Alicia Simon-Petit, **Jérôme Perez**, Guillaume Duval & Paul Ramond

21 Mars 2019





Alicia Simon-Petit, Jérôme Perez, Guillaume Duval *Isochrony in 3D radial potentials.*

Communication in Mathematical Physics, 2018 Dispo. en ligne: https://arxiv.org/abs/1804.11282.

La théorie de la relativité isochrone

- 1 Systèmes autogravitants
- 2 La propriété d'isochronie
- 3 La théorie de la relativité isochrone
- **Applications**

La théorie de la relativité isochrone

•0000

Systèmes autogravitants

- Systèmes autogravitants
- La propriété d'isochronie
- La théorie de la relativité isochrone

Un amas d'étoiles : ω -Centauri (exemple...)





- 10^6 étoiles
- R = 80 Al
- d = 86 kAl
- Taille d'une étoile : 10^{-7} Al

1 Al $\sim 10^{16}$ m



Région centrale homogène

00000



Des propriétés en commun...

Conservation de $m\xi = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + m\psi$ et $m\Lambda = m\vec{r}\wedge\dot{\vec{r}}$. Mouvement plan.

Orbites périodiques dans un potentiel central

La distance radiale r(t) vérifie une EDO

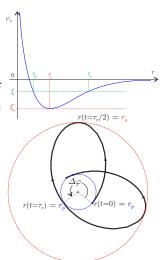
Systèmes autogravitants

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \xi - \psi(r) - \frac{\Lambda^2}{2r^2}$$

On se place dans le potentiel effectif $\psi_e(r) = \psi(r) + \frac{\Lambda^2}{2r^2}$. Si r(t) est périodique 🐛 sa période est définie par la relation

$$\tau_r = 2 \int_{t_p}^{t_a} dt = 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{dt}{dr} dr$$
$$= 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2 \left[\xi - \psi(r)\right] - \frac{\Lambda^2}{r^2}}}$$

En général : $\tau_r = \tau_r(\xi, \Lambda)$.



La théorie de la relativité isochrone

- 2 La propriété d'isochronie
- La théorie de la relativité isochrone

Les potentiels isochrones

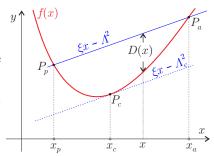
Un potentiel est isochrone si toutes ses orbites bornées non radiales sont telles que $\tau_r = \tau_r(\xi)$.

On passe en variables de Hénon $x=2r^2$ et $f(x)=x\psi(x)$, on a

$$\tau_r = \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_a} \frac{dx}{\sqrt{\xi x - \Lambda^2 - f(x)}} = \frac{1}{2} \int_{x_p}^{x_a} \frac{dx}{\sqrt{D(x)}}$$

La fonction D(x) est une distance verticale entre f(x) et une droite définie par l'orbite (ξ, Λ) .

Idée : utiliser l'orbite circulaire d'énergie ξ .



Systèmes autogravitants

Avec l'orbite circulaire (ξ, Λ_c) , on a

$$\lambda^2 = \Lambda_c^2 - \Lambda^2 = D(x) + u^2(x)$$

et la période devient

On pose alors $u(x) = \lambda \sin \varphi$ et l'on obtient

$$au_r = rac{1}{2} \int_{arphi_r}^{arphi_a} rac{dx}{du} darphi = rac{1}{2} \int_{+\pi/2}^{-\pi/2} rac{F(\lambda \sin arphi) darphi}{2}$$

F(u) = x'(u) est analytique, on écrit $F(u) = \sum_n a_n u^n$ soit

$$\tau_r = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(a_0 + a_1 \lambda \sin \varphi + a_2 \lambda^2 \sin^2 \varphi + \cdots \right) d\varphi$$
$$= a_0 \frac{\pi}{2} + 0 + a_2 \lambda^2 \frac{\pi}{4} + 0 + a_4 \lambda^4 \frac{3\pi}{16} + \cdots$$

On a $\tau_r = \tau_r(\xi, \lambda)$, ssi $a_{2n} = 0$ pour tout $n \ge 1$.

