Étude des étoiles de l'amas des Pléiades

Les Pléiades, situées à 428 années-lumière, forment ce que l'on appelle un amas ouvert, c'est-à-dire un groupe peu dense d'étoiles jeunes. A l'œil nu, sept étoiles des Pléiades sont visibles dans la constellation du Taureau. Les Pléiades sont répertoriées sous le numéro M45 dans le catalogue de Messier et NGC 1432/1435 dans le New General Catalogue, qui recense principalement les nébulosités. Sur la photo suivante des Pléiades, on observe des nuages de gaz, qui réfléchissent la lumière bleue des étoiles.

fig.1 : Amas des Pléiades
APOD NASA   Credit : Matthew T. Russell

Le but de cette activité est d'étudier quelques caractéristiques des étoiles de l'amas des Pléiades. Nous disposerons d'une photographie de bonne qualité et aurons recours à quelques lois de la physique, qui s'appliquent tout aussi bien à notre univers proche qu'à l'univers plus lointain des amas.

Sommaire

Feuille de route

Public :

- Niveau Terminale

Matériel :

- 1 double-décimètre
- 1 calculatrice scientifique
- 1 transparent

Temps nécessaire :

- 3h

I) Magnitudes des étoiles des Pléiades

Au II^{ème} siècle av. JC, le grec Hipparque de Nicée classa les étoiles en 6 types selon leur éclat. Ainsi, les étoiles de première grandeur (ou magnitude) étaient les plus brillantes tandis que les étoiles de sixième magnitude étaient les moins brillantes. Dans l’Almageste, livre VII chapitre V, Ptolémée reprit cette échelle des magnitudes pour son catalogue des constellations (voir figures 2a et 2b).

52 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ.

Α. ΜΟΡΦΩΣΕΙΣ.	Β. ΜΗΚΟΥΣ ΜΟΙΡΑΙ.	Γ. ΠΛΑΤΟΥΣ. Μ.	Δ. ΜΕΓΕΘΟΣ.
Τοῦ ἐν τῷ αὐχένι τετραπλεύρου τῆς προηγουμένης πλευρᾶς ὁ νοτιώτατος	Ταύρου.... η	Β ε	ε
Ο βορειότερος τῆς προηγουμένης πλευρᾶς	Ταύρου.... η ς''	Β ζ γ''	ε
Τῆς ἑπομένης πλευρᾶς ὁ νοτιώτερος	Ταύρου.... ιϐ	Β γ	ε
Ο βορειότερος τῆς ἑπομένης πλευρᾶς	Ταύρου.... ια γο''	Β ε	ε
Τῆς πλειάδος τὸ βόρειον πέρας τῆς ἡγουμένης πλευρᾶς	Ταύρου.... β ς''	Β δ ς''	ε
Τὸ νότιον πέρας τῆς ἡγουμένης πλευρᾶς	Ταύρου.... β ς''	Β γ γο''	ε
Τὸ ἑπόμενον καὶ ϛενώτατον πέρας τῆς πλειάδος	Ταύρου.... γ γο''	Β γ γο''	ε
Ο ἔκτος καὶ μικρὸς τῆς πλειάδος ἀπ’ ἄρκτων	Ταύρου.... γ'' γο''	Β ε	δ
Αϛέρες λβ̅, ὧν πρώτου μεγέθους α̅, τρίτου ϛ̅, τετάρτου ια̅, πέμπτου ιγ̅, ἕκτου α̅.			
ΟἹ ΠΕΡΙ ΤΟΝ ΤΑΥΡΟΝ ΑΜΟΡΦΩΤΟΙ.			
Ο ὑπὸ τὸν δεξιὸν πόδα καὶ τὴν ὠμοπλάτην	Κριοῦ.... κε	Ν ιζ ς''	δ
Τῶν ὑπὲρ τὸ νότιον κέρας γ̅ ὁ προηγούμενος	Ταύρου.... κ	Ν β	ε
Ο μέσος τῶν τριῶν	Ταύρου.... κα	Ν α ς'' δ''	ε
Ο ἑπόμενος αὐτῶν	Ταύρου.... κϛ	Ν β	ε
Τῶν ὑπὸ τὸ ἄκρον τοῦ νοτίου κέρατος β̅ ὁ βορειότερος	Ταύρου.... κθ	Ν ϛ γ''	ε
Ο νοτιώτερος αὐτῶν	Ταύρου.... κθ	Ν ζ γο''	ε
Τῶν ὑπὸ τὸ βόρειον κέρας ε̅ ἑπομένων ὁ προηγούμενος	Ταύρου.... κζ	Β γο''	ε
Ο τούτῳ ἑπόμενος	Ταύρου.... κθ	Β α	ε
Ο ἔτι τούτῳ ἑπόμενος	Διδύμων... α	Β α γ''	ε
Τῶν λοιπῶν καὶ ἑπομένων β̅ ο βορειότερος	Διδύμων... β γ''	Β γ γ''	ε
Ο νοτιώτερος αὐτῶν	Διδύμων... γ γ''	Β α δ''	ε
Αϛέρες ια̅, ὧν τετάρτου μεγέθους α̅, πέμπτου ι̅.			
ΔΙΔΥΜΩΝ ΑΣΤΕΡΙΣΜΟΣ.			
Ο ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ ἡγουμένου διδύμου	Διδύμων... κγ γ''	Β θ ς''	β
Ο ἐπὶ τῆς κεφαλῆς τοῦ ἑπομένου διδύμου ὑπόκιῤῥος	Διδύμων... κϛ γο''	Β ϛ δ''	β

fig.2a : Catalogue des constellations de Ptolémée (II^{ème} siècle ap. JC)
Constellation du Taureau à laquelle appartiennent les Pléiades
(version grecque)

COMPOSITION MATHÉMATIQUE, LIVRE VII. 53

1. CONFIGURATIONS.	2. DEGRÉS DE LONGITUDE.	DEGRÉS DE LATITUDE.	4. GRANDEUR.	LETTRES SELON BAYER.
La plus méridionale du côté occidental du quadrilatère dans le col	Taur... 8	B 5	5	p
La plus boréale du côté occidental	Taur... 8 $\frac{1}{2}$	B 7 $\frac{1}{3}$	5	ψ
La plus méridionale du côté oriental	Taur... 12	B 3	5	χ
La plus boréale du côté oriental	Taur... 11 $\frac{2}{3}$	B 5	5	φ
L'extrêmité boréale du côté occidental de la pléiade	Taur... 2 $\frac{1}{6}$	B 4 $\frac{1}{2}$	5	ε
L'extrêmité méridionale du côté occidental	Taur... 2 $\frac{1}{3}$	B 3 $\frac{2}{3}$	5	δ
L'extrêmité suivante et très-étroite de la pléiade	Taur... 3 $\frac{2}{3}$	B 3 $\frac{1}{3}$	5	η ou f
Une extérieure et petite de la pléiade, du côté des ourses	Taur... 3 $\frac{2}{3}$	B 5	4	142 e
Trente-deux étoiles, dont une de 1re grandeur, six de la 3e, onze de la 4e, treize de la 5e, une de la 6e.				
INFORMES AUTOUR DU TAUREAU.				
L'étoile sous le pied droit et l'omoplate	Bélier.. 25	A 17 $\frac{1}{2}$	4	10 ♉
L'occidentale des trois au-dessus de la corne méridionale	Taur... 20	A 2	5	ι
Celle qui fait le milieu des trois	Taur... 21	A 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	5	105 ♉
La suivante de celles-ci	Taur... 26	A 2	5	o
La plus boréale des 2 sous la pointe de la corne méridionale	Taur... 29	A 6 $\frac{1}{3}$	5	126 ♉
La plus méridionale de ces étoiles	Taur... 29	A 7 $\frac{2}{3}$	5	128 ♉
L'occidentale des cinq suivantes sous la corne boréale	Taur... 27	B 0 $\frac{2}{3}$	5	121 ♉
Celle qui la suit	Taur... 29	B 1	5	
Celle encore qui suit celle-ci	Gém... 1	B 1 $\frac{1}{2}$	5	132 ♉
La plus boréale des deux restantes et orientales	Gém... 2 $\frac{1}{3}$	B 3 $\frac{1}{3}$	5	136 ♉
La plus méridionale d'entr'elles	Gém... 3 $\frac{1}{3}$	B 1 $\frac{1}{4}$	5	139 ♉
Onze étoiles, dont une de 4e grandeur, dix de la 5e				
CONSTELLATION DES GÉMEAUX.				
L'étoile sur la tête du gémeau occidental (Castor)	Gém... 23 $\frac{1}{3}$	B 9 $\frac{1}{2}$	2	α
L'étoile rougeâtre sur la tête du gémeau oriental (Pollux)	Gém... 26 $\frac{2}{3}$	B 6 $\frac{1}{4}$	2	β

fig.2b : Catalogue des constellations de Ptolémée (IIème siècle ap. JC)
Constellation du Taureau à laquelle appartiennent les Pléiades

1) Étude théorique

On remarqua par la suite que cette échelle empirique des magnitudes était liée à l'intensité lumineuse reçue de telle façon qu'une différence de magnitude de 5 correspond à une diminution du flux radiant d'un facteur 100. Le flux radiant est l'énergie lumineuse reçue par unité de temps et de surface, mesurée par l'observateur.

