Lagrange, inventeur de la physique moderne

Jérôme Perez

Laboratoire de Mathématiques Appliquées

6 mai 2019

ENSTA ParisTech

Sommaire

Le problème des deux corps

$$\left.\begin{aligned} m_A \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} &= -m_A m_B \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3} \\ m_B \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2} &= -m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3} \end{aligned}\right\} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \text{ avec } \left[\begin{aligned} \mu &= m_A + m_B \\ \vec{r} &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}\right.$$

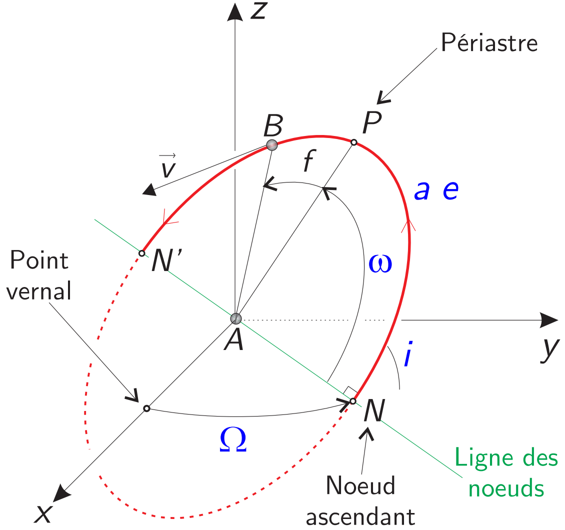
On étudie ainsi le mouvement de B dans le référentiel centré sur A, repérée par $\vec{r}$.

Le vecteur $\vec{\Lambda} = \vec{r} \wedge \vec{v}$ est constant, le mouvement s'effectue dans le plan $\mathcal{P} \perp \vec{\Lambda}$.

Newton montre en 1666 et publie en 1687 que la trajectoire dans ce plan est une conique de paramètre focal p et d'excentricité e

$$p = \frac{\Lambda^2}{\mu}\,, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\Lambda^2\xi}{\mu^2}}\,, \quad E = m_B \xi$$

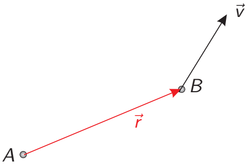
Le mouvement de B autour de A est fixé par la connaissance de 6 constantes du mouvement.



Formellement, on peut écrire $\vec{r} = \vec{r}(\vec{c}, t)$ avec $\vec{c} = [a, e, i, \omega, \Omega, \tau]^\top$

Newton ne fait pas du tout comme on pense...

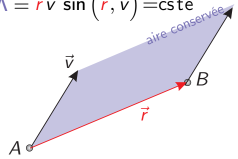
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\widehat{e}_r$$



Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r$$

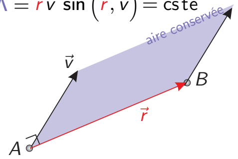
$$\Lambda = r\,v\,\sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = \text{cste}$$



Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

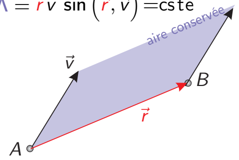
$$\Lambda = r\, v\, \sin\left(\widehat{\vec{r}, \vec{v}}\right) = \text{cste}$$



Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\,v\,\sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = \text{cste} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

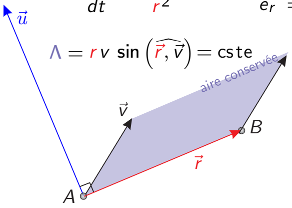


Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r$$

$$\hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\,v\,\sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = \text{cste}$$



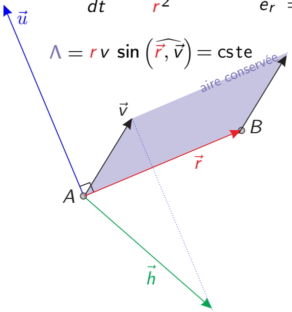
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta}$$

Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\, v\, \sin\left(\widehat{\vec{r}, \vec{v}}\right) = cste$$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta}$$

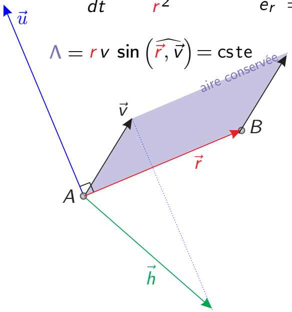
$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{h} = \vec{v} - \vec{u} = cste$$

Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\,v\,\sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = cste$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$



$$\boxed{\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}-\vec{u}) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{h} = \vec{v}-\vec{u} = cste$$

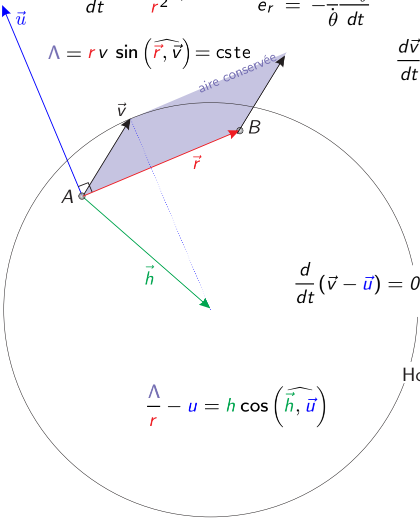
$$\vec{v} = \vec{h} + \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta$$

Hodographe

Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\,v\,\sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = \text{cste} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$



$$\boxed{\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = 0 \implies \vec{h} = \vec{v} - \vec{u} = cste$$

$$\vec{v} = \vec{h} + \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta$$

Hodographe

$$\frac{\Lambda}{r} - u = h\cos\left(\widehat{\vec{h},\vec{u}}\right)$$

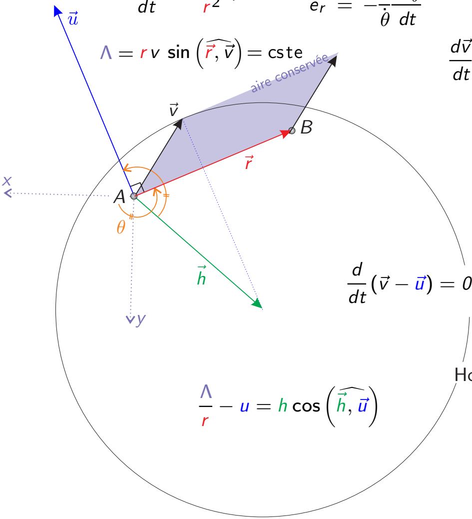
Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\, v\, \sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = \text{cste}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta}$$



$$\frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = 0 \implies \vec{h} = \vec{v} - \vec{u} = cste$$

$$\vec{v} = \vec{h} + \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta$$

Hodographe

$$\frac{\Lambda}{r} - u = h\cos\left(\widehat{\vec{h},\vec{u}}\right)$$

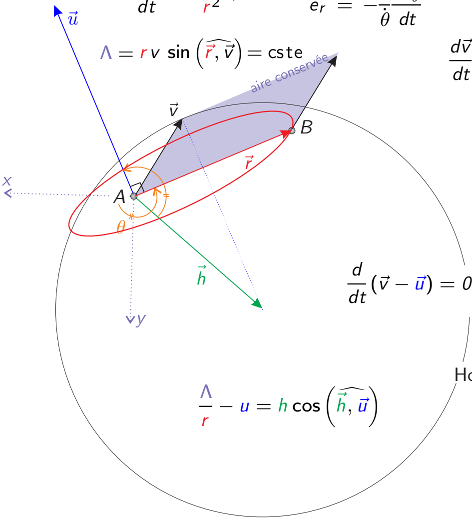
Newton ne fait pas du tout comme on pense...

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\Lambda = r\,v\,\sin\left(\widehat{\vec{r},\vec{v}}\right) = cste$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\mu}{\Lambda}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta}$$



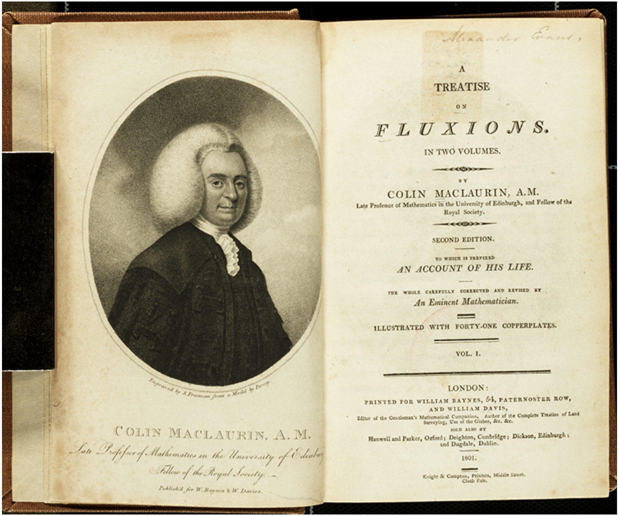
$$\frac{d}{dt}(\vec{v}-\vec{u}) = 0 \implies \vec{h} = \vec{v}-\vec{u} = cste$$

$$\vec{v} = \vec{h} + \frac{\mu}{\Lambda}\hat{e}_\theta$$

Hodographe

$$\frac{\Lambda}{r} - u = h\cos\left(\widehat{\vec{h},\vec{u}}\right)$$

En fait c'est Mac-Laurin qui explique ce qu'il faut faire en 1742.



Les équations de Newton sont des équations différentielles !