Ainsi

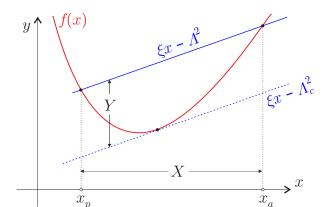
$$F(u) = \frac{dx}{du} = \frac{2\tau_r}{\pi} + \sum_{n>1} a_{2n+1} u^{2n+1}$$

On obtient donc

$$x = \int F(u)du = \frac{2\tau_r}{\pi}u + G(u) + \text{cte}$$
 où G est une fonction paire

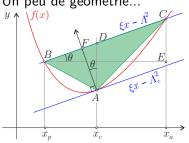
On a donc

$$x_a - x_p = \frac{2\tau_r \left(u_a - u_p\right)}{\pi} + G(u_a) - G(u_p) = \frac{4\tau_r \lambda}{\pi} \Rightarrow \boxed{\tau_r = \frac{\pi}{4} \frac{x_a - x_p}{\sqrt{\Lambda_c^2 - \Lambda^2}}}$$



$$\Lambda_c^2 - \Lambda^2 = \frac{\pi^2}{16\tau_r^2}(x_a - x_p)^2$$
 i.e. $Y \propto X^2$

Un peu de géométrie...



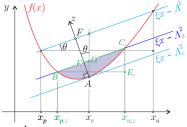
L'aire du triangle inscrit sous la corde est

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}BC \times AF = \frac{1}{2}BE \times AD$$

Calculons l'aire totale sous la corde.

On utilise une intégrale de Lebesgue

$$\mathcal{A} = \int_{z=0}^{z=AF} B_z C_z dz$$



L'isochronie impose que $B_z C_z = \frac{4\tau_r}{\pi \cos^{3/2} \theta} \sqrt{z}$, on calcule alors que

$$A = \frac{4}{3}T \Leftrightarrow \text{Le graphe de } f \text{ est une parabole !}$$

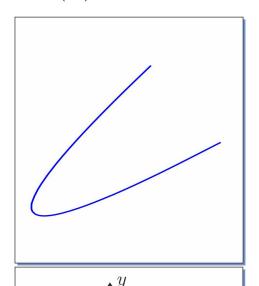
Containtes physiques sur les paraboles isochrones

- La parabole doit posséder au moins une partie de son graphe $\mathscr C$ dans le demi-plan $x=2r^2>0$;
- La parabole doit couper l'axe Oy au moins une fois afin de pouvoir définir le potentiel $\psi(r)=f(x)/x$ dans un région autour de l'origine ;
- On doit pouvoir définir des orbites périodiques (ξ,Λ) dans le potentiel défini par la parabole : La ligne $\mathscr{L}: y = \xi x \Lambda^2$ doit couper la parabole en deux (orbite périodique) ou un point(orbite circulaire) ;
- L'équation du mouvement s'écrit

$$0 \le \frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - f(x)$$

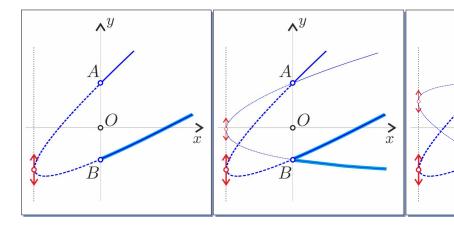
elle traduit le fait que la trajectoire concerne la portion de $\mathscr C$ située au dessous de $\mathscr L$.

La théorie de la relativité isochrone



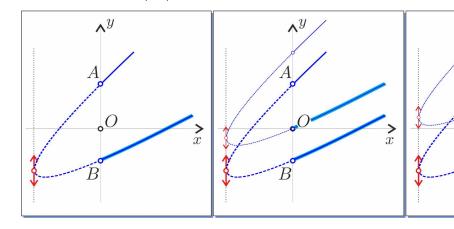
Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - f(x).$$

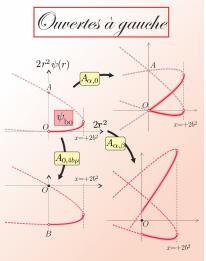


Changer ξ ou Λ

$$\frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \xi x - \Lambda^2 - f(x).$$



Classification des isochrones



$$\psi_{\text{bo}}(r) = \alpha + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\mu}{b + \sqrt{b^2 - r^2}}$$

Ouvertes à droite

La théorie de la relativité isochrone

•00000000000000

Sommaire

- La propriété d'isochronie
- 3 La théorie de la relativité isochrone

De l'harmonique au Keplerien...