Pouvez-vous deviner quel type de relation lie les magnitudes et les flux radiants ? Pouvez-vous proposer une relation ?

Astuce : penser au logarithme, et plutôt au logarithme en base 10. Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes. On a la propriété :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$$

Pour ceux qui n'ont pas trouvé, on donne la formule :

$$\boxed{m_2 - m_1 = 2{,}5 \log_{10} (F_1/F_2)}$$

On admet que cette formule obtenue intuitivement est valable. Son choix est cependant complètement arbitraire.

Avec cette relation, calculer le rapport des flux radiants de deux étoiles X et Y dont les magnitudes vérifient $m_Y - m_X = 1$.

De nos jours, la magnitude d'un astre se calcule avec précision, souvent au centième, et peut prendre n'importe quelle valeur. A l'œil nu, on ne peut distinguer que les objets de magnitude inférieure à 6. Mais souvent, à cause de la pollution lumineuse des ciels urbains, on ne voit guère au-delà de la magnitude 4. Avec une lunette de 75 mm de diamètre, on peut observer des objets jusqu'à magnitude 11. L'objet le moins lumineux perçu par le puissant télescope spatial Hubble est de magnitude 30.

Notons que l'on peut avoir des magnitudes négatives pour les objets les plus lumineux du ciel.

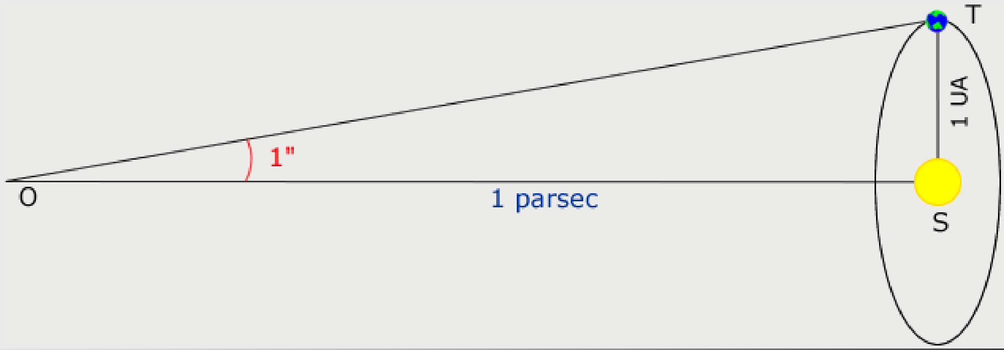
Exemples **:**	Le Soleil :	-26,8
	La pleine Lune :	-12,6
	La planète Vénus:	-4,4
	L'étoile Sirius :	-1,4

La magnitude dont on a parlé jusqu'à maintenant est la magnitude apparente c'est-à-dire la magnitude perçue par un observateur terrien. On est tenté de comparer les étoiles entre elles à partir de leur puissance lumineuse totale (luminosité). Pour ce faire, il est nécessaire de s'affranchir des écarts de brillance dus aux simples différences de distance des étoiles. On définit alors la magnitude absolue :

La magnitude absolue d'une étoile est la magnitude apparente qu'elle aurait si elle était située à 10 parsecs.

Un parsec (pc) est la distance à laquelle il faut se placer pour qu'une unité astronomique (UA) apparaisse sous un angle d'une seconde d'arc. Parsec est l'abréviation de parallaxe-seconde.

1UA = distance moyenne Terre - Soleil = 149,6 millions de km = $1{,}496 \cdot 10^{11}$m



En astronomie, les distances ne s'expriment pas en kilomètres mais en parsecs, en unités astronomiques ou en années-lumière, qui sont plus adaptés aux grandes distances telle que la distance d'une étoile ou d'une galaxie.

Combien d'unités astronomiques vaut un parsec ? Et combien de mètres ?

Le flux radiant est la puissance lumineuse reçue par unité de surface à une certaine distance radiale d de la source. Ici, la source est une étoile située à la distance d de la Terre. La source rayonne de façon isotrope dans l'espace avec une puissance intrinsèque totale L appelée luminosité. Le flux radiant est d'autant plus faible que l'étoile est lointaine.

On a : $F = \dfrac{L}{4\pi d^2}$

Retrouver la relation entre magnitude absolue et apparente :

$$\boxed{m_{abs} = m_{app} - 5\log\left(\frac{d}{10}\right)}$$

avec d la distance de l'étoile exprimée en parsec.

On veut mesurer la magnitude des étoiles des Pléiades à partir de l'image A (p.23). Cette image a été obtenue à l'aide d'une caméra numérique avec un temps d'acquisition assez long. La caméra est équipée d'un réseau de photo détecteurs. Chaque détecteur qui reçoit des photons envoie un signal électrique et donne un pixel coloré.

Un photon est une particule élémentaire de lumière de masse nulle.

Quand un détecteur reçoit trop de photons, il sature et les détecteurs voisins envoient aussi des signaux. Dans ce cas, plusieurs pixels voisins sur l'image sont colorés. Cela signifie que la taille d'une étoile sur l'image est révélatrice de sa luminosité. Plus la tâche est grosse plus l'étoile est lumineuse. L'image d'une étoile n'est pas ponctuelle à cause de la saturation de la caméra mais aussi de la diffraction de l'instrument optique utilisé.

Pour se convaincre que les différences de taille des étoiles sur l'image ne sont pas dues aux différences de tailles réelles de ces étoiles, faisons un petit calcul…

Comparé aux autres étoiles, le Soleil est une étoile tout à fait moyenne, de par sa taille, sa température, sa masse ou encore sa brillance. Son rayon vaut R = 7.10^8 m. Pour une étoile identique au Soleil et qui serait située à d = 428 années-lumière comme les Pléiades, nous voulons calculer le rayon angulaire α, c'est-à-dire l'angle sous lequel on la verrait.

- Exprimer α en fonction de d et R.

- Convertir d en mètres.

Une année-lumière correspond à la distance parcourue par la lumière en une année. On donne la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3.10^8\ ms^{-1}$.

- En faisant l'approximation des petits angles (et en la justifiant), calculer α.

- Exprimer α en secondes d'arc.

- La meilleure résolution que l'on peut avoir pour une telle image est d'une seconde d'arc.
  Que peut-on en déduire ?

Autre méthode :

- Sachant que l'étoile la plus proche de nous, Proxima du Centaure est située à 4,22 Al et en considérant qu'au sein d'un amas ouvert, les étoiles principales sont à peu près aussi éloignées que deux étoiles comme le Soleil et Proxima, choisir une échelle pour l'image A (p.23).

- En supposant par l'absurde que la taille d'une étoile sur une photographie ne dépend pas de sa luminosité, calculer la taille que devrait avoir l'image d'une étoile aussi grosse que le Soleil sur l'image A.

- Que peut-on en conclure ?

2) Activité pratique

A présent, nous allons mesurer la taille des étoiles de l'image A (p.23) afin d'en déduire leur magnitude apparente. Pour cela, nous utiliserons plutôt l'image B (p.24) obtenue par inversion de contraste à partir de l'image A. Sur l'image B, qui est le négatif de l'image A, les bords des étoiles sont plus nets. La mesure de leur rayon en sera plus aisée. Nous fournissons une jauge des magnitudes (p.25) qui donne la magnitude apparente en fonction de la taille de l'étoile.

- Préalablement, à partir de l'image annotée A, reconnaître et identifier les dix étoiles principales des Pléiades sur l'image B.