Et c'est un jeune mathématicien qui va proposer la méthode 7 ans plus tard...

SUR L'INTÉGRATION

D'UNE

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

A DIFFÉRENCES FINIES,

QUI CONTIENT LA THÉORIE DES SUITES RÉCURRENTES.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. I, 1759.)

1. Soit proposée l'équation différentielle

$$dy + y\mathrm{X}dx = \mathrm{Z}dx,$$

où X et Z expriment des fonctions quelconques de la variable x; l'on sait que pour intégrer cette équation il suffit de faire

$$y = uz,$$

ce qui donne

$$udz + zdu + uz\mathrm{X}dx = \mathrm{Z}dx,$$

où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de u ou de z. Supposons donc

$$zdu + uz\mathrm{X}dx = 0,$$

et divisant par z, on aura

$$du + u\mathrm{X}dx = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{du}{u} = -\mathrm{X}dx \quad \text{et} \quad lu = -\int \mathrm{X}dx;$$

savoir

$$u = e^{-\int \mathrm{X}dx},$$

Joseph-Louis Lagrange, alors professeur à l'École d'Artillerie de Turin

Les équations différentielles *linéaires*

Jusque là on résolvait des équations algébriques !

Ordre 1 non perturbé

L'équation différentielle linéaire du premier ordre la plus simple s'écrit

$$y_0' = a y_0$$

où a est une fonction paramètre connue et y_0 la fonction cherchée. Pour la résoudre, Lagrange sépare les variables

$$\frac{y_0'}{y_0} = a \quad \text{soit} \quad \ln y_0 = K + A \text{ avec } A' = a$$

$$\text{ainsi} \quad y_0 = k \exp A$$

La fonction $R = \exp A$ est appelée solution fondamentale de l'équation. Elle deviendra la résolvante en math ou le propagateur en physique...

Ordre 1 perturbé

Si l'on perturbe l'équation $y_1' = ay_1 + b$, la solution devient

$$y_1 = y_0 + Py_0$$

où P est une fonction telle que sa dérivée $p = b\exp(-A)$.
La solution de l'équation perturbée est donc obtenue par un calcul de primitive.
Pour obtenir cette expression, Lagrange fait varier la fonction constante k dans la solution non perturbée...

Méthode de variation de la constante

$$y_0 = \text{constante} \times R \;\rightarrow\; y_1 = \text{fonction} \times R$$

Lorsque l'équation est du second ordre c'est la même chose...

Ordre 2 non perturbé

La solution de l'équation

$$y_0'' = a y_0' + b y_0$$

s'écrit comme une combinaison linéaire de deux solutions fondamentales y_{01} et y_{02}

$$y_0 = k_1 y_{01} + k_2 y_{02}$$

Le problème majeur est que l'on ne peut plus séparer les variables pour trouver l'expression des deux solutions fondamentales.

Lorsque l'on perturbe une équation du second ordre, on applique la même méthode de variation des constantes. Lagrange propose une ruse fondamentale.

Pour résoudre

$$y_1'' = ay_1' + by_1 + c \tag{E}$$

On suppose connues y_{01} et y_{02} et on écrit

$$\begin{aligned}
y_1 &= k_1 y_{01} + k_2 y_{02} \\
y_1' &= k_1' y_{01} + k_2' y_{02} + k_1 y_{01}' + k_2 y_{02}' \\
y_1'' &= k_1'' y_{01} + k_2'' y_{02} + k_1 y_{01}'' + k_2 y_{02}'' + 2k_1' y_{01}' + 2k_2' y_{02}'
\end{aligned}$$

On remplace ces expressions dans l'équation (E) à résoudre... qui devient un système de deux équations différentielles d'ordre 2 en k_1 et k_2

$\Rightarrow$ Fin de l'algorithme

Solution légale inventée par Lagrange : la jauge

$$k_1' y_{01} + k_2' y_{02} = 0$$

Le système se simplifie. Il se réduit à un calcul de deux primitives...

Problème à deux corps perturbé

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \vec{F}_p$$

Sans perturbation, $\vec{r} = \vec{r}(\vec{c}, t)$ où $\vec{c} \in \mathbb{R}^6$ est un vecteur constant. Lagrange applique la méthode de la variation des constantes à ce problème... en toute connaissance de cause !
Les composantes de $\vec{c}$ deviennent donc des fonctions du temps et les inconnues du problème. On écrit alors

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_i}\dot{c}_i \text{ en notant } \dot{} = \frac{d}{dt}$$

Jauge de Lagrange

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_i}\dot{c}_i = 0 \text{ et donc } \dot{\vec{r}} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$

Dans cette jauge, on a donc

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i}\dot{c}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_i}\dot{c}_i$$

En remplaçant cette relation dans l'équation du mouvement on identifie

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad et \quad \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_i}\dot{c}_i = \vec{F}_p$$

Le système à résoudre est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i}\dot{c}_i = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_i}\dot{c}_i = \vec{F}_p \end{array} \right. \quad \text{soit } \forall j = 1, \cdots, 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_j}\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i}\dot{c}_i = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_i}\dot{c}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}\vec{F}_p \end{array} \right.$$

En faisant la différence de ces deux relations on obtient

$$\sum_{i=1}^{6} \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_i} - \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial c_j}\frac{\partial \vec{r}}{\partial c_i} \right] \dot{c}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_j}\vec{F}_p$$

$$\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_j}\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial c_i}-\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial c_j}\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_i}\right]\dot{c}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_j}\vec{F}_p$$

$$\boxed{\text{Hyp}}\ \exists R\,(\vec{r}),\ \vec{F}_p=\frac{\partial R}{\partial\vec{r}}=\operatorname{grad}_{\vec{r}}(R)\ \Rightarrow\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial c_j}\vec{F}_p=\left.\frac{\partial R}{\partial\vec{c}}\right|_j$$

Ce potentiel perturbateur est l'ancêtre de l'énergie potentielle...
En utilisant une écriture algébrique moderne on a donc

$$\boldsymbol{A}\dot{\vec{c}}=\operatorname{grad}_{\vec{c}}(R)\quad\text{avec } \boldsymbol{A}_{ji}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_j}\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial c_i}-\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial c_j}\frac{\partial\vec{r}}{\partial c_i}=(c_j,c_i)$$

Cette matrice $\boldsymbol{A}$ est antisymétrique et ses composantes sont les parenthèses de Lagrange. C'est une matrice inversible et relativement creuse si l'on choisit les élements elliptiques $\vec{c}=[a,e,\tau,\Omega,\omega,i]^\top$. On obtient alors les équations planétaires de Lagrange.
L'application de cette théorie à la Lune fournit des résultats inespérés...

Equations planétaires de Lagrange

$$\mathbf{A}\dot{\vec{c}} = \mathrm{grad}_{\vec{c}}(R)$$

Equations planétaires de Lagrange

$$\mathbf{A}\dot{\vec{c}} = \mathrm{grad}_{\vec{c}}(R) \qquad R = \cdots \simeq \frac{1}{4} n_{\odot}^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

Equations planétaires de Lagrange

$$\mathbf{A}\dot{\vec{c}} = \mathrm{grad}_{\vec{c}}(R) \qquad R = \cdots \simeq \frac{1}{4} n_{\odot}^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} i^2\right)$$

$$\blacksquare_1 = n^2 a/2 \qquad \blacksquare_2 = \blacksquare_3 \times \cos i$$

$$\blacksquare_3 = -\sqrt{1-e^2}\; n\, a/2 \qquad \blacksquare_4 = \blacksquare_5 \times \cos i$$

$$\blacksquare_5 = n a^2 e / \sqrt{1-e^2}$$

$$\blacksquare_6 = n a^2 \sin i \sqrt{1-e^2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & \blacksquare_1 & \blacksquare_2 & \blacksquare_3 & \\ \hline & & & \blacksquare_4 & \blacksquare_5 & \\ \hline \boxed{1} & & & & & \\ \hline \boxed{2} & \boxed{4} & & & & \blacksquare_6 \\ \hline \boxed{3} & \boxed{5} & & & & \\ \hline & & & \boxed{6} & & \\ \hline \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline e \\ \hline \tau \\ \hline \Omega \\ \hline \omega \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \blacksquare_1^2\, \blacksquare_5^2\, \blacksquare_6^2 = n^8 a^{10} \sin^2 i\; e^2$$

Equations planétaires de Lagrange

$$\mathbf{A}\dot{\vec{c}} = \mathrm{grad}_{\vec{c}}(R) \qquad R = \cdots \simeq \frac{1}{4} n_{\odot}^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

$$\colorbox{black}{$\color{white}1$} = n^2 a/2 \qquad \colorbox{black}{$\color{white}2$} = \colorbox{black}{$\color{white}3$} \times \cos i$$

$$\colorbox{black}{$\color{white}3$} = -\sqrt{1-e^2}\; n\,a/2 \qquad \colorbox{black}{$\color{white}4$} = \colorbox{black}{$\color{white}5$} \times \cos i$$

$$\colorbox{black}{$\color{white}5$} = n a^2 e/\sqrt{1-e^2}$$

$$\colorbox{black}{$\color{white}6$} = n a^2 \sin i \sqrt{1-e^2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & \colorbox{black}{$\color{white}1$} & \colorbox{black}{$\color{white}2$} & \colorbox{black}{$\color{white}3$} & \\ \hline & & & \colorbox{black}{$\color{white}4$} & \colorbox{black}{$\color{white}5$} & \\ \hline \boxed{1} & & & & & \\ \hline \boxed{2} & \boxed{4} & & & & \colorbox{black}{$\color{white}6$} \\ \hline \boxed{3} & \boxed{5} & & & & \\ \hline & & & \boxed{6} & & \\ \hline \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline e \\ \hline \tau \\ \hline \Omega \\ \hline \omega \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \colorbox{black}{$\color{white}1$}^2\,\colorbox{black}{$\color{white}5$}^2\,\colorbox{black}{$\color{white}6$}^2 = n^8 a^{10} \sin^2 i\; e^2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & \blacksquare & & & \\ \hline & & \blacksquare & & \blacksquare & \\ \hline \square & \square & & & & \blacksquare \\ \hline & & & & & \blacksquare \\ \hline & \square & & & & \blacksquare \\ \hline & & \square & \square & \square & \\ \hline \end{array}$$

nul !