Mouvement harmonique $(\xi_{\mathrm{ha}},\Lambda_{\mathrm{ha}})$ repéré par $\vec{r}=r(\theta)\hat{e}_r.$

$$\xi_{\text{ha}} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{\Lambda_{\text{ha}}^2}{r^2} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \qquad \left[\left\{ r = \sqrt{\rho} \right\} \right]$$

$$\xi_{\text{ha}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{\Lambda_{\text{ha}}^2}{\rho} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \rho = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{\Lambda_{\text{ha}}^2}{\rho} \right] + \frac{1}{2} \omega^2 \rho$$

$$\frac{4\xi_{\mathrm{ha}}}{\rho} = \frac{1}{2\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{2\Lambda_{\mathrm{ha}}^2}{\rho^2} + \omega^2 \qquad \left[\left\{\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + \frac{2\Lambda_{\rm ha}^2}{\rho^2} + \omega^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + \frac{4\Lambda_{\rm ha}^2}{\rho^2} \right] + \omega^2$$
From écrit

que l'on écrit $-\omega^2=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2+\frac{4\Lambda_{\rm ha}^2}{\rho^2}\right]-\frac{4\xi_{\rm ha}}{\rho}$

<u>De l'harmonique au Keplerien...</u>

$$-\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + \frac{4\Lambda_{\text{ha}}^2}{\rho^2} \right] - \frac{4\xi_{\text{ha}}}{\rho}$$

On pose $\xi_{\rm ke} = -\omega^2 < 0$, $\mu = 4\xi_{\rm ha} > 0$ mais aussi

$$\Lambda_{\rm ke} = \rho^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = 2\Lambda_{\rm ha} = r^2 \frac{d(2\theta)}{dt}$$

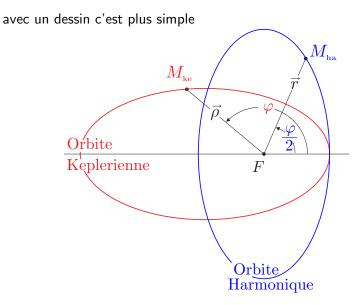
II vient alors

Systèmes autogravitants

$$\xi_{\mathrm{ke}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 + \frac{\Lambda_{\mathrm{ke}}^2}{\rho^2} \right] - \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{\rho}}{d\tau} \right)^2 - \frac{\mu}{\rho}$$

Mouvement keplerien $(\xi_{\rm ke}, \Lambda_{\rm ke})$ repéré par $\vec{\rho} = \rho(\varphi = 2\theta) \widehat{e}_{
ho}$.

e i narmonique au Kepierien...



De l'harmonique au Keplerien...

La propriété d'isochronie

Bilan des opérations

$$\xi_{\mathrm{ke}} = -\omega^{2} = -2\psi_{\mathrm{ha}}(r)/r^{2}$$

$$-\rho\psi_{\mathrm{ke}}(\rho) = \begin{array}{ccc} \mu & = & 4\xi_{\mathrm{ha}} \\ \frac{d}{d\tau} & = & \frac{1}{r^{2}}\frac{d}{dt} \\ \Lambda_{\mathrm{ke}} & = & 2\Lambda_{\mathrm{ha}} \end{array}$$

Lorsque l'on passe en variable de Hénon, on comprend mieux...