Recopiez soigneusement avec un feutre fin la jauge des magnitudes fournie en annexe sur un transparent. Vous pouvez aussi dessiner au stylo la jauge sur un papier calque à condition que celui-ci soit suffisamment fin pour bien voir à travers. Mais le mieux serait de la photocopier sur du papier transparent adapté.

Pour chaque étoile, il faut trouver le cercle qui est le plus proche possible des contours de l'étoile. A chaque cercle, correspond une certaine magnitude.

Vous allez commencer par les étoiles les plus brillantes, donc celles qui apparaissent les plus grosses sur notre image. Vous remplirez la colonne magnitude apparente du tableau 1 (feuille de résultats, p.27) qui regroupe les 10 étoiles principales des Pléiades : Alcyone, Célaeno, Electra, Maia, Mérope, Taygeta, Astérope I et II, Atlas et Pléione.

<u>Pour la petite histoire</u> :
Dans la mythologie grecque, les Pléiades sont les sept filles de Pléione et Atlas. Zeus les plaça parmi les constellations à leur mort.
A noter que l'on peut aussi bien dire Astérope que Stérope. Stérope désigne deux étoiles, que l'on nomme Stérope I et II pour les distinguer, Stérope I étant la plus brillante des deux.

Pour vérifier que votre démarche est bonne, on donne m_{app} = 3,6 pour Atlas. Si vous obtenez une différence de plus de 0,5 entre magnitudes théorique et expérimentale, c'est que vous n'avez pas été assez méticuleux.

Pour les étoiles de l'amas dites secondaires, qui sont beaucoup plus nombreuses, il faut redoubler de rigueur. On va compter les étoiles de chaque magnitude : 5,5 ; 6 ; 6,5 ; 7 et 7,5. Les plus brillantes d'entre elles sont à peu près de même magnitude qu'Astérope.

Les étoiles de magnitude 8 et plus sont considérées comme de trop faible luminosité pour être prises en compte ou comme n'appartenant pas à l'amas (c'est-à-dire que ce sont des étoiles situées dans le même champ d'observation que les Pléiades, donc qui apparaissent sur l'image A bien qu'elles soient en réalité bien plus lointaines).

Il est conseillé de procéder en partageant la photo en plusieurs zones et en faisant le décompte dans chaque zone pour chacune des magnitudes. Pour ne pas compter deux fois la même étoile, ni en oublier, mieux vaut entourer au fur et à mesure chaque étoile prise en compte.

A la fin de ce travail, reportez les nombres d'étoiles de chaque magnitude dans le tableau 2 (feuille de résultats, p.27), sans recompter les étoiles du tableau 1.

<u>Remarque</u> : Il est préférable que plusieurs personnes fassent les mesures pour les tableaux 1 et 2 indépendamment. Vous prendrez alors la moyenne de ces mesures comme valeur pour la suite. Si le nombre de personnes est suffisant, vous pouvez faire la moyenne en supprimant la valeur la plus haute et la valeur la plus basse pour chaque case.

Au final, combien d'étoiles des Pléiades avez-vous comptées ?

On préfère connaître les magnitudes absolues des étoiles pour la suite.

- Convertir la distance des Pléiades en parsec.
  On considèrera que toutes les étoiles de l'amas se trouvent à cette distance.

- Calculer m_{abs} pour Atlas.

- Comparer à la valeur donnée dans les encyclopédies astronomiques : m_{abs} = -1,7.

- Pour quelles raisons la valeur calculée à partir de la formule peut-elle être différente de la valeur tabulée ?

Ne donnez pas de réponse nébuleuse !

L'inconvénient de cette formule est qu'elle ne prend pas en compte l'atténuation de la lumière qui traverse des nuages de gaz ou de poussières interstellaires.

On considère que cette atténuation est la même pour toutes les étoiles des Pléiades.

- A partir des m_{abs} et m_{app} tabulées d'Atlas, trouver x tel que :
  $\boxed{m_{abs} = m_{app} - x}$

- Remplir alors la colonne des magnitudes absolues du tableau 1 (feuille de résultats, p.27).

II) Le diagramme H-R et les types spectraux d'étoiles

Une étoile peut être caractérisée par son rayon, sa masse et sa température. Il existe plusieurs types d'étoiles. Les étoiles des Pléiades sont relativement jeunes et chaudes. On remarque qu'elles ont une couleur bleue. Les étoiles les plus chaudes sont bleues tandis que les plus froides sont plutôt rouges. Les étoiles jaunes ont des températures intermédiaires.

Quand vous regardez un ciel clair et étoilé, vous pouvez distinguer ces différences de couleur et vous faire une idée sur la température des étoiles observées. Par exemple, Antarès dans la constellation du Scorpion est rouge, tandis que Véga dans la constellation de la Lyre est bleue.

Vous savez sans doute que la lumière blanche est en fait composée de différentes couleurs qui correspondent à différentes longueurs d'ondes électromagnétiques. Ce sont les couleurs de l'arc-en-ciel. On peut décomposer la lumière blanche très facilement en la faisant passer dans un prisme, ce qui donne son spectre.

Les astrophysiciens étudient les spectres de la lumière émise par les étoiles. Ces spectres révèlent des raies d'absorption caractéristiques des éléments dont sont constituées les étoiles. On peut en déduire leur âge et leur température. On classe les étoiles par types spectraux ; ces derniers sont désignés par les lettres O, B, A, F, G, K et M, qui correspondent à différentes gammes de température rangées dans l'ordre décroissant. Pour plus de précision, chacun de ces types spectraux a été subdivisé, on ajoute alors un chiffre qui peut varier de 0 à 9.

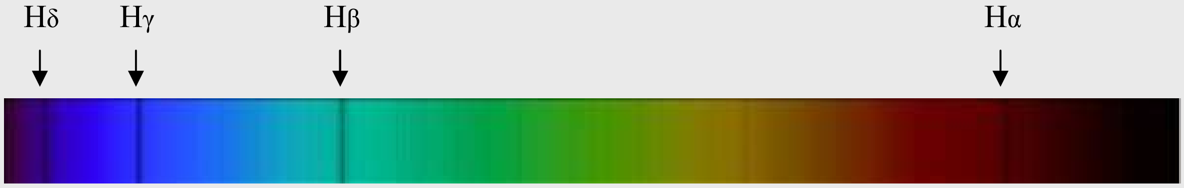


fig.3 : Spectre d'absorption pour une étoile de type B6.
On observe des raies marquées correspondant à l'hydrogène.

fig.4 : Spectre d'une étoile de type G, comme notre Soleil.
Les raies d'hydrogène sont peu marquées. En revanche, on observe de nouvelles raies, correspondant à des éléments lourds.

A la notion de type spectral, s'ajoute celle de classe spectrale qui permet de distinguer les étoiles ordinaires de la séquence principale, comme le Soleil, des étoiles géantes ou naines. Il existe six classes différentes que l'on écrit en chiffres romains. Les étoiles de classe I sont des super géantes tandis que celles de type VI sont naines. Les étoiles de la séquence principale sont les étoiles en train de transformer leur hydrogène en hélium, elles sont de classe V.

Le diagramme HR (du nom des scientifiques Hertzsprung et Russel) donne la luminosité ou magnitude absolue en fonction de la température de surface des étoiles selon leur classe spectrale. On indique souvent sur ce diagramme les types spectraux en correspondance aux températures.