Equations planétaires de Lagrange

$$\mathbf{A}\dot{\vec{c}} = \mathrm{grad}_c(R) \qquad R = \cdots \simeq \frac{1}{4} n_\odot^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

$$\left[\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\left(\frac{2}{n^2 a}\right)\frac{\partial R}{\partial \tau}\\
\frac{de}{dt} &= -\left(\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\right)\frac{\partial R}{\partial \tau} - \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{n^2 ae}\right)\frac{\partial R}{\partial \omega}\\
\frac{d\tau}{dt} &= \left(\frac{2}{n^2 a}\right)\frac{\partial R}{\partial a} + \left(\frac{1-e^2}{n^2a^2e}\right)\frac{\partial R}{\partial e}\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \left(\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\right)\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{d\omega}{dt} &= \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\right)\frac{\partial R}{\partial e} - \left(\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{\partial R}{\partial i}\\
\frac{di}{dt} &= \left(\frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\right)\frac{\partial R}{\partial \omega} - \left(\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i}\right)\frac{\partial R}{\partial \Omega}
\end{aligned}\right.$$

$$\dot{\vec{c}} = \mathbf{A}^{-1}\mathrm{grad}_{\vec{c}}(R)$$

$\mathbf{1} = n^2 a/2$

$\mathbf{3} = -\sqrt{1-e^2}\; na/2$

$\mathbf{5} = na^2 e/\sqrt{1-e^2}$

$\mathbf{2} = \mathbf{3} \times \cos i$

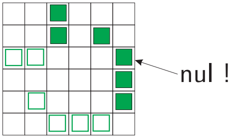
$\mathbf{4} = \mathbf{5} \times \cos i$

$\mathbf{6} = na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \\ \hline & & & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \\ \hline \boxed{1} & & & & & \\ \hline \boxed{2} & \boxed{4} & & & & \mathbf{6} \\ \hline \boxed{3} & \boxed{5} & & & & \\ \hline & & & \boxed{6} & & \\ \hline \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline e \\ \hline \tau \\ \hline \Omega \\ \hline \omega \\ \hline i \\ \hline \end{array}$$

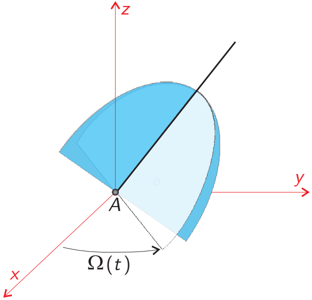
$$\det(\mathbf{A}) = \mathbf{1}^2\,\mathbf{5}^2\,\mathbf{6}^2 = n^8 a^{10} \sin^2 i\, e^2$$

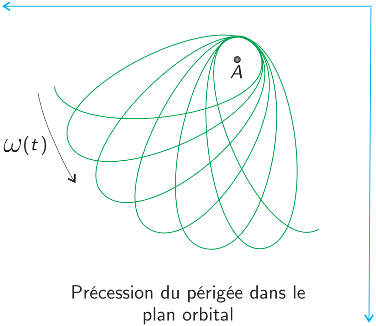
$\mathbf{A}^{-1} =$



Application au mouvement de la lune

Rétrogadation de la ligne des noeuds



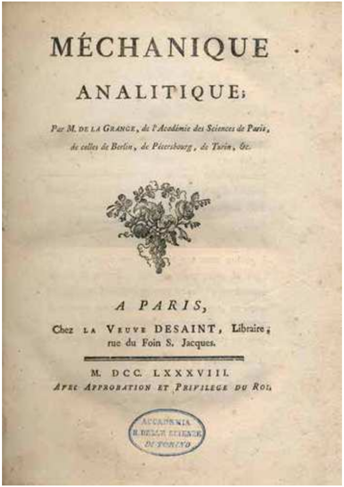


Précession du périgée dans le plan orbital

	Théorie	Observation
n_Ω	17 ans 287 jours	17 ans 293 jours
n_ω	8 ans 339 jours	exactement le double

Grand prix de l'académie des sciences de Paris en 1763 et 1764

La méchanique analitique



Financée par Louis XVI pour attirer Lagrange à Paris en 1788.

En fait, la méthode de la variation des constantes ne devrait même pas s'appliquer :

- L'équation différentielle n'est pas linéaire ;
- La perturbation n'est pas petite.

Lagrange retient les deux bonnes idées de cette méthode :

- Utiliser des coordonnées généralisées adaptées ;
- Faire apparaître un potentiel duquel dérivent les forces.

Il applique sa méthode à un problème quelconque...

Pour un système de N particules repérées par des vecteurs $\vec{r}_k \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k\left(\vec{q}\right) \text{ avec } \left[\begin{array}{l} \vec{q} \in \mathbb{R}^\ell \text{ et } \ell \leq 3N \quad [\textit{degrés de liberté}] \\ \\ \dfrac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \quad [\textit{coordonnées généralisées}] \end{array}\right.$$

Le potentiel perturbateur est homogène à une force vive

$$T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right)^2 \; \left[\textit{vis viva } m\vec{v}^2 \textit{ chez Huygens...}\right]$$

Lagrange cherche à établir une équation faisant intervenir

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} \text{ et/ou } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

Il écrit
$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} m \frac{d\vec{r}_k}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{N} m \frac{d\vec{r}_k}{dt} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}\right)$$

puis
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{N} m \frac{d\vec{r}_k}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d\vec{r}_k}{dt}\right) = \sum_{k=1}^{N} m \frac{d\vec{r}_k}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} m \frac{d\vec{r}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

On remarque alors immédiatement que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} m \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

Newton resurgit pour nous rappeler que

$$m\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k$$

Comme plus haut, on suppose que

$$\exists U\left(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N\right),\ \vec{F}_k = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_k} = -\mathrm{grad}_{\vec{r}_k}\left(U\right)$$

on a donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_k}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

En ramenant tout du même coté, Lagrange obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\left(T - U\right)}{\partial q_i} = 0$$

comme $U = U\left(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N\right)$ cette fonction ne dépend pas des $\dot{q}_i$

$$\forall i = 1, \cdots, \ell \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial q_i} = 0 \text{ avec } \mathcal{Z} = T - U$$

- Postérité : $\mathcal{Z} \to \mathcal{L}$, lagrangien ;
- Résultat inatendu : nombre et ordre des équations ;
- Euler : il y a un principe variationnel caché !

Pour obtenir des équations de la même forme que les équations planétaires, il faut écrire des équations du premier ordre.
Lagrange introduit donc des impulsions

$$\forall i = 1, \cdots, \ell \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Puis il se livre à un petit calcul variationnel (il invente ce qui, 20 ans plus tard, deviendra la transformation de Legendre...)
Attendu que $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\right)$ on a

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} \cdot d\vec{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot d\dot{\vec{q}} \\ &= \dot{\vec{p}} \cdot d\vec{q} + \vec{p} \cdot d\dot{\vec{q}} \\ &= \dot{\vec{p}} \cdot d\vec{q} + d\left(\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}\right) - \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{p} \end{aligned}$$

soit

$$d\left(\mathcal{L} - \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}\right) = \dot{\vec{p}} \cdot d\vec{q} - \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{p}$$

$$d\left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}-\mathcal{L}\right)=\dot{\vec{q}}\cdot d\vec{p}-\dot{\vec{p}}\cdot d\vec{q}$$

On lit sur cette relation que la fonction $\mathcal{H}=\vec{p}\cdot\dot{q}-\mathcal{L}=\mathcal{H}\left(\vec{q},\vec{p}\right)$. De plus elle vérifie

$$\forall i=1,\cdots,\ell\ \begin{cases}\dot{p}_i=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\Rightarrow\dot{\vec{p}}=-\mathrm{grad}_{\vec{q}}\left(\mathcal{H}\right)\\[2ex]\dot{q}_i=+\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\Rightarrow\dot{\vec{q}}=+\mathrm{grad}_{\vec{p}}\left(\mathcal{H}\right)\end{cases}$$

Equations *dites* de Hamilton

Cette équation plaît à Lagrange car en introduisant le vecteur $\vec{z}=[\vec{q},\vec{p}]\in\mathbb{R}^{2\ell}$ on écrit de façon encore plus compacte

$$\dot{\vec{z}}=\ \boldsymbol{J}\ \mathrm{grad}_{\vec{z}}\left(\mathcal{H}\right)\ \text{avec}\ \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & I_\ell\\ -I_\ell & 0\end{bmatrix}\ \text{antisymétrique...}$$