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 & = & \xi_{\mathrm{ha}} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 - \frac{\Lambda_{\mathrm{ha}}^2}{2r^2} \\ \frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 & = & \xi_{\mathrm{ha}} x - y(x) - \Lambda_{\mathrm{ha}}^2 \\ & \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} \frac{dx}{d\tau} \right)^2 & = & \xi_{\mathrm{ha}} x - y(x) - \Lambda_{\mathrm{ha}}^2 \\ \frac{1}{16} \left(\frac{dx'}{d\tau} \right)^2 & = & \xi_{\mathrm{ke}} x' - y'(x') - \Lambda_{\mathrm{ke}}^2 \\ & \frac{1}{16} \left(\frac{dx'}{d\tau} \right)^2 & = & \xi_{\mathrm{ke}} x' - y'(x') - \Lambda_{\mathrm{ke}}^2 \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} x' = 2r^2 \\ y(x) = x\psi_{\mathrm{ha}} \left(\sqrt{x/2} \right) \\ x' = 2r^2 \\ y'(x') = x'\psi_{\mathrm{ke}} \left(\sqrt{x'/2} \right) \\ y'(x') = x'\psi_{\mathrm{ke}} \left(\sqrt{x'/2} \right) \\ \end{bmatrix}$$

On remarque que $y'(x') = -\xi_{ha}x$ et $\xi_{ke}x' = -y(x)...$

De l'harmonique au Keplerien...

C'est la transformation de Bohlin (proposée en 1911 mais pas dans ce formalisme)

La théorie de la relativité isochrone

$$\begin{bmatrix} \xi_{\rm ke} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\rm ha} x \\ y \end{bmatrix}$$

La transformation inverse (Hooke→Kepler) avait été mise en évidence par Levi-Civita en 1906 pour régulariser le problème à 2 corps.

Il s'agit d'un échange complet entre ξx et y dans l'équation du mouvement

$$\frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \xi_{\text{ha}} x - y(x) - \Lambda^2$$

avec une adaptation de t et de Λ .

Idée : échange partiel $\xi x \leftrightarrow y(x)$ qui préserve l'isochronie.

$$\frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \Lambda^2 = \xi x - y\left(x\right) \leftrightarrow \frac{1}{16} \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\Lambda'\right)^2 = \xi' x' - y'\left(x'\right)$$

L'échange entre ξx et y est linéaire! (pour préserver la « parabolitude »)

$$\xi x - y = \xi' x' - y',$$

$$\begin{bmatrix} \xi'x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi'x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi x \\ y \end{bmatrix} \text{ une Bohlin...}$$

$$\begin{bmatrix} \xi'x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha - 1 & \beta + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi x \\ y \end{bmatrix} \text{ un } \ll \text{Bolst} \gg 1$$

$$B_{\alpha,\beta}$$

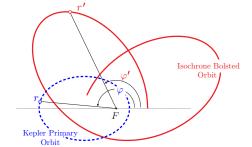
Bolst

Théorème

Si $\alpha\beta\xi'\neq 0$, le Bolst d'une orbite keplerienne $r(\varphi)$ d'énergie $\xi<0$ est une orbite isochrone $r'(\varphi')$ d'énergie ξ' telle que

$$\xi'r'^{2} = \alpha\xi r^{2} - \mu\beta r$$

$$\varphi'(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi + \frac{\chi \arctan\left[\sqrt{\frac{1+\chi-e}{1+\chi+e}}\tan(\frac{\varphi}{2})\right]}{\sqrt{(1+\chi)^{2}-e^{2}}} \quad \left[\begin{array}{c} \chi = \frac{p\alpha|\xi|}{\mu\beta} \\ p,e : \textit{Ellipse Kep.} \end{array}\right]$$



Systèmes autogravitants

On peut se restreindre aux Bolsts symétriques (iBolst)

$$\frac{1}{16} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \Lambda^2 = \xi x - y(x), \qquad \frac{1}{16} \left(\frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \left(\Lambda' \right)^2 = \xi' x' - y'(x')$$

Echange symétrique entre ξx et y:

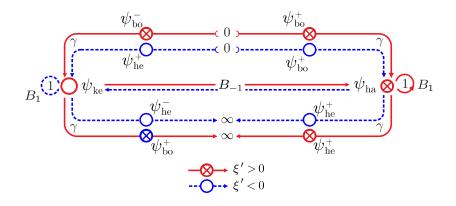
$$\left(\begin{array}{c} \xi'x'\\ y'\end{array}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} \gamma+1 & \gamma-1\\ \gamma-1 & \gamma+1\end{array}\right]}_{B_{\gamma}}\left(\begin{array}{c} \xi x\\ y\end{array}\right),$$

où B_{γ} est inversible $\Leftrightarrow \gamma = \alpha + \beta \neq 0$.