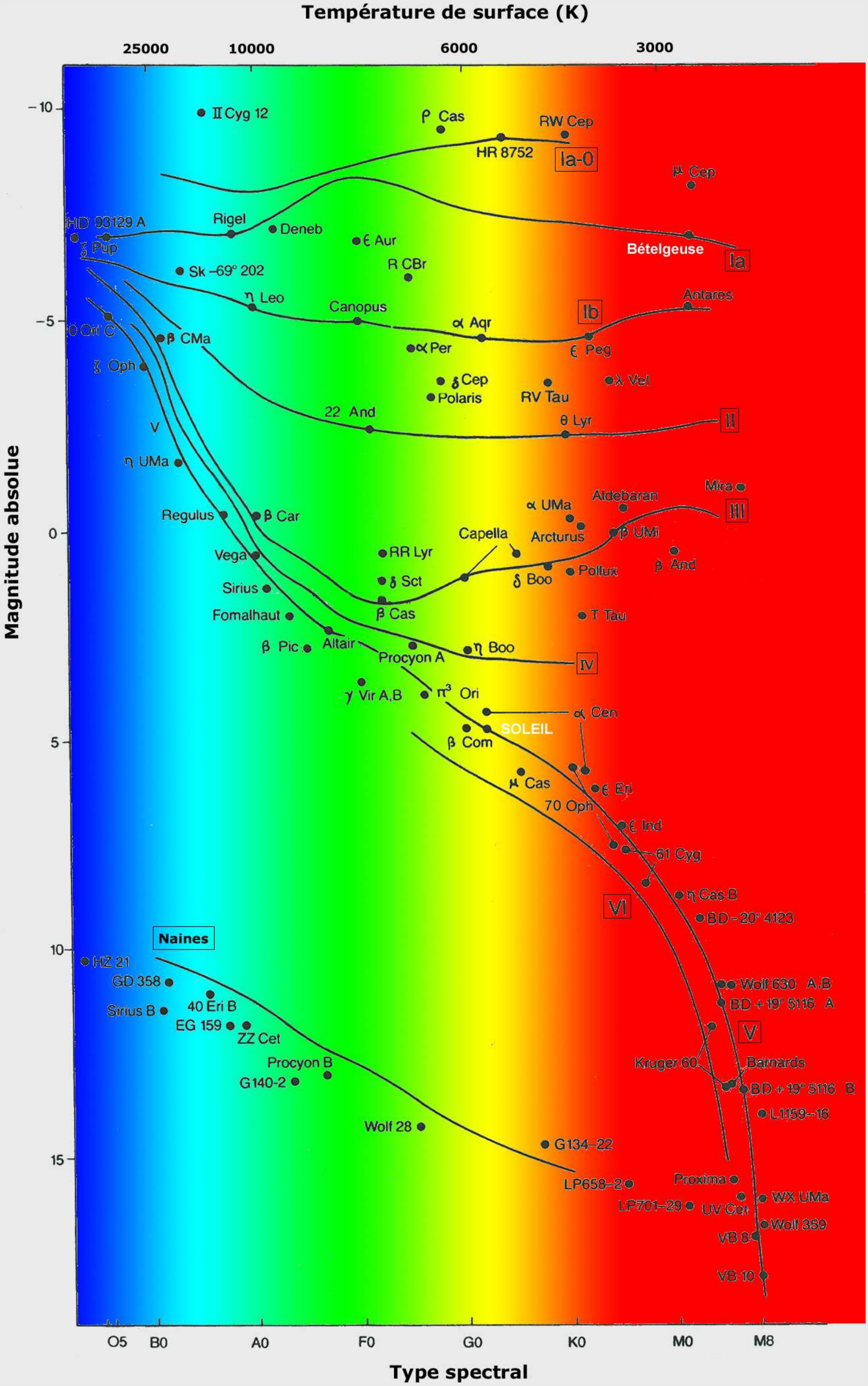


fig.5 : Diagramme de Hertzsprung-Russel.

On constate que les valeurs de température et luminosité d'une étoile ne sont pas aléatoires. Pour une certaine température et une certaine classe spectrale, on connaît une valeur moyenne de la luminosité de l'étoile.

Lors de l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz et de poussières, il se forme des noyaux chauds ou protoétoiles. Par contraction, la température d'une protoétoile augmente jusqu'à allumer des réactions de fusions thermonucléaires.

Lorsque l'on comprime un gaz, sa température augmente.
Exemple : l'air est chaud dans une pompe à vélo.

Une étoile est en quelque sorte une immense boule de gaz (en majorité de l'hydrogène et de l'hélium) chauds. Elle passe la majeure partie de sa vie sur la séquence principale. Elle se maintient à sa température d'équilibre. En son cœur, elle brûle constamment de l'hydrogène, ce qui libère de l'énergie, principalement sous forme de lumière et de chaleur.

A la fin de leur vie, les étoiles quittent la séquence principale. La fusion de l'hydrogène s'arrête et l'équilibre entre pression de radiation et force gravitationnelle n'est plus assuré. Les étoiles deviennent des géantes rouges puis des naines blanches. Si elles sont assez massives, elles peuvent même exploser en supernovæ puis former des étoiles à neutrons très petites mais très denses ou des trous noirs.

Par exemple, dans environ 5 milliards d'années, notre Soleil enflera en une géante rouge avant de se transformer en une naine blanche.

Que peut-on conjecturer sur la nature de Bételgeuse ? (on se reportera au diagramme HR p.12)

Les étoiles principales des Pléiades sont de type spectral B6 à B8 et appartiennent aux classes spectrales III, IV et V. Certaines d'entres elles sont donc des géantes ou sous-géantes.

On considère que les étoiles secondaires de l'amas appartiennent à la séquence principale et sont de type A. En fait, il y en a de type A0, A2, A5 ou encore quelques unes de type F0.

On donne dans le tableau suivant les classes spectrales des étoiles principales de l'amas des Pléiades:

Étoile	Atlas	Alcyone	Célæno	Electra	Maia	Mérope	Pléione	Stérope 1 et 2	Taygeta
Classe spectrale	III	III	IV	III	III	IV	IV	V	V

- En plaçant de façon approximative les étoiles principales des Pléiades sur le diagramme HR, retrouver leur température.

III) Détermination approximative de la masse des étoiles

On a vu avec le diagramme HR qu'il existe une relation entre la luminosité ou la magnitude et la température d'une étoile. On peut aussi s'intéresser à la relation entre la luminosité et la masse de l'étoile.

On prendra comme référence le Soleil, dont les caractéristiques sont moyennes et nous sont le mieux connues. Les rapports de luminosités ou de masses entre les étoiles étudiées et le Soleil sont beaucoup plus parlants qu'une valeur brute de la luminosité en Watts ou de la masse de l'ordre de 10^{31} kg.

Pour les étoiles qui ne sont pas en début ou fin de vie, on donne la relation $\boxed{\frac{L}{L_0} = \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\alpha}}$ avec M_0 et L_0 la masse et la luminosité du Soleil

$\alpha = 3{,}2$.

- Calculer la magnitude absolue du Soleil.
  (Se reporter à la partie I)

- Trouver la formule qui permet d'exprimer la luminosité L réelle d'une étoile en fonction de sa magnitude absolue m, de la luminosité du Soleil L_0 et de la magnitude absolue du Soleil m_S.
  (Se reporter à la partie I)

- A partir des magnitudes absolues des étoiles principales calculées dans la première partie, établir leurs rapports M/M_0. Remplir la colonne adéquate du tableau 1.

- Pour les étoiles dites secondaires, en considérant qu'elles sont toutes dans la séquence principale, calculer le rapport M/M_0 qui correspond aux magnitudes apparentes 5,5 ; 6 ; 6,5 ; 7 et 7,5. Remplir le tableau 3.

- Calculer la masse totale de l'amas en fonction de la masse du Soleil. La reporter dans la feuille des résultats p.27.

- Estimer l'erreur faite sur la masse d'une étoile si on mesure une magnitude plus petite de 0,5 par rapport à la magnitude réelle.

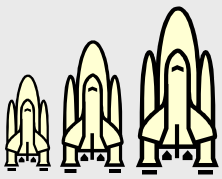
La masse totale calculée est bien évidemment tout à fait approximative du fait des erreurs sur les magnitudes mais aussi du fait que l'on n'a sans doute pas compté toutes les étoiles de l'amas ; en particulier les étoiles peu lumineuses. Cela étant dit, les étoiles les moins lumineuses de l'amas sont aussi les moins massives.

On estime souvent que l'amas des Pléiades contient en tout entre 500 et 1 000 étoiles dont la majorité serait des naines brunes. Les naines brunes ne sont pas de véritables étoiles car elles ne sont pas le siège de réactions nucléaires. Leur masse est négligeable devant celle du Soleil (de un millième à sept centièmes de masse solaire). L'amas contient aussi quelques naines blanches (une centaine tout au plus). Ces étoiles ont une masse comprise entre 0,3 et 1,4 fois celle du Soleil.

- Vérifier que la contribution de 500 naines brunes à la masse totale de l'amas est quasiment négligeable.

On retiendra surtout que ce calcul donne une idée de l'ordre de grandeur de la masse totale de l'amas.

IV) Théorème du viriel



1) Le théorème du viriel niveau terminale :

Galilée énonça le principe d'inertie selon lequel un corps qui ne subit aucune force a un mouvement rectiligne uniforme (il peut éventuellement être immobile).

Plus tard, Newton comprit que la variation de vitesse d'un corps est entièrement causée par les forces qu'il subit. C'est ce qui est explicité dans le **principe fondamental de la dynamique** :

$\boxed{m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i}$ où m est la masse du corps, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ son accélération et les $\vec{F}_i$ sont les forces qui lui sont appliquées.