Rappel : $\dot{\vec{c}}=\boldsymbol{A}^{-1}\mathrm{grad}_{\vec{c}}\left(\mathcal{R}\right)$

Sous l'impulsion de son meilleur étudiant, S. Poisson, le vieux Lagrange écrira ses équations en faisant apparaître la généralisation de ses parenthèses de jeunesse

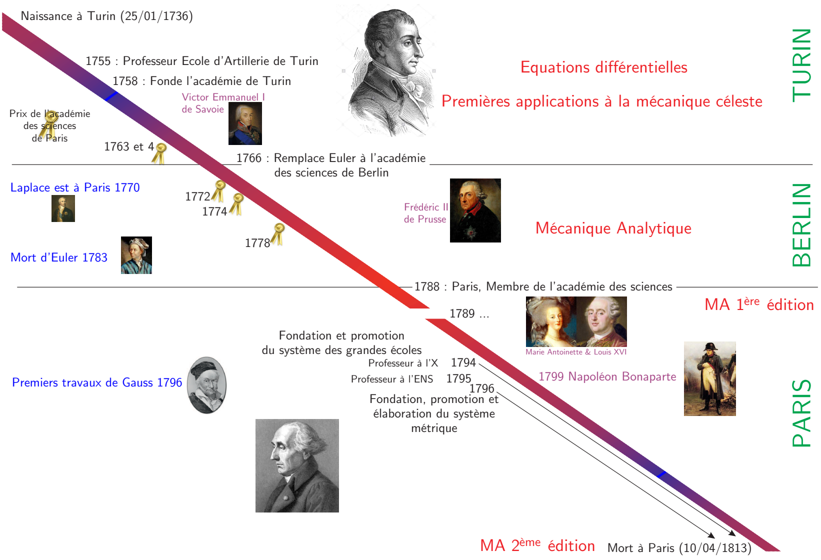
$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \\ \dot{q}_i = +\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{cases}$$

Ces équations deviennent parfaitement symétriques, elles permettent d'écrire l'évolution temporelle d'une fonction quelconque.

Équation fondamentale *des observables classiques*

Pour toute observable $\varphi\left(\vec{q}, \vec{p}, t\right)$, on a $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, \mathcal{H}\}$

Une bio impressionante !



Quelques preuves de mes affirmations !

Quelques preuves de mes affirmations !

Tome 6 : Mémoires extraits des recueils de l'académie des sciences de Paris *(816 pages)*

I. Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie Royale des Sciences pour le prix de l'année 1764
II. Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle.
III. Essai sur le problème des trois corps
IV. Sur l'équation séculaire de la Lune
V. Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes
VI. Recherches sur la manière de former des tables des planètes d'après les seules observations
VII. Lettre de Lagrange à Laplace, relative à la théorie des inégalités séculaires des planètes
VIII. Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes
IX. Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites
X. Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique
XI. Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes

Quelques preuves de mes affirmations !

Table des matières des œuvres complètes de Joseph-Louis Lagrange

publiées par les soins de Joseph-Alfred Serret et Gaston Darboux de 1867 à 1892

Œuvres générales

Œuvres didactiques

Tome 6 : Mémoires extraits des recueils de l'académie des sciences de Paris *(816 pages)*

I. Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie Royale des Sciences pour le prix de l'année 1764

II. Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle.

III. Essai sur le problème des trois corps

IV. Sur l'équation séculaire de la Lune

V. Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l'action des planètes

VI. Recherches sur la manière de former des tables des planètes d'après les seules observations

VII. Lettre de Lagrange à Laplace, relative à la théorie des inégalités séculaires des planètes

VIII. Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes

IX. Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites

X. Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique

XI. Second mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes

Particulièrement intéressant ...!

ŒUVRES
DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME SIXIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.
M DCCC LXXIII

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE

DE LA

VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES

DANS TOUS LES PROBLÈMES DE LA MÉCANIQUE (*).

(Mémoires de la première Classe de l'Institut de France, année 1808.)

L'application de l'Algèbre à la Théorie des courbes, qu'on doit à Descartes, avait fait naître la distinction des quantités en constantes et en variables, et la découverte du Calcul différentiel a appris à soumettre au calcul les variations instantanées de ces dernières quantités. Depuis on a beaucoup étendu la considération de la variabilité, et l'on peut dire que presque tous les artifices d'Analyse qu'on a inventés se réduisent à faire varier de différentes manières, soit ensemble ou séparément, tant les quantités qui sont par leur nature variables, que celles que l'état de la question suppose constantes. L'art consiste à choisir parmi toutes les variations possibles celles qui, dans chaque cas, peuvent conduire aux résultats les plus simples et les plus avantageux.

On sait que l'intégration introduit toujours dans le calcul des quantités constantes relativement aux variables des équations, et dont la valeur est arbitraire. On peut donc aussi faire varier ces constantes; ces variations, envisagées sous différents points de vue, ont produit des

(*) Lu le 13 mars 1809.

97.

Lagrange fait toujours des rappels historiques dans ses introductions

Contrairement à Laplace qui ne cite pas ses pairs...

Lagrange a 73 ans lors de cette lecture...

directions, soient représentés par les mêmes formules, en ayant égard aux forces perturbatrices, que lorsqu'on fait abstraction de ces forces, comme cela a lieu pour les planètes.

En considérant sous ce point de vue la variation des constantes arbitraires, j'ai trouvé que la fonction qui représente l'intégrale de toutes les forces perturbatrices, multipliées chacune par l'élément de la distance dont elle dépend, jouit aussi de la même propriété, que ses différences partielles relatives à chacune des constantes arbitraires sont exprimées uniquement par des fonctions différentielles de ces mêmes constantes sans le temps; de sorte que l'on a, pour les variations de ces constantes, des équations différentielles qui ne renferment que ces constantes avec les différences partielles de la fonction dont il s'agit, relatives à chacune d'elles, comme dans le cas des perturbations des planètes, forme extrêmement avantageuse pour le calcul des variations des constantes, et surtout pour la détermination de leurs variations séculaires. Ainsi cette propriété, que j'ai reconnue à l'égard du mouvement des planètes, a lieu, en général, pour tous les Problèmes sur le mouvement des corps, et peut être regardée comme un résultat général des lois fondamentales de la Mécanique. Elle fournit en même temps un nouvel instrument pour faciliter la solution de plusieurs Problèmes importants.

Le Système du monde, outre les perturbations des planètes, auquel la Théorie de la variation des éléments s'applique naturellement, en offre encore un autre plus difficile, et susceptible également de la même Théorie : c'est celui de la rotation des planètes autour de leur centre de gravité, en ayant égard à leur figure non sphérique et à l'attraction que les autres planètes exercent sur chacune de leurs molécules. En faisant abstraction de ces forces d'attraction, qu'on peut regarder comme des forces perturbatrices, le Problème consiste à déterminer le mouvement d'un corps solide de figure quelconque autour de son centre de gravité, lorsqu'il n'est sollicité par aucune force et qu'il a seulement reçu une impulsion initiale quelconque; et l'on sait que ce Problème, pour lequel d'Alembert avait donné le premier les équations différen-

(page 774)

Variation des constantes pour les EDO linéaires

↓

Equations planétaires

↓

Mécanique Analytique

(page 792)

792 SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DE LA VARIATION

et de là, par l'analogie qui règne dans nos formules, on pourra déduire immédiatement les expressions de $\frac{d\Omega}{db}dt$, $\frac{d\Omega}{dc}dt, \ldots,$ en changeant simplement a en b, $c, \ldots$. On aura ainsi, en observant que la valeur de (a, b) ne fait que changer de signe par le changement de a en b et b en a, et qu'il en est de même des valeurs de tous les autres symboles (a, c), $(b, c), \ldots,$

$$\frac{d\Omega}{db}dt = -(a,b)\,da + (b,c)\,dc + (b,f)\,df + (b,g)\,dg + (b,h)\,dh,$$
$$\frac{d\Omega}{dc}dt = -(b,c)\,db - (a,c)\,da + (c,f)\,df + (c,g)\,dg + (c,h)\,dh,$$
$$\frac{d\Omega}{df}dt = -(b,f)\,db - (c,f)\,dc - (a,f)\,da + (f,g)\,dg + (f,h)\,dh,$$
$$\frac{d\Omega}{dg}dt = -(b,g)\,db - (c,g)\,dc - (f,g)\,df - (a,g)\,da + (g,h)\,dh,$$
$$\frac{d\Omega}{dh}dt = -(b,h)\,db - (c,h)\,dc - (f,h)\,df - (g,h)\,dg - (a,h)\,da,$$

Equations planétaires

Parenthèses

formules entièrement semblables à celles que nous avons trouvées dans le *Mémoire sur la variation des éléments des planètes* (6), et qui n'en diffèrent que par la valeur des symboles (a, b), (a, c), $(b, c), \ldots$.

21. A l'égard de ces valeurs, il est bon d'observer qu'elles ne dépendent pas de la fonction R elle-même, mais seulement de ses différences partielles relatives à r', s', u'; de sorte que, comme on a supposé $R = T - V$ (5), et que V n'est fonction que de r, s, u (2), on aura simplement

$$\frac{dR}{dr'} = \frac{dT}{dr'}, \quad \frac{dR}{ds'} = \frac{dT}{ds'}, \quad \frac{dR}{du'} = \frac{dT}{du'},$$

Le coup de l'énergie potentielle...

par conséquent, dans les expressions des valeurs dont il s'agit, on pourra mettre partout T à la place de R.