Le groupe des *i* Bolst kepleriens

Théorème

Tout potentiel isochrone est dans l'orbite du potentiel keplerien sous l'action du groupe des iBolst : $\mathbb{B} = \{B_{\gamma}, \gamma \in \mathbb{R}^*\}.$



i Bolsts

Systèmes autogravitants

Le paramètre γ donne la représentation multiplicative du groupe des *i*Bolst

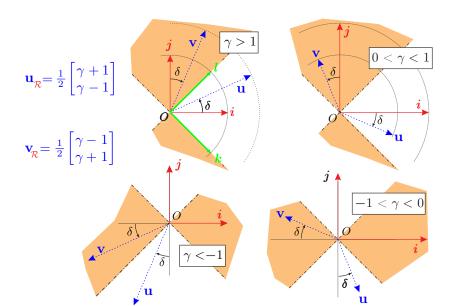
$$\mathbb{B} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \gamma + 1 & \gamma - 1 \\ \gamma - 1 & \gamma + 1 \end{bmatrix} \gamma \in \mathbb{R}^* \right\}$$

On vérifie immédiatement que $B_1 = Id$ et $B_{\gamma}B_{\gamma'} = B_{\gamma\gamma'}$

La représentation additive de \mathbb{B} s'écrit :

$$B_{\chi} = \left\{ \begin{array}{l} e^{\chi} \left[\begin{array}{c} \cosh(\chi) & \sinh(\chi) \\ \sinh(\chi) & \cosh(\chi) \end{array} \right] & \text{si } \gamma > 0, \\ e^{-\chi} \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \cosh(\chi) & \sinh(\chi) \\ \sinh(\chi) & \cosh(\chi) \end{array} \right] & \text{si } \gamma < 0, \end{array} \right.$$

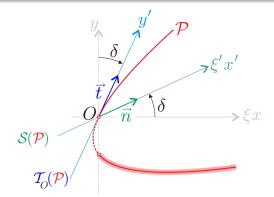
avec $\chi = \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\gamma) \ln |\gamma|$.



Référentiels propres

Définition

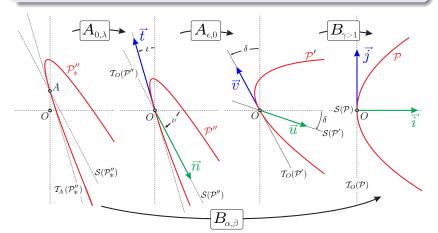
Le référentiel propre d'une parabole \mathcal{P} est $\left(O, \vec{t}, \vec{n}\right)$ où $\mathcal{T}_O\left(\mathcal{P}\right) = \mathbb{R}\vec{t}$ est la tangente à \mathcal{P} en l'origine O et $\mathcal{S}\left(\mathcal{P}\right) = \mathbb{R}\vec{n}$ son axe de symétrie.



Etre ou ne pas être isochrone...

Théorème

Une orbite est isochrone ssi elle est l'image d'une orbite keplerienne bornée par un Bolst.