Dans le cas où le corps n'est soumis à aucune force, l'accélération est nulle et on retrouve le principe d'inertie.

$\boxed{K = \frac{1}{2} m \vec{v}^2}$ est appelée **énergie cinétique** du corps de masse m et de vitesse $\vec{v}$

On dit que la force $\vec{F_i}(r)$ dérive d'un potentiel s'il existe U tel que $\boxed{\vec{F_i}(r) = -\frac{dU}{d\vec{r}}}$

Vérifier que U a la même dimension que l'énergie cinétique.

U est appelée **énergie potentielle** du corps.

Trouver l'énergie potentielle U(r) dont dérive la force d'interaction gravitationnelle exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 :

$$\overrightarrow{F_{12}} = -G \frac{m_1 m_2}{\left|\overrightarrow{r_{12}}\right|^3} \overrightarrow{r_{12}}$$

L'énergie potentielle ne dépend que de la position du corps et traduit la quantité d'énergie qui lui est transmise par la force.
L'énergie cinétique, pour sa part, est l'énergie acquise par le solide du fait de son mouvement.
Ces deux énergies sont complémentaires. Pour certains systèmes particuliers, dits isolés, l'énergie mécanique U+K se conserve.

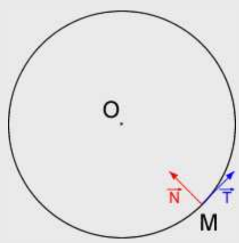
On souhaite à présent démontrer la relation 2K=-U pour le système Terre-Soleil.

Écrire le principe fondamental de la dynamique pour la Terre.

Vous pouvez éventuellement vérifier qu'il est licite de considérer que la Terre n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil en comparant les forces exercées par la Lune et Jupiter à celle exercée par le Soleil.

On donne : $M_{Terre} = 6.10^{24}$ kg
$M_{Soleil} = 2.10^{30}$ kg
$M_{Jupiter} = 1{,}9.10^{27}$ kg
$M_{Lune} = 7{,}3.10^{22}$ kg
Distance moyenne Terre-Soleil = $1{,}496\ 10^{11}$ m
Distance moyenne Terre-Lune = $3{,}82\ 10^{8}$ m
Distance moyenne Terre-Jupiter = $7{,}78\ 10^{11}$ m
La constante de la gravitation G = $6{,}67.10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

On suppose que la Terre a une orbite parfaitement circulaire autour du Soleil.



Projetez l'équation obtenue dans la base de Frenet.

Conclure que 2K=-U

Cette relation **$\boxed{2K=-U}$** , valable pour un problème à deux corps, est appelé **théorème du viriel**.

Il est possible de la généraliser à d'autres systèmes en équilibre (pour la démonstration se reporter aux annexes p.28).

On va considérer que l'amas des Pléiades est en équilibre et lui appliquer le théorème du viriel.

- Écrire l'énergie cinétique totale de l'amas sous forme d'une somme. Simplifier en considérant que les étoiles sont toutes animées d'une vitesse $\sqrt{< v^2 >}$ qui correspond en fait à une moyenne des vitesses de toutes les étoiles.

L'énergie potentielle globale de l'amas est : $\boxed{-\frac{1}{2}\sum_i \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{r_{ij}}}$

(avec r_{ij} la distance entre les masses m_i et m_j)

- La simplifier en considérant que toutes les étoiles sont de même masse m, que $N^2 \approx N(N-1)$ et qu'il existe une taille caractéristique pour l'amas notée <r>.

- En utilisant l'image C (p.26) dotée d'une échelle, déterminer de façon approximative cette taille <r>.

- Écrire alors le théorème du viriel pour l'amas des Pléiades.

- Calculer $\sqrt{< v^2 >}$

2)Le théorème du viriel niveau facile :

On donne le **théorème du viriel** : **2K = -U** où K est l'énergie cinétique du système c'est-à-dire l'énergie qu'il a acquise du fait de son mouvement et U est son énergie potentielle, qu'il acquiert du fait des forces qui s'exercent sur lui. C'est une relation entre les deux énergies mécaniques. Elle est valable à l'équilibre pour un système soumis à des forces d'attraction gravitationnelle.

Les Pléiades constituent un tel système.

Son **énergie cinétique** est $K = \frac{1}{2} M v^2$ avec M la masse totale de l'amas et v la vitesse moyenne des étoiles qui le composent.

Et son **énergie potentielle** est $U = -\frac{1}{2}\frac{GM^2}{R}$ avec M la masse totale de l'amas et R sa taille caractéristique.

- Vérifier par une analyse dimensionnelle que le U donné a la dimension d'une énergie.

- Trouver R à l'aide de la photo C (p.26) dotée d'une échelle.

- Convertir R en mètres.

- Calculer v.

3)Conclusion :

On a ainsi réussi à estimer à partir d'une photographie et de quelques données théoriques la vitesse moyenne des étoiles dans les Pléiades. Elle est de l'ordre du kilomètre ou du demi kilomètre par seconde. Elle correspond en quelque sorte à une vitesse d'agitation des étoiles au sein de l'amas, due à la gravité.

Certaines étoiles ont aussi un mouvement de rotation sur elles-mêmes. L'amas est lui-même animé d'un mouvement d'ensemble par rapport au référentiel héliocentrique (c'est-à-dire lié au Soleil), sa vitesse est de l'ordre d'une dizaine de kilomètres par seconde.

- Essayer d'expliquer pourquoi les Pléiades est un amas ouvert c'est-à-dire pourquoi les étoiles se dispersent.

Chaque étoile de l'amas ne subit pas une attraction gravitationnelle globale suffisante pour rester éternellement liée aux autres étoiles. C'est pourquoi il est quelque peu abusif de le considérer en équilibre.

Au contraire, les amas globulaires regroupent un nombre d'étoiles beaucoup plus élevé et l'attraction gravitationnelle y est suffisante. Ces amas sont nettement plus vieux que les amas ouverts.