équation intégrable relativement à t, et dont l'intégrale sera

$$\Delta r\,\delta\frac{d\mathrm{R}}{dr'}+\Delta s\,\delta\frac{d\mathrm{R}}{ds'}+\Delta u\,\delta\frac{d\mathrm{R}}{du'}-\delta r\,\Delta\frac{d\mathrm{R}}{dr'}-\delta s\,\Delta\frac{d\mathrm{R}}{ds'}-\delta u\,\Delta\frac{d\mathrm{R}}{du'}=\mathrm{K},$$

qui est la même que celle que nous avons déjà trouvée.

Mais, quoique cette Analyse soit bien plus simple que celle du Mémoire, parce que les différentiations n'y sont qu'indiquées, elle peut néanmoins laisser quelques doutes dans l'esprit, à cause de la supposition que nous y avons faite de l'indépendance des variations de r, s, u, r', s', u' relatives aux deux caractéristiques δ et Δ, tandis qu'il n'y a à la rigueur d'indépendantes que les variations δa, δb, δc,... et Δa, Δb, Δc,... C'est pourquoi l'entière Analyse, quoique beaucoup plus longue, ne doit pas être regardée comme inutile, puisqu'elle peut servir à mettre notre Théorie à l'abri de toute objection.

26. Au reste, d'après la forme que nous venons de donner à l'équation intégrale, on peut simplifier les expressions des symboles (a, b), (a, c),.... En effet il est facile de voir qu'en regardant directement R comme fonction de a, b, c,..., et substituant T à la place de R, comme nous l'avons fait (21), si l'on suppose, pour abréger,

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr'}=\mathrm{T}',\quad \frac{d\mathrm{T}}{ds'}=\mathrm{T}'',\quad \frac{d\mathrm{T}}{du'}=\mathrm{T}''',$$

on aura, par l'algorithme des différences partielles,

$$(a, b)=\frac{dr}{da}\frac{d\mathrm{T}'}{db}+\frac{ds}{da}\frac{d\mathrm{T}''}{db}+\frac{du}{da}\frac{d\mathrm{T}'''}{db}-\frac{dr}{db}\frac{d\mathrm{T}'}{da}-\frac{ds}{db}\frac{d\mathrm{T}''}{da}-\frac{du}{db}\frac{d\mathrm{T}'''}{da},$$

et ainsi des autres symboles, en changeant seulement les lettres a, b en c, f, g, h, où l'on rejettera après les substitutions tous les termes qui contiendront le temps t, ou bien on y fera $t = 0$, pour que les valeurs de ces symboles ne dépendent que des constantes arbitraires a, b, c, f, g, h.

On voit aussi, par cette forme que nous venons de donner aux ex-

(page 797)

Il a parfaitement conscience de ses hypothèses...

La définition des parenthèses

$$(c_j, c_i)=\frac{\partial\vec r}{\partial c_j}\frac{\partial\dot{\vec r}}{\partial c_i}-\frac{\partial\dot{\vec r}}{\partial c_j}\frac{\partial\vec r}{\partial c_i}$$

Je fais de l'algèbre...

SECOND MÉMOIRE SUR LA THÉORIE

DE LA

VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES

DANS LES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE,

DANS LEQUEL ON SIMPLIFIE L'APPLICATION DES FORMULES GÉNÉRALES A CES PROBLÈMES (*).

(Mémoires de la première Classe de l'Institut de France, année 1809.)

La variation des constantes arbitraires est une Méthode nouvelle dont l'Analyse s'est enrichie dans ces derniers temps, et dont on a déjà fait des applications importantes. Dans la Mécanique, elle sert à étendre la solution d'un Problème à des cas où de nouvelles forces, dont on n'avait pas tenu compte, seraient supposées agir sur les mobiles. Ainsi lorsque, après avoir résolu le Problème du mouvement d'une planète autour du Soleil en vertu de la seule attraction de cet astre, on veut avoir égard aussi à l'attraction des autres planètes, on peut, en conservant la forme de la première solution, satisfaire à cette nouvelle condition par la variation des constantes arbitraires qui sont les éléments de la Théorie de la planète.

Les observations avaient depuis longtemps indiqué les variations de ces éléments; mais Euler est le premier qui ait cherché à les déterminer par l'Analyse. Ses formules étant de peu d'usage par leur complication, et n'ayant pas même toute l'étendue que la question peut comporter,

(*) Lu le 19 février 1810.

VI. 102

(page 809)

Un an plus tard,
à 74 ans le vieux lion est
toujours là !

Il travaille avec un de ses
étudiants, Siméon Poisson

X : 1798-1802
Prof X : 1802-1806
Astronome BdL : 1808
etc...

de celles qu'on avait adoptées, et l'on en déduira facilement, par les opérations connues, les valeurs de leurs différentielles exprimées en différences partielles de la même fonction, mais rapportées à ces nouvelles constantes arbitraires. Tout cela ne dépend plus que d'un calcul connu, et nous donnerons les formules générales qui en résultent. Ce sera le complément de notre Théorie de la variation des constantes.

M. Poisson a lu, le 16 octobre dernier, à cette Classe, un *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique*, lequel est imprimé dans le volume qui vient de paraître du *Journal de l'École Polytechnique* (*). Ce Mémoire contient une savante analyse qui est comme l'inverse de la mienne, et dont l'objet est d'éviter les éliminations que celle-ci exigeait. L'Auteur parvient en effet, par un calcul assez long et délicat, à des formules qui donnent directement les valeurs des différentielles des constantes arbitraires devenues variables. Ces formules ne coïncident pas immédiatement avec celles que je donne dans ce Mémoire, parce qu'elles renferment les constantes arbitraires en fonction des variables du Problème et de leurs différentielles, au lieu que les nôtres ne renferment ces constantes qu'en fonction d'autres constantes; mais il est facile de se convaincre *à priori* qu'elles conduisent aux mêmes résultats.

Voici maintenant notre analyse, d'après les principes que nous venons d'exposer.

1. En conservant les noms donnés dans le premier Mémoire, on a cette formule générale trouvée dans le *Supplément* (**)

$$\frac{d\Omega}{da}dt = \frac{dr}{da}\,\delta\frac{dT}{dr'} + \frac{ds}{da}\,\delta\frac{dT}{ds'} + \frac{du}{da}\,\delta\frac{dT}{du'} - \frac{d\frac{dT}{dr'}}{da}\,\delta r - \frac{d\frac{dT}{ds'}}{da}\,\delta s - \frac{d\frac{dT}{du'}}{da}\,\delta u,$$

où la caractéristique δ indique des différences relatives uniquement aux constantes arbitraires contenues dans les expressions des variables r, s, u.

(*) 15ᵉ Cahier, page 266.

(**) *Voir* page 805 de ce volume.

(page 812)

Poisson a fait un
<< *calcul assez long et délicat*
... inverse du mien...
voici notre analyse... >>

la place de ces trois dernières constantes, on prend les trois constantes λ, μ, ν, qui sont données en α, β, γ et α', β', γ', on pourra représenter les six constantes arbitraires du Problème par les six quantités α, β, γ, λ, μ, ν.

Ainsi, en substituant successivement, dans la formule précédente, chacune de ces quantités à la place de a qui représente une des constantes arbitraires, et changeant la caractéristique δ en d, puisque les variations des constantes arbitraires se rapportent maintenant au temps t, on aura tout de suite les six équations

$$\boxed{\begin{array}{lll} \frac{d\Omega}{d\alpha}\,dt = d\lambda, & \frac{d\Omega}{d\beta}\,dt = d\mu, & \frac{d\Omega}{d\gamma}\,dt = d\nu, \\ \frac{d\Omega}{d\lambda}\,dt = -\,d\alpha, & \frac{d\Omega}{d\mu}\,dt = -\,d\beta, & \frac{d\Omega}{d\nu}\,dt = -\,d\gamma, \end{array}}$$

qui sont, comme l'on voit, sous la forme la plus simple qu'il soit possible.

3. Mais, quelles que soient les constantes arbitraires qu'on veuille employer dans les expressions des variables r, s, u, elles ne peuvent être que des fonctions des constantes α, β, γ, α', β', γ', qu'on trouvera facilement en faisant $t = 0$ dans les équations qui donnent les valeurs de r, s, u, et dans leurs différentielles, et changeant r, s, u, r', s', u' en α, β, γ, α', β', γ'.

Ainsi, comme les quantités λ, μ, ν sont données aussi en α, β, γ, α', β', γ', on aura les nouvelles constantes, que nous désignerons maintenant par a, b, c, f, g, h, en fonction des constantes α, β, γ, λ, μ, ν.

Donc, en différentiant les valeurs de a, b, c, ..., et substituant les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ qu'on vient de trouver, on aura, en divisant par dt,

$$\frac{da}{dt} = -\frac{da}{d\alpha}\frac{d\Omega}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta}\frac{d\Omega}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma}\frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{da}{d\lambda}\frac{d\Omega}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu}\frac{d\Omega}{d\beta} + \frac{da}{d\nu}\frac{d\Omega}{d\gamma},$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{db}{d\alpha}\frac{d\Omega}{d\lambda} - \frac{db}{d\beta}\frac{d\Omega}{d\mu} - \frac{db}{d\gamma}\frac{d\Omega}{d\nu} + \frac{db}{d\lambda}\frac{d\Omega}{d\alpha} + \frac{db}{d\mu}\frac{d\Omega}{d\beta} + \frac{db}{d\nu}\frac{d\Omega}{d\gamma},$$

. . . .

