scalaire défini par la relation

$$\{f, g\} = \text{grad}_{\mathbf{x}}f \cdot \text{grad}_{\mathbf{y}}g - \text{grad}_{\mathbf{y}}f \cdot \text{grad}_{\mathbf{x}}g$$

velle approche globale des problèmes. Cette révolution conceptuelle est à la base de toute la physique théorique moderne ...