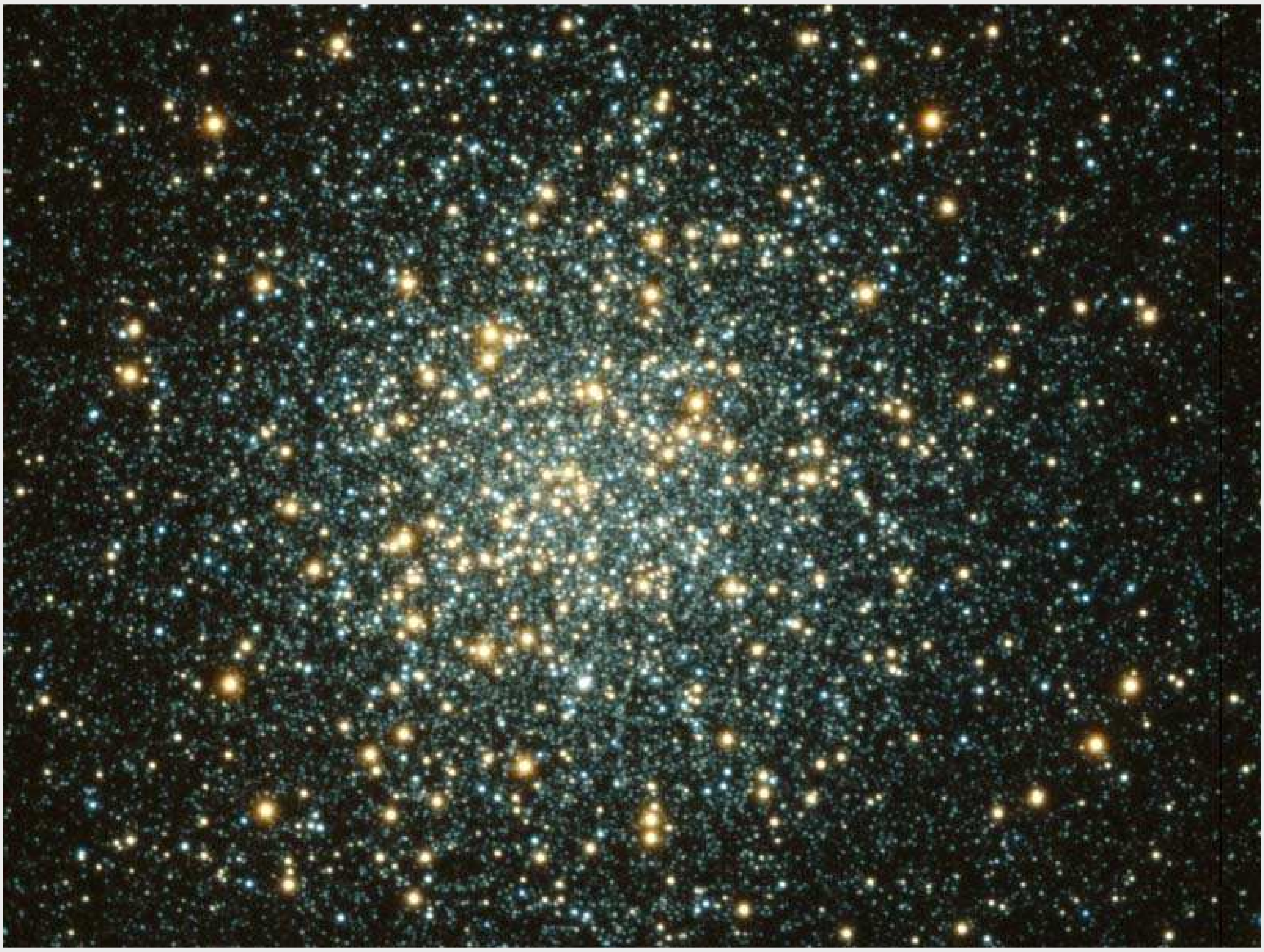


fig.6 : Amas globulaire M3
APOD NASA   Crédit : S. Kafka & K. Honeycutt

V) La fusion thermonucléaire dans les étoiles

1) L'atome

Les atomes sont en quelque sorte les briques qui servent à construire toute la matière qui nous environne.

L'atome est constitué d'un noyau dans lequel se trouvent les protons de charge électrique élémentaire positive et les neutrons (qui sont neutres comme leur nom l'indique).

Autour du noyau, gravitent des électrons, particules de charge élémentaire négative.

Dans un atome, il y a toujours autant de protons que d'électrons, ce qui assure la neutralité globale.

La taille d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m et celle de son noyau d'environ 10^{-15} m.

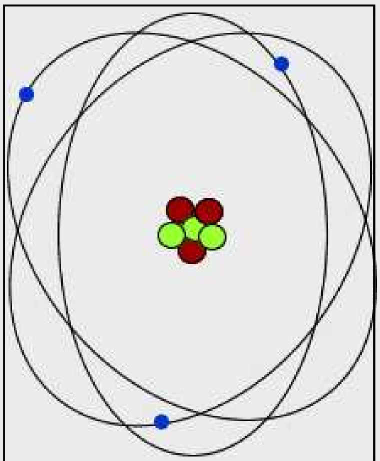


fig.7 : Représentation simplifiée d'un atome

Deux forces agissent dans un atome : l'interaction nucléaire forte et l'interaction électromagnétique.

L'interaction électrique entre particules chargées est une force qui peut agir à longue distance. Les particules qui ont des charges de même signes se repoussent tandis que celles de signes opposés s'attirent. Ainsi les électrons sont attirés par les protons et retenus autour du noyau.

L'interaction nucléaire forte est particulièrement intense mais n'agit qu'à très courte distance. Elle permet aux protons de rester liés dans le noyau bien qu'ils se repoussent de par leurs charges.

L'atome le plus simple est celui d'hydrogène. Il ne contient qu'un proton et un électron. Le deutérium contient aussi un proton et un électron mais possède en plus un neutron.

On dit que le deutérium est un isotope de l'hydrogène car il contient autant de protons mais un nombre différent de neutrons.

L'hélium est le deuxième atome dans la classification périodique, il a deux protons, deux électrons et deux neutrons.

Il existe ainsi 92 éléments à l'état naturel qui correspondent aux différents nombres de protons et que l'on range dans le tableau appelé classification périodique.

2) La fusion nucléaire

Une réaction de fusion nucléaire donne naissance à partir de noyaux d'atomes légers à un noyau plus lourd et libère de l'énergie.

Il est difficile d'approcher deux noyaux l'un de l'autre à cause de la force de répulsion électrique. Pour qu'il y ait fusion, les noyaux doivent être en état de forte agitation. La température doit donc être très élevée. Au centre des étoiles, la température est suffisante pour que des noyaux d'atomes fusionnent.

Par exemple, au cœur du Soleil règne la température infernale de 15 millions de degrés. En permanence, des réactions de fusion thermonucléaire ont lieu, principalement la fusion d'hydrogène en hélium.

Quatre noyaux d'hydrogène donne un noyau d'hélium. On constate que la masse du noyau d'hélium est inférieure à quatre masses de noyaux d'hydrogène (c'est-à-dire à quatre fois la masse du proton). Cette masse manquante Δm est transformée en énergie E.

Selon la relation d'équivalence masse/énergie d'Einstein, on a $\boxed{E=\Delta m\, c^2}$

Dans le cas de la fusion de quatre noyaux d'hydrogène H en un noyau d'hélium He, $\Delta m = 0{,}007 \cdot 4\, m_H$.

Cette énergie libérée lors des réactions de fusion est rayonnée sous forme de lumière et de chaleur. L'étoile consomme donc lentement son hydrogène. Quand une étoile comme le Soleil a brûlé tout son carburant, elle devient une naine blanche.

On peut estimer la durée de vie totale d'une étoile par le rapport $\frac{E}{L}$

E est l'énergie totale disponible

L est l'énergie rayonnée par unité de temps ou luminosité

- Si l'on considère grossièrement que l'étoile est entièrement constituée d'hydrogène et que 10% de sa masse totale est à température suffisante pour fusionner, que vaut E ?

Pour le Soleil, on donne : sa luminosité $L_0 = 4\ 10^{26}$ W,
sa masse $M_0 = 2\ 10^{30}$ kg et son âge : 4,6 milliards d'années

- Exprimer et calculer son espérance de vie t_0.
  Combien de temps lui reste-t-il à vivre ?

- Calculer en fonction de t_0 l'espérance de vie t des étoiles principales des Pléiades. (On se reportera à la partie III)

On estime que l'amas des Pléiades a environ 100 millions d'années. Toutes les étoiles de l'amas ont à peu près le même âge car elles sont issues du même nuage interstellaire ; mais certaines étoiles ont évolué plus vite que d'autres.

- Combien de temps reste à vivre aux étoiles des Pléiades ? Quelles sont les étoiles de l'amas qui vivront le plus longtemps ?

Avec votre propre photographie :

Si vous possédez un bon télescope, vous pouvez aussi faire cet exercice en vous servant de votre propre image des Pléiades obtenue par acquisition vidéo.

Les Pléiades :
Ascension droite : 03h 47min
Déclinaison : + 24° 07'
Meilleure saison d'observation : hiver
Taille apparente : 110' ->grand champ nécessaire
Long temps d'acquisition conseillé, à adapter en fonction de votre instrumentation.

fig.8 : Image des Pléiades obtenue avec un télescope amateur et une caméra numérique

Il faut alors que vous construisiez votre propre jauge de magnitude. Pour cela, il faut connaître la magnitude d'au moins trois étoiles principales et s'en servir comme référence.

On a vu que la magnitude est en log(L), on considère qu'elle est en coeff x log(Rayon mesuré).