(page 814)

Les équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \vec{r} &= [\lambda, \mu, \nu]^\top \\ \vec{p} &= [\alpha, \beta, \gamma]^\top \\ \Omega &\sim \mathcal{H} \end{aligned}$$

et on peut aller plus loin...

Or, en regardant Ω comme fonction de a, b, c, f, g, h, et ces quantités comme fonctions de $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, on a par les formules connues

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = \frac{da}{d\alpha}\frac{d\Omega}{da} + \frac{db}{d\alpha}\frac{d\Omega}{db} + \frac{dc}{d\alpha}\frac{d\Omega}{dc} + \frac{df}{d\alpha}\frac{d\Omega}{df} + \frac{dg}{d\alpha}\frac{d\Omega}{dg} + \frac{dh}{d\alpha}\frac{d\Omega}{dh},$$

$$\frac{d\Omega}{d\beta} = \frac{da}{d\beta}\frac{d\Omega}{da} + \frac{db}{d\beta}\frac{d\Omega}{db} + \frac{dc}{d\beta}\frac{d\Omega}{dc} + \frac{df}{d\beta}\frac{d\Omega}{df} + \frac{dg}{d\beta}\frac{d\Omega}{dg} + \frac{dh}{d\beta}\frac{d\Omega}{dh},$$

. . . .

4. Faisant toutes ces substitutions dans les expressions précédentes de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots,$ et ordonnant les termes suivant les différences partielles de Ω, on voit d'abord que le coefficient de $\frac{d\Omega}{da}$ est nul dans la valeur de $\frac{da}{dt}$, que celui de $\frac{d\Omega}{db}$ est nul dans la valeur de $\frac{db}{dt}$, et ainsi des autres; qu'ensuite, en employant des symboles $[a, b]$, $[a, c]$, $[b, c]$, ... analogues à ceux du premier Mémoire, tels que l'on ait

$$\boxed{\begin{aligned}
[a,b] &= -\frac{da}{d\alpha}\frac{db}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta}\frac{db}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma}\frac{db}{d\nu} + \frac{da}{d\lambda}\frac{db}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu}\frac{db}{d\beta} + \frac{da}{d\nu}\frac{db}{d\gamma},\\
[a,c] &= -\frac{da}{d\alpha}\frac{dc}{d\lambda} - \frac{da}{d\beta}\frac{dc}{d\mu} - \frac{da}{d\gamma}\frac{dc}{d\nu} + \frac{da}{d\lambda}\frac{dc}{d\alpha} + \frac{da}{d\mu}\frac{dc}{d\beta} + \frac{da}{d\nu}\frac{dc}{d\gamma},\\
[b,c] &= -\frac{db}{d\alpha}\frac{dc}{d\lambda} - \frac{db}{d\beta}\frac{dc}{d\mu} - \frac{db}{d\gamma}\frac{dc}{d\nu} + \frac{db}{d\lambda}\frac{dc}{d\alpha} + \frac{db}{d\mu}\frac{dc}{d\beta} + \frac{db}{d\nu}\frac{dc}{d\gamma},
\end{aligned}}$$

. . . .

on aura ces formules

$$\frac{da}{dt} = [a,b]\frac{d\Omega}{db} + [a,c]\frac{d\Omega}{dc} + [a,f]\frac{d\Omega}{df} + [a,g]\frac{d\Omega}{dg} + [a,h]\frac{d\Omega}{dh},$$

$$\frac{db}{dt} = -[a,b]\frac{d\Omega}{da} + [b,c]\frac{d\Omega}{dc} + [b,f]\frac{d\Omega}{df} + [b,g]\frac{d\Omega}{dg} + [b,h]\frac{d\Omega}{dh},$$

$$\frac{dc}{dt} = -[a,c]\frac{d\Omega}{da} - [b,c]\frac{d\Omega}{db} + [c,f]\frac{d\Omega}{df} + [c,g]\frac{d\Omega}{dg} + [c,h]\frac{d\Omega}{dh},$$

. . . .

(page 815)

Les crochets de Poisson !

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{j=1}^{\ell}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right)$$

816 SUR LA THÉORIE DE LA VARIATION, ETC.

dans lesquelles la loi de la continuation est évidente, en remarquant que les symboles changent de signe quand on change l'ordre des deux lettres renfermées entre les crochets, mais sans changer de valeur. Ainsi

$$[b, a] = -[a, b], \quad [c, b] = -[b, c], \ldots.$$

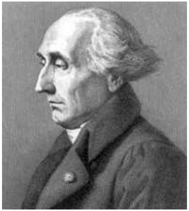
Ces formules donnent, comme l'on voit, la solution la plus directe et la plus simple du Problème de la variation des constantes arbitraires, et elles s'étendent à autant de constantes qu'on voudra.

FIN DU TOME SIXIÈME.

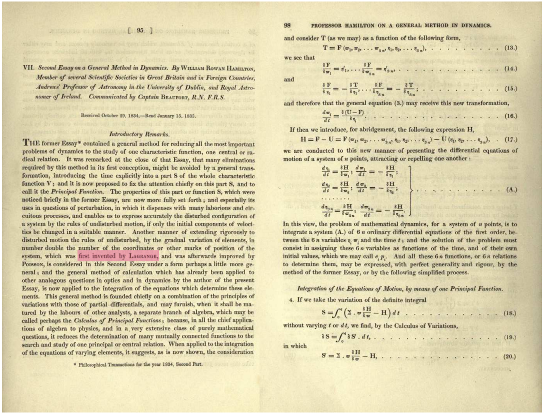
(page 816)

C'est toujours de l'algèbre

et c'est très simple...!



L'imposture de la lettre $\mathcal{H}$!



[95]

VII. *Second Essay on a General Method in Dynamics. By* WILLIAM ROWAN HAMILTON, *Member of several Scientific Societies in Great Britain and in Foreign Countries, Andrews' Professor of Astronomy in the University of Dublin, and Royal Astronomer of Ireland. Communicated by Captain* BEAUFORT, *R.N. F.R.S.*

Received October 29, 1834,—Read January 15, 1835.

Introductory Remarks.

THE former Essay* contained a general method for reducing all the most important problems of dynamics to the study of one characteristic function, one central or radical relation. It was remarked at the close of that Essay, that many eliminations required by this method in its first conception, might be avoided by a general transformation, introducing the time explicitly into a part S of the whole characteristic function V; and it is now proposed to fix the attention chiefly on this part S, and to call it the *Principal Function.* The properties of this part or function S, which were noticed briefly in the former Essay, are now more fully set forth; and especially its uses in questions of perturbation, in which it dispenses with many laborious and circuitous processes, and enables us to express accurately the disturbed configuration of a system by the rules of undisturbed motion, if only the initial components of velocities be changed in a suitable manner. Another manner of extending rigorously to disturbed motion the rules of undisturbed, by the gradual variation of elements, in number double the number of the coordinates or other marks of position of the system, which was first invented by LAGRANGE, and was afterwards improved by POISSON, is considered in this Second Essay under a form perhaps a little more general; and the general method of calculation which has already been applied to other analogous questions in optics and in dynamics by the author of the present Essay, is now applied to the integration of the equations which determine these elements. This general method is founded chiefly on a combination of the principles of variations with those of partial differentials, and may furnish, when it shall be matured by the labours of other analysts, a separate branch of algebra, which may be called perhaps the *Calculus of Principal Functions*; because, in all the chief applications of algebra to physics, and in a very extensive class of purely mathematical questions, it reduces the determination of many mutually connected functions to the search and study of one principal or central relation. When applied to the integration of the equations of varying elements, it suggests, as is now shown, the consideration

* Philosophical Transactions for the year 1834, Second Part.

98 PROFESSOR HAMILTON ON A GENERAL METHOD IN DYNAMICS.

and consider T (as we may) as a function of the following form,

$$\mathrm{T} = \mathrm{F}(\varpi_1, \varpi_2, \dots \varpi_{3n}, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_{3n}), \quad (13.)$$

we see that

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \varpi_1} = \eta'_1, \dots \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \varpi_{3n}} = \eta'_{3n}, \quad (14.)$$

and

$$\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \eta_1} = -\frac{\delta \mathrm{T}}{\delta \eta_1}, \dots \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta \eta_{3n}} = -\frac{\delta \mathrm{T}}{\delta \eta_{3n}}; \quad (15.)$$

and therefore that the general equation (3.) may receive this new transformation,

$$\frac{d\varpi_i}{dt} = \frac{\delta(\mathrm{U}-\mathrm{F})}{\delta \eta_i}. \quad (16.)$$

If then we introduce, for abridgement, the following expression H,

$$\mathrm{H} = \mathrm{F} - \mathrm{U} = \mathrm{F}(\varpi_1, \varpi_2, \dots \varpi_{3n}, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_{3n}) - \mathrm{U}(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{3n}), \quad (17.)$$

we are conducted to this new manner of presenting the differential equations of motion of a system of n points, attracting or repelling one another:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\eta_1}{dt} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \varpi_1}; \quad \frac{d\varpi_1}{dt} = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \eta_1}; \\ \frac{d\eta_2}{dt} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \varpi_2}; \quad \frac{d\varpi_2}{dt} = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \eta_2}; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\eta_{3n}}{dt} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \varpi_{3n}}; \quad \frac{d\varpi_{3n}}{dt} = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \eta_{3n}}. \end{array}\right\} \quad (A.)$$

In this view, the problem of mathematical dynamics, for a system of n points, is to integrate a system (A.) of $6n$ ordinary differential equations of the first order, between the $6n$ variables $\eta_i\ \varpi_i$ and the time t; and the solution of the problem must consist in assigning these $6n$ variables as functions of the time, and of their own initial values, which we may call $e_i\ p_i$. And all these $6n$ functions, or $6n$ relations to determine them, may be expressed, with perfect generality and rigour, by the method of the former Essay, or by the following simplified process.