Considérons $\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$ et $\vec{l}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ les deux vecteurs propres de l'iBolst B_{γ} . On a

$$B_{\gamma}\left(\vec{k}\right) = \vec{k} \text{ et } B_{\gamma}\left(\vec{l}\right) = \gamma \, \vec{l}.$$

Dans le système de coordonnées affine $(w_1=\xi x,w_2=y)$ et en posant $\vec{w}'=B_{\gamma}\left(\vec{w}\right)$, on en déduit

$$\begin{cases} \xi'x' - y' = \xi x - y \\ \xi'x' + y' = \gamma (\xi x + y) \end{cases} \implies (\xi'x')^2 - y'^2 = \gamma \left[(\xi x)^2 - y^2 \right].$$

- Principe de relativité restreinte d'Einstein : les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens ;
- La longueur de l'intervalle d'espacetemps $c^2dt^2-x^2$ est conservée dans un changement de référentiel galiléen.
- Principe de relativité isochrone : les équations du mouvement sont les mêmes dans tous les référentiels propres ;
- La longueur de « l'intervalle isochrone », $\xi x y$, est conservée dans tout changement de référentiel.

Principe de relativité isochrone

Dans le référentiel canonique \mathcal{R}_O , avec le temps propre $d\tau=\xi dt$, une orbite keplerienne (ξ,Λ^2) décrite par les coordonnées affines $(\xi x,y)$ vérifie

$$\frac{1}{10} \left[\frac{d}{d} \left(\vec{w} | \vec{i} \right) \right]^2 = \left(\vec{w} | \vec{i} - \vec{j} \right) + \left(\vec{w}_{\Lambda} | \vec{j} \right)$$

- La propriété d'isochronie
- La théorie de la relativité isochrone
- **Applications**

La 3^{eme} loi de Kepler

HARMONICIS LIB. V. 189

sum, a mouns medium diarmum fine diminutione applicemus didiputie mediori, quali ise sidinatti mediori transus apparere, quaturell's utinfritim Mercurio apparebit. Har professionare diatraria E.A.R. Copertiensa L.B. Va finerun cump professionare commoranda, quia actionet i pfillimo sermino di harmonarem celerlum; per le fingulos les forfine condiderare di

Segmin, di cui forte-courrant; in moni durati, qui noa apparatin 3 % necessite 30 de des Certa rela pleamation de qualus aguili. N. 11 p. 40 monato de recite 20 de de la Certa rela pleamation qualus aguili. N. 11 p. 40 monato de la Cepta indicate coma ranamoni porte machine a merca monato apparation qual mante de la coma della coma de la coma della c

Odav hadems egmende deirerfin motive il archas units, Ker. W. oppferin Päteres. I mentande hatorum Hancorum motitas inte di Privatorio prideri Päteres. I mentande hatorum Hancorum motitas inte di Privatorio principale dei privatorio dei privatori

second from America Marie II and ged lengthe serial. I mill if exempts are serial in the contract of the contr

ad proportionem Orbium — fera quidem respectit inertems ,

Respectit tamen & longo post tempore venit;

caque si temporis articulos petis, g. Marc. hujus anii millesimi sexentofimi decimi octavi animo concepta, sed infericirer ad calculos vocata,

Property falsareign denienes a Mallamore

La 3^{eme} loi de Kepler

Commun. Math. Phys. Digital Object Identifier (DOI) https://doi.org/10.1007/s00220-018-3212-v Communications in Mathematical **Physics**



Isochrony in 3D Radial Potentials

From Michel Hénon's Ideas to Isochrone Relativity: Classification, Interpretation and Applications

Alicia Simon-Petit¹, Jérôme Perez¹, Guillaume Duval²

Received: 13 October 2017 / Accepted: 31 May 2018 © Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2018

Applied Mathematics Laboratory, Ensta ParisTech, Paris Saclay University, Palaiseau, France. E-mail: alicia.simon-petit@ensta-paristech.fr; jerome.perez@ensta-paristech.fr

Mathematics and Informatics Laboratory, INSA Rouen, Saint-Étienne-du-Rouvray, France