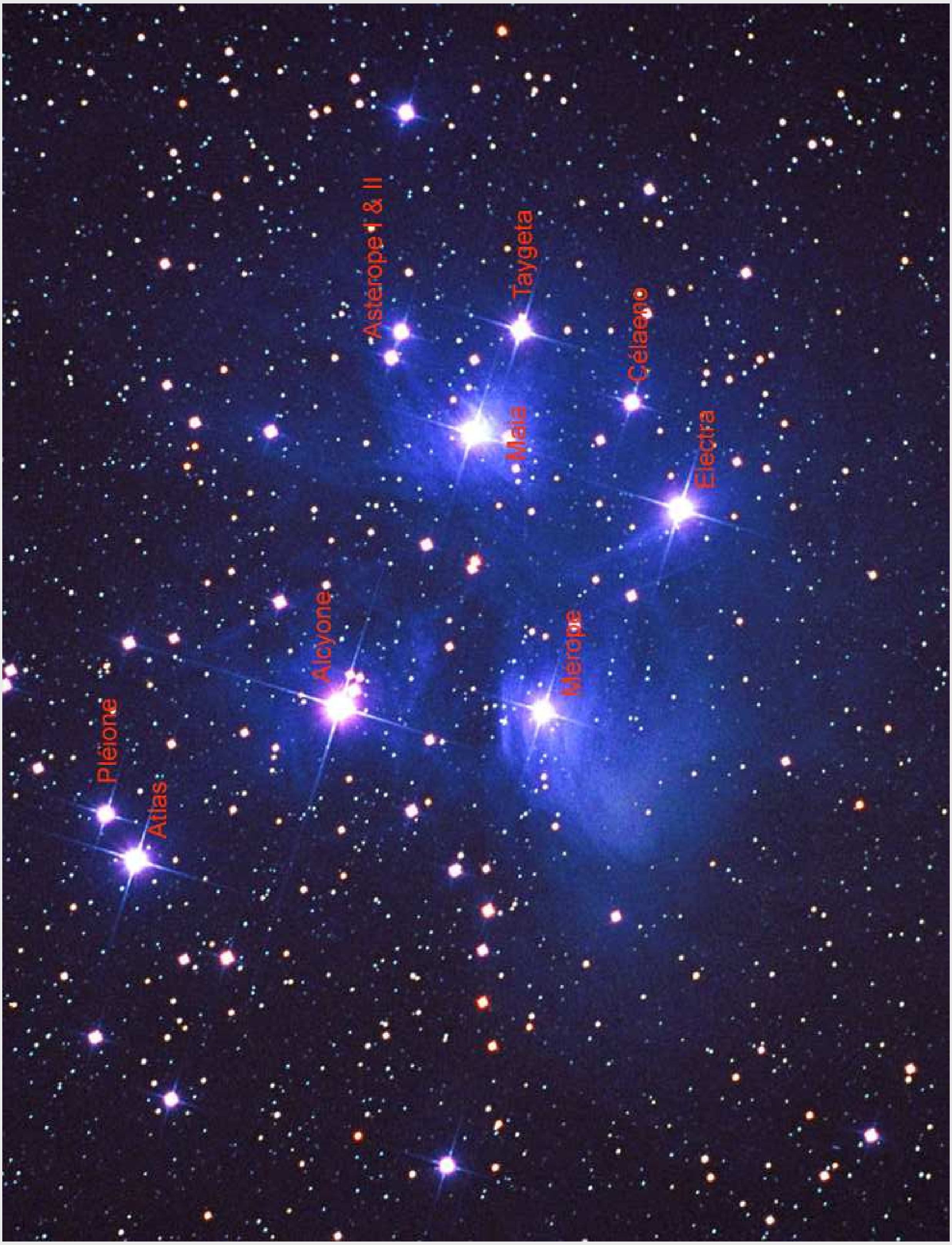


Image A : Amas des Pléiades

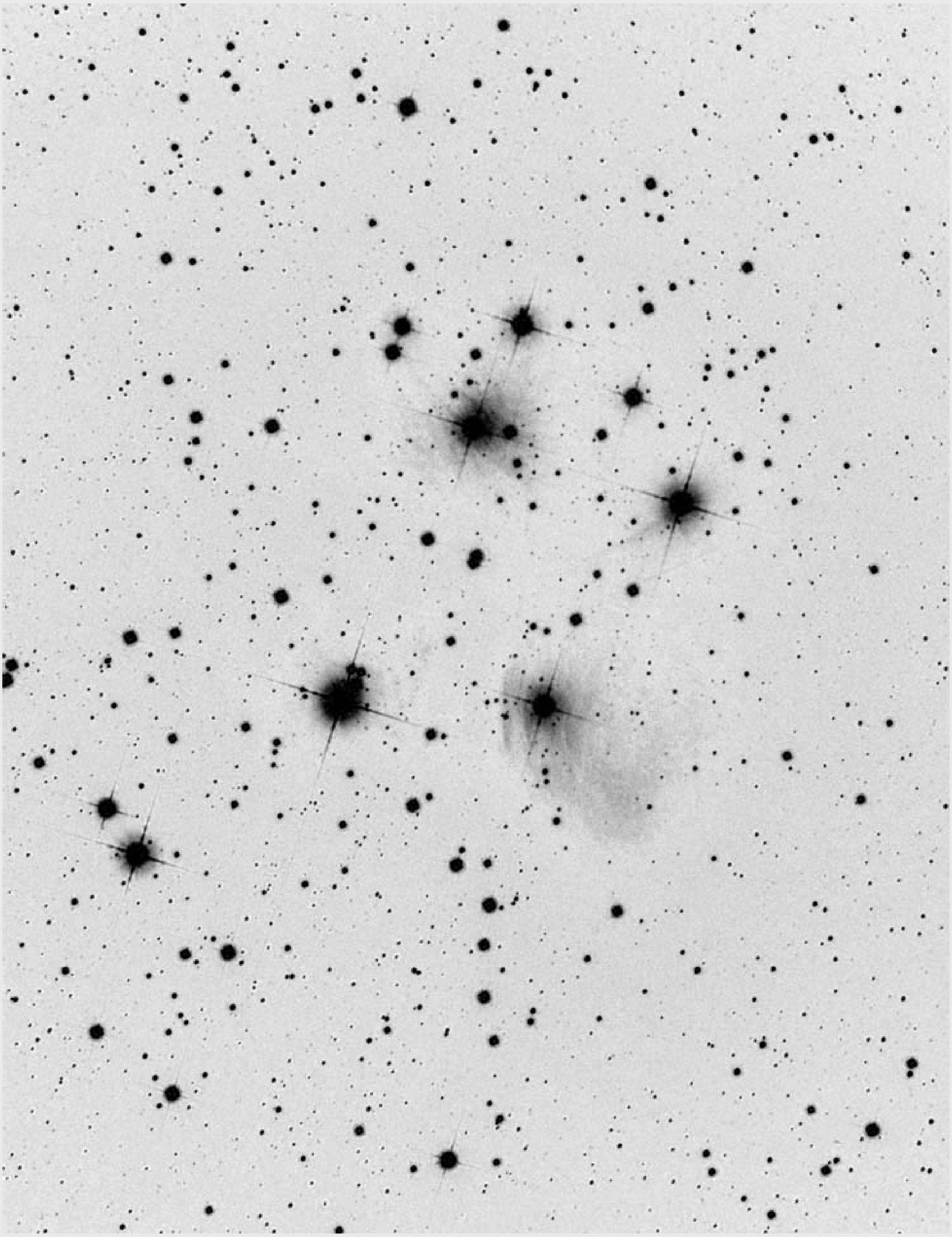


Image B : Amas des Pléiades
Négatif

Jauge des magnitudes
à utiliser avec l'image B

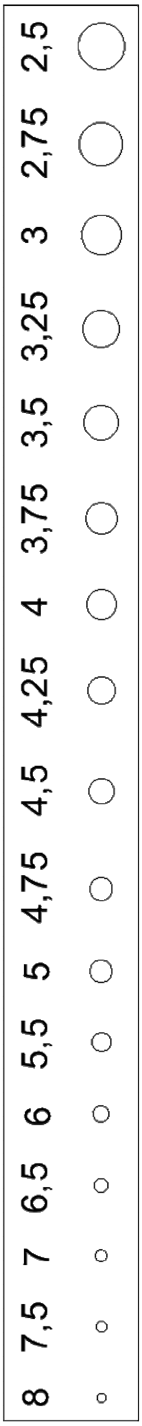


Image C : Amas des Pléiades
Avec échelle des distances

Feuille de résultats

Tableau 1 : étoiles principales des Pléiades

Nom de l'étoile	Magnitude apparente	Magnitude absolue	M/M_0
Atlas	3,6	-1,7	
Alcyone			
Célaeno			
Electra			
Maia			
Mérope			
Pléione			
Stérope I			
Stérope II			
Taygeta			

Tableau 2 : nombre d'étoiles secondaires

Nombre d'étoiles de magnitude 5,5	Nombre d'étoiles de magnitude 6	Nombre d'étoiles de magnitude 6,5	Nombre d'étoiles de magnitude 7	Nombre d'étoiles de magnitude 7,5

Tableau 3 : masses des étoiles secondaires

m_{app}	m_{abs}	M/M_0
5,5		
6		
6,5		
7		
7,5		

Masse totale de l'amas : ____________________ M_0

Démonstration du théorème du viriel

Un peu de mathématiques pour commencer...

Une fonction f est dite homogène de degré α (α réel) si, pour tout réel λ, on a : $f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x)$.