Integration of the Equations of Motion, by means of one Principal Function.

4. If we take the variation of the definite integral

$$\mathrm{S} = \int_0^t \left(\Sigma \,.\, \varpi \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \varpi} - \mathrm{H}\right) dt \quad (18.)$$

without varying t or dt, we find, by the Calculus of Variations,

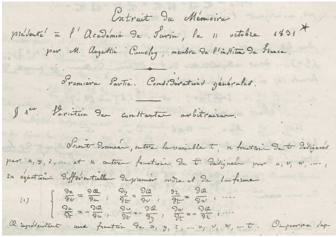
$$\delta \mathrm{S} = \int_0^t \delta \mathrm{S}' \,.\, dt, \quad (19.)$$

in which

$$\mathrm{S}' = \Sigma \,.\, \varpi \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \varpi} - \mathrm{H}, \quad (20.)$$

1834

1831



Extrait du Mémoire

présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831*

par M. Augustin Cauchy, membre de l'institut de France.

Première Partie. Considérations générales.

§ 1er. Variation des constantes arbitraires.

Soient données, entre la variable t, n fonctions de t désignées par $x, y, z, \dots$ et n autres fonctions de t désignées par $u, v, w, \dots$, $2n$ équations différentielles du premier ordre et de la forme

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial w}, \dots \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z}, \dots \end{array}\right.$$

Q représentant une fonction de $x, y, z, \dots u, v, w, \dots t$. On pourra sup-

Hamilton avait été devancé de
3 ans par Cauchy...
mais signale que le travail est de Lagrange


THE
PRINCIPLES
OF
QUANTUM MECHANICS
BY
P. A. M. DIRAC
OXFORD
AT THE CLARENDON PRESS
1930

C'est Dirac le Fautif !

Equation (11) or (13) shows how any dynamical variable varies with time in the Heisenberg picture and gives us *Heisenberg's form for the equutions of motion.* These equations of motion are determined by the one linear Operator H_t, which is just the transform of the linear Operator H occurring in Schrödinger's form for the equations of motion and corresponds to the energy in the Heisenberg picture. We shall call the dynamical variables in the Heisenberg picture, where they vary with the time, *Heisenberg dynamical variables,* to distinguish them from the fixed dynamical variables of the Schrödinger picture, which we shall call *Schrödinger dynamical variables.* Each Heisenberg dynamical variable is connected with the corresponding Schrödinger dynamical variable by equation (10). Since this connexion is a unitary transformation, all algebraic and functional relationships are the same for both kinds of dynamical variable. We have $T = 1$ for $t = t_0$, so that $v_{t_0} = v$ and any Heisenberg dynamical variable at time t_0 equals the corresponding Schrödinger dynamical variable.

Equation (13) can be compared with classical mechanics, where we also have dynamical variables varying with the time. The equations of motion of classical mechanics can be written in the Hamiltonian form

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \tag{14}$$

where the q's and p's are a set of canonical coordinates and momenta and H is the energy expressed as a function of them and possibly also of t. The energy expressed in this way is called the *Hamiltonian.* Equations (14) give, for any function v of the q's and p's that does not contain the time t explicitly,

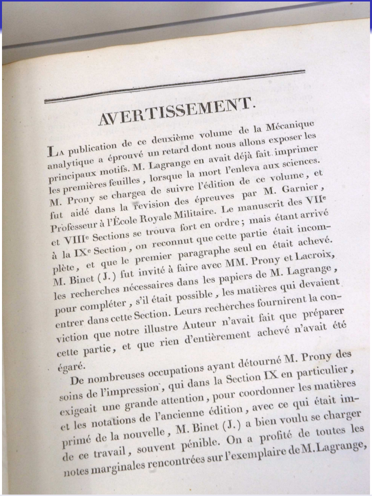
$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \sum_r \left\{\frac{\partial v}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt} + \frac{\partial v}{\partial p_r}\frac{dp_r}{dt}\right\} \\ &= \sum_r \left\{\frac{\partial v}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial v}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_r}\right\} \\ &= [v, H], \end{aligned} \tag{15}$$

with the classical definition of a P.B., equation (1) of § 21. This is of the same form as equation (13) in the quantum theory. We thus get an analogy between the classical equations of motion in the Hamiltonian form and the quantum equations of motion in Heisenberg's form. This analogy provides a justification for the assumption

Une dernière question ?

- Les comptes-rendus des séances de 1809 et 1810 de l'académie n'ont été publiés qu'en 1870...

- La seconde édition de la mécanique analytique a été publiée en 1815, deux ans après la mort de Lagrange.
  Elle a été terminée par J.M. Binet...



AVERTISSEMENT.

La publication de ce deuxième volume de la Mécanique analytique a éprouvé un retard dont nous allons exposer les principaux motifs. M. Lagrange en avait déjà fait imprimer les premières feuilles, lorsque la mort l'enleva aux sciences. M. Prony se chargea de suivre l'édition de ce volume, et fut aidé dans la revision des épreuves par M. Garnier, Professeur à l'École Royale Militaire. Le manuscrit des VII^e et VIII^e Sections se trouva fort en ordre; mais étant arrivé à la IX^e Section, on reconnut que cette partie était incomplète, et que le premier paragraphe seul en était achevé. M. Binet (J.) fut invité à faire avec MM. Prony et Lacroix, les recherches nécessaires dans les papiers de M. Lagrange, pour compléter, s'il était possible, les matières qui devaient entrer dans cette Section. Leurs recherches fournirent la conviction que notre illustre Auteur n'avait fait que préparer cette partie, et que rien d'entièrement achevé n'avait été égaré.

De nombreuses occupations ayant détourné M. Prony des soins de l'impression, qui dans la Section IX en particulier, exigeait une grande attention, pour coordonner les matières et les notations de l'ancienne édition, avec ce qui était imprimé de la nouvelle, M. Binet (J.) a bien voulu se charger de ce travail, souvent pénible. On a profité de toutes les notes marginales rencontrées sur l'exemplaire de M. Lagrange,

A-t-on la preuve que Lagrange a bien écrit ce $\mathcal{H}$?
Pourquoi cette lettre ?

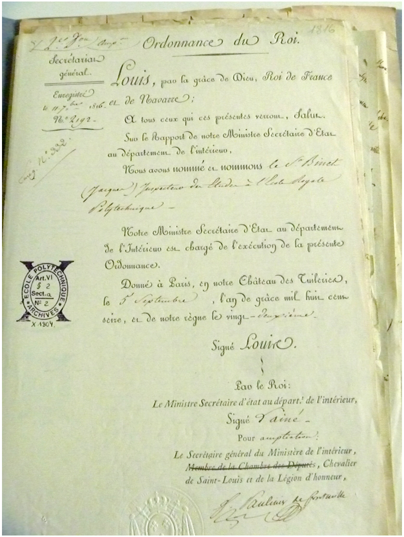
Le trésor de l'ENSTA

À la mort de Lagrange, le 10 avril 1813, tout part à vau l'eau !

- Napoléon est en Allemagne !
- Il perd la bataille de Leipzig en octobre 1813
- Il perd la campagne de France en mars 1814
- Il abdique en avril.
- Le 20 mars 1815, il reprend le pouvoir : les cent-jours !
- Le 22 juin 1815, Waterloo...

- Louis XVIII débarque à Calais le 24 avril 1814, il accède au trone. Première restauration !
- 8 juillet 1815, il reprend son trone !
  Seconde restauration !

Louis XVIII nomme Jacques Marie Binet, directeur de l'École Royale Polytechnique le 5 septembre 1816.


Ordonnance du Roi.

Secrétariat général.

Enregistré le 11 7.bre 1816. N.° 2192.

Louis, par la grâce de Dieu, Roi de France et de Navarre;

A tous ceux qui ces présentes verront, Salut.

Sur le Rapport de notre Ministre Secrétaire d'Etat au département de l'intérieur,

Nous avons nommé et nommons le S.r Binet (Jacques) Inspecteur des Études à l'École Royale Polytechnique –

Notre Ministre Secrétaire d'Etat au département de l'Intérieur est chargé de l'exécution de la présente Ordonnance.

Donné à Paris, en notre Château des Tuileries, le 5 Septembre, l'an de grâce mil huit cent seize, et de notre règne le vingt-deuxième.

Signé Louis.

Par le Roi:

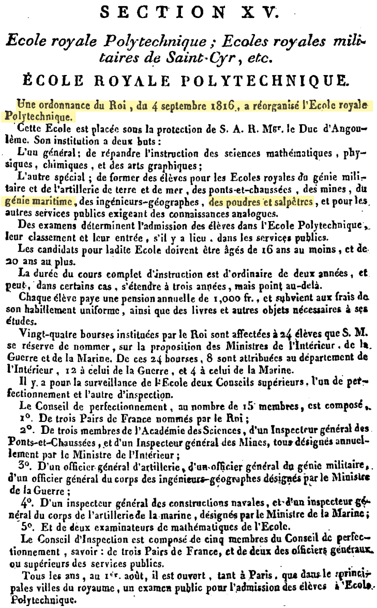
Le Ministre Secrétaire d'état au départ.t de l'intérieur,

Signé Lainé.