Demi grand axe isochrone

• Dans un Kepler $\psi_{\rm ke}(r) = -\frac{\mu}{r}$, le demi-grand axe est

$$a = \frac{r_a + r_p}{2}$$

• Dans un Hénon $\psi_{\rm he}(r) = -\frac{\mu}{h+\sqrt{h^2+r^2}}$, on définit

$$a = \frac{\sqrt{b^2 + r_a^2} + \sqrt{b^2 + r_p^2}}{2}$$

• Dans le potentiel borné $\psi_{\rm bo}(r) = \frac{\mu}{h + \sqrt{h^2 - r^2}}$, on pose

$$a = \frac{\sqrt{b^2 - r_a^2} + \sqrt{b^2 - r_p^2}}{2}$$

• A l'intérieur d'une boule homogène de rayon R et de masse M, le potentiel est $\psi_{\rm ha}^R(r) = \frac{1}{2} \frac{GM}{R^2} r^2$ on pose

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} R$$

La 3^{eme} loi de Kepler des isochrones

Théorème

Systèmes autogravitants

Pour toute orbite périodique dans un potentiel isochrone, le carré de la période radiale est proportionnel au cube du demi grand axe isochrone:

$$\tau_r^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3$$

où μ est le paramètre de masse dans $\psi_{\rm ke}$, $\psi_{\rm he}$, $\psi_{\rm bo}$ ou $\mu=\omega^2R^3$ dans $\psi_{\rm ha}^R$.

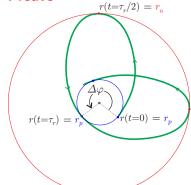
Le théorème de Bertrand

Théorème

Systèmes autogravitants

Dans l'espace \mathbb{R}^3 il n'existe que deux potentiels pour lesquels toutes les orbites bornées sont fermées : le keplerien et l'harmonique.

Preuve



La période τ_r et le déphasage $\Delta \varphi$ sont issus de l'action radiale

$$\mathcal{A}_r = 2 \int_{r_p}^{r_a} \sqrt{2 \left[\xi - \psi(r)\right] - \Lambda/r^2}$$

$$\tau_r = \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \xi} \ \text{et} \ \Delta \varphi = -\frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \Lambda}$$

Le théorème de Bertrand

Théorème

Dans l'espace \mathbb{R}^3 il n'existe que deux potentiels pour lesquels toutes les orbites bornées sont fermées : le keplerien et l'harmonique.

Preuve

Les fonctions τ_r et $\Delta \varphi$ dépendent de ξ et Λ , elles sont continues de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pour une orbite fermée $\Delta \varphi \in 2\pi \mathbb{Q}$, or une fonction continue sur un intervalle et prenant des valeurs dans $2\pi \mathbb{Q}$ est constante.

Ainsi pour une orbite fermée $0 = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}_r}{\partial \xi \partial \Lambda} = \frac{\partial \tau_r}{\partial \Lambda}$

Conclusion : si dans un potentiel toutes les orbites sont fermées alors il est isochrone.

Parmi les 4 isochrones 2 seulement ont $\Delta \varphi \in 2\pi \mathbb{Q}$: le képlerien $(\Delta \varphi = 2\pi)$ et l'harmonique $(\Delta \varphi = \pi)$.

• Caractérisation géométrique de l'ensemble des potentiels isochrones:

La théorie de la relativité isochrone

- Généralisation de la transformation de Bohlin : $(\xi_{\rm iso}, \psi_{\rm iso}) \stackrel{B_{\gamma}}{\leftrightarrow} (\xi_{\rm ke}, \psi_{\rm ke})$
- Relativité isochrone : Tout isochrone est képlerien dans son référentiel propre.
- Applications :
 - Généralisation de la 3^{eme} loi de Kepler :
 - Compréhension fine du théorème de Bertrand.
 - Dynamique des galaxies

Références

Systèmes autogravitants

- Alicia Simon-Petit, Jérôme Perez, Guillaume Duval. *Isochrony* in 3D radial potentials, Communication in Mathematical Physics, 2018. (arxiv.org/abs/1804.11282).
- Alicia Simon-Petit, Jérôme Perez, Guillaume Plum. *The status* of isochrony in the formation and evolution of self-gravitating systems, The Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2019. (arxiv.org/abs/1902.01095)
- Site web de Jérôme Perez : http://perso.ensta-paristech.fr/ perez/

La théorie de la relativité isochrone

Merci pour votre attention!