Pour ampliation:

Le Secrétaire général du Ministère de l'intérieur, ~~Membre de la Chambre des Députés~~, Chevalier de Saint-Louis et de la Légion d'honneur, La veille, il avait réorganisé cette Ecole !

L'Ecole du Génie Maritime est de retour en grâce !



SECTION XV.

Ecole royale Polytechnique ; Ecoles royales militaires de Saint-Cyr, etc.

ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

Une ordonnance du Roi, du 4 septembre 1816, a réorganisé l'Ecole royale Polytechnique.

Cette Ecole est placée sous la protection de S. A. R. Mgr. le Duc d'Angoulême. Son institution a deux buts :

L'un général ; de répandre l'instruction des sciences mathématiques, physiques, chimiques, et des arts graphiques ;

L'autre spécial ; de former des élèves pour les Ecoles royales du génie militaire et de l'artillerie de terre et de mer, des ponts-et-chaussées, des mines, du génie maritime, des ingénieurs-géographes, des poudres et salpêtres, et pour les autres services publics exigeant des connaissances analogues.

Des examens déterminent l'admission des élèves dans l'Ecole Polytechnique, leur classement et leur entrée, s'il y a lieu, dans les services publics.

Les candidats pour ladite Ecole doivent être âgés de 16 ans au moins, et de 20 ans au plus.

La durée du cours complet d'instruction est d'ordinaire de deux années, et peut, dans certains cas, s'étendre à trois années, mais point au-delà.

Chaque élève paye une pension annuelle de 1,000 fr., et subvient aux frais de son habillement uniforme, ainsi que des livres et autres objets nécessaires à ses études.

Vingt-quatre bourses instituées par le Roi sont affectées à 24 élèves que S. M. se réserve de nommer, sur la proposition des Ministres de l'Intérieur, de la Guerre et de la Marine. De ces 24 bourses, 8 sont attribuées au département de l'Intérieur, 12 à celui de la Guerre, et 4 à celui de la Marine.

Il y a pour la surveillance de l'Ecole deux Conseils supérieurs, l'un de perfectionnement et l'autre d'inspection.

Le Conseil de perfectionnement, au nombre de 15 membres, est composé,

1°. De trois Pairs de France nommés par le Roi ;

2°. De trois membres de l'Académie des Sciences, d'un Inspecteur général des Ponts-et-Chaussées, et d'un Inspecteur général des Mines, tous désignés annuellement par le Ministre de l'Intérieur ;

3°. D'un officier général d'artillerie, d'un officier général du génie militaire, d'un officier général du corps des ingénieurs-géographes désignés par le Ministre de la Guerre ;

4°. D'un inspecteur général des constructions navales, et d'un inspecteur général du corps de l'artillerie de la marine, désignés par le Ministre de la Marine ;

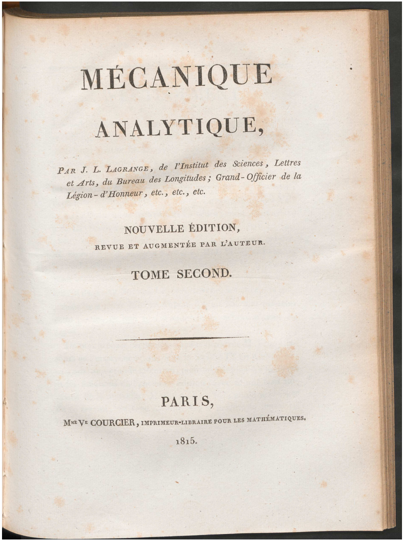
5°. Et de deux examinateurs de mathématiques de l'Ecole.

Le Conseil d'Inspection est composé de cinq membres du Conseil de perfectionnement, savoir : de trois Pairs de France, et de deux des officiers généraux ou supérieurs des services publics.

Tous les ans, au 1er. août, il est ouvert, tant à Paris, que dans les principales villes du royaume, un examen public pour l'admission des élèves à l'Ecole Polytechnique.

Binet venait de terminer la seconde édition de la mécanique analytique

Il en fait réaliser un exemplaire unique exceptionnel contenant un manuscrit du Maître...



MÉCANIQUE

ANALYTIQUE,

PAR J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, etc., etc., etc.

NOUVELLE ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

TOME SECOND.

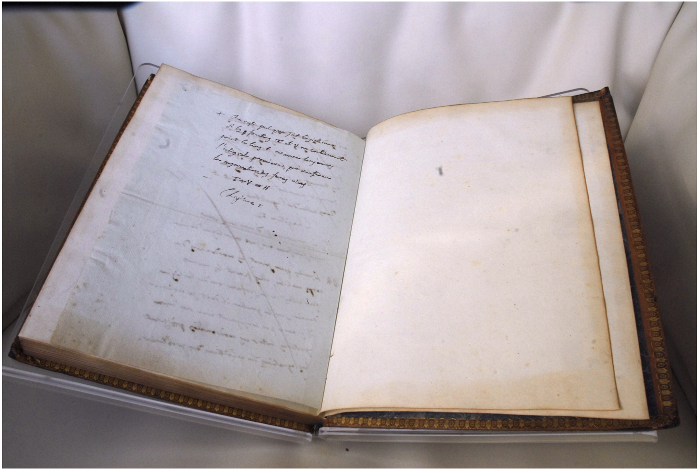
PARIS,

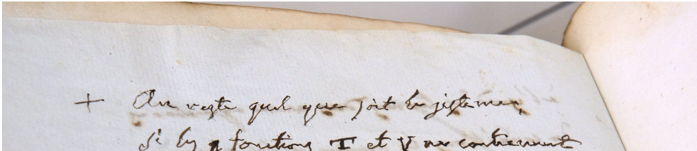
M^me^ V^e^ COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES,

1815.

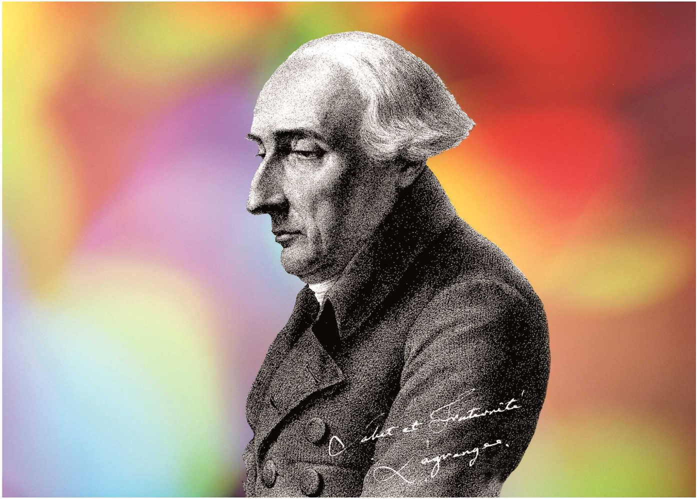
...qu'il offre au Directeur de l'Ecole du Génie Maritime.

Le feuillet du manuscrit qu'il contient est de la main de l'auteur





Le legs de Joseph-Louis Lagrange



Depuis Lagrange on sait écrire la physique...

Ecrire des Lagrangiens à partir de considérations de symétries :

- Mécanique classique : $\mathcal{L}_c = T\left(\dot{\vec{q}}\right) - U\left(\dot{\vec{q}}\right)$
- Relativité restreinte : $\mathcal{L}_m = mc - A_\mu J^\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
- Relativité générale : $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_m - \chi R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$
- Mécanique quantique

$$\mathcal{L}_q = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\psi\right) - V\psi\psi^*$$

- QED : $\mathcal{L}_{\text{qed}} = \psi^* \left[i\gamma_\mu \left(\partial^\mu - iqA^\mu\right) - mc\right]\psi - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
- QCD : $\mathcal{L}_{\text{qcd}} = \psi^* \left[i\gamma_\mu \left(\partial^\mu - iqA^\mu\right) - mc\right]\psi - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\right)$
- $\cdots$

Les équations de la physique ont une forme particulière...

Définir des impulsions, puis des Huygensiens pour écrire comme il faut les équations de la physique :

- Mécanique classique : $\dfrac{d\varphi}{dt} = \{\varphi, \mathcal{H}\}$
- Mécanique quantique : $\overline{i\hbar\dfrac{d\hat{A}}{dt}} = \overline{\left[\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}\right]}$
- Mécanique statistique :

$$\Gamma = (\vec{p}, \vec{q}), \quad \frac{d\mathcal{F}[f]}{dt} = \int f(\Gamma, t) \left\{ \frac{\delta\mathcal{F}[f]}{\delta f}, \frac{\delta\mathcal{H}[f]}{\delta f} \right\} d\Gamma := \langle \mathcal{F}, \mathcal{H} \rangle$$

- + Versions relativistes ...
- Equation fondamentale de la physique :

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \lfloor \Phi, \Lambda \rceil \quad \text{avec} \quad \left[\begin{array}{l} \Phi \text{ quelconque} \\ (\lambda, \Lambda) \text{ couple de Noether} \\ \lfloor\ ,\ \rceil \text{ crochet de Lie} \end{array} \right.$$

Merci Lagrange...

...et merci pour votre attention !