- Soit f homogène de degré α.
  Montrer que : $\frac{d\,f(\lambda x)}{d\lambda} = x\frac{d\,f(\lambda x)}{dx}$
  On pourra, si nécessaire, passer par la fonction g(x) = λx et utiliser les propriétés de dérivation des fonctions composées.
- En déduire que : $x\frac{d\,f(\lambda x)}{dx} = \alpha\,\lambda^{\alpha-1} f(x)$
- Donner le résultat pour $\lambda=1$.

Et de la mécanique pour continuer…

On redonne la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$

La masse étant une constante, on peut écrire : $m\vec{v} = \frac{d}{d\vec{v}}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2) = \frac{dK}{d\vec{v}}$

Avec K l'énergie cinétique

- Montrer que K(v) est une fonction homogène et préciser son degré.

On étudie un système soumis à une unique force dérivant d'un potentiel U(r) homogène de degré α quelconque.

- Vérifier que dans ce cas, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\frac{d\,\vec{v}(r)}{dt} = -\frac{d\,U(r)}{d\,\vec{r}}$

  Puis : $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,K}{d\,\vec{v}}\right) = -\frac{d\,U(r)}{d\,\vec{r}}$

- En multipliant cette équation par le vecteur position et en exploitant la propriété de la dérivation (f.g)'=f'.g + f.g', montrer que :

$$\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{r}\,.\vec{v}\right) - \vec{v}.\frac{dK}{d\vec{v}} = -\,\vec{r}\,.\frac{dU}{d\vec{r}}$$

- Réécrire l'équation en utilisant la propriété des fonctions homogènes U(r) et K(v).

  Montrer que le terme $\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{r}\,.\vec{v}\right)$ est égal à $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}m\,\vec{r}^{\,2}\right)$

  $\frac{d^2}{dt^2}(\frac{1}{2}m\vec{r}^{\,2})$ est la dérivée seconde du moment d'inertie et qui est nulle pour tout système en équilibre.

  On en déduit le **théorème du viriel** : $\boxed{\mathbf{2\ K = \alpha\ U}}$

- Vérifier que le potentiel gravitationnel U(r) est une fonction homogène et donner son degré.
  Puis expliciter le théorème du viriel pour un système soumis à un potentiel gravitationnel.

Feuilles de correction

Partie I

Pouvez-vous deviner quel type de relation lie les magnitudes et les flux radiants ? Pouvez-vous proposer une relation ?

$$m_2 - m_1 = 5 \Leftrightarrow \frac{F_1}{F_2} = 100$$

On a $\log(\frac{F_1}{F_2}) = 2$ et on vérifie aisément que la formule

$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log_{10} (F_1/F_2)$ convient

Avec cette relation, calculer le rapport des flux radiants de deux étoiles X et Y dont les magnitudes vérifient $m_Y - m_X = 1$.

$$\frac{F_X}{F_Y} = 10^{\frac{m_Y - m_X}{2{,}5}} = 10^{\frac{1}{2{,}5}} \approx 2{,}51$$

Combien d'unités astronomiques vaut un parsec ? Et combien de mètres ?

On rappelle que : $1° = 60' = 3600''$

D'après la figure p.6, $\tan\frac{1}{3600} \equiv \frac{1UA}{1\,pc} \Rightarrow 1\,pc = \frac{1}{\tan\frac{1}{3600}} = 206\,265\,UA$

$$1\,pc = 206\,265 \times 1{,}496.10^{11} = 3{,}09.10^{16}\,m$$

Retrouver la relation entre magnitude absolue et apparente.

$$m_{abs} - m_{app} = -2{,}5 \log \frac{L/4\pi 10^2}{L/4\pi d^2} = -2{,}5 \log \frac{d^2}{10^2} = -5 \log \frac{d}{10}$$

où d doit être en parsec

Rappel : la luminosité d'une étoile est une valeur intrinsèque.

Exprimer α en fonction de d et R.

$$\tan\alpha = \frac{R}{d}$$

Convertir d en mètres.

$$1al = 365,25 \times 24 \times 3600 \times 3.10^{8} = 9,46.10^{15}\ m$$

$$d = 428 \times 9,46.10^{15} = 4,05.10^{18}\ m$$

En faisant l'approximation des petits angles (et en la justifiant), calculer α. Exprimer α en secondes d'arc.

L'angle α est très petit car la distance d est gigantesque.
Pour α en radians :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{R}{d} = \frac{4.10^{8}}{4,05.10^{18}} = 1,7.10^{-10}\ rad = 9,9.10^{-9}\ \deg = 3,6.10^{-5}\ \sec$$

La meilleure résolution que l'on peut avoir pour une telle image est d'une seconde d'arc. Que peut-on en déduire ?

L'angle obtenu α est très inférieur à la seconde d'arc, donc à la limite de résolution. Si une étoile apparaît avec une certaine taille sur l'image A c'est à cause de sa luminosité.

Sachant que l'étoile la plus proche de nous, Proxima du Centaure est située à 4,22 al et en considérant qu'au sein d'un amas ouvert, les étoiles principales sont à peu près aussi éloignées que deux étoiles comme le Soleil et Proxima, choisir une échelle pour l'image A (p.23).

Alcyone et Maia sont par exemple éloignées de 5 cm sur l'image A.
On peut prendre grossièrement comme échelle:

$5\ cm \leftrightarrow 4,22\ al$ et donc $1\ cm \leftrightarrow 0,844\ al$

Note : Pour l'échelle réelle, consulter l'image C p.26.

En supposant par l'absurde que la taille d'une étoile sur une photographie ne dépend pas de sa luminosité, calculer la taille que devrait avoir l'image d'une étoile aussi grosse que le Soleil sur l'image A.

Avec l'échelle $1\ cm \leftrightarrow 0,844\ al$ on calcule qu'une étoile de rayon 7.10^{8} m mesurerait 8.10^{-10} m de rayon sur l'image A.

Que peut-on en conclure ?

On en déduit que la taille des étoiles sur l'image A n'est pas révélatrice de leur taille réelle.
Elle est plus vraisemblablement liée à leur luminosité comme on l'a expliqué.

Convertir la distance des Pléiades en parsec.

d = 428 al = $4{,}05.10^{18}$ m = 131 pc

Calculer m_{abs} pour Atlas.

$$m_{abs} - m_{app} = -5\log\frac{d}{10} \Rightarrow m_{abs} = 3{,}6 - 5\log\frac{131}{10} = -1{,}99$$

A partir des m_{abs} et m_{app} tabulées d'Atlas, trouver x tel que $m_{abs} = m_{app} - x$

x=5,3

<u>A titre indicatif :</u>

Nom de l'étoile	Magnitude apparente	Magnitude absolue
Atlas	3,6	-1,7
Alcyone	2,75	-2,55
Célaeno	5,5	0,2
Electra	3,75	-1,55
Maia	4	-1,3
Mérope	4,2	-1,1
Pléione	5	-0,3
Stérope I	5,7	0,4
Stérope II	6,5	1,2
Taygeta	4,25	-1,05

Nombre d'étoiles de magnitude 5,5	Nombre d'étoiles de magnitude 6	Nombre d'étoiles de magnitude 6,5	Nombre d'étoiles de magnitude 7	Nombre d'étoiles de magnitude 7,5
2	23	32	86	64

Cela donne un total de 217 étoiles dans l'amas.

Partie II

Que peut-on conjecturer sur la nature de Bételgeuse ?

Bételgeuse appartient à la classe spectrale I, c'est une super géante rouge. Sa température de surface est relativement faible.

En plaçant de façon approximative les étoiles principales des Pléiades sur le diagramme HR, retrouver leur température.

On peut placer les étoiles sur les différentes branches du diagramme H-R connaissant leur magnitude absolue.

Les températures des étoiles principales de l'amas sont élevées, de l'ordre de 15 000 ou 20 000 K. Les Pléiades sont de couleur bleue.

Si l'on connaît le type spectral d'une étoile, on a directement sa température de surface

Partie III

Calculer la magnitude absolue du Soleil.

$$m_{abs} = m_{app} - 5\log\frac{d}{10}$$

d = 1 UA = $4{,}8.10^{-6}$ pc

on trouve m_{abs}(Soleil) = m_S = 4,77

Trouver la formule qui permet d'exprimer la luminosité L réelle d'une étoile en fonction de sa magnitude absolue m, de la luminosité du Soleil L_0 et de la magnitude absolue du Soleil m_S.

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi d_1{}^2 F_1}{4\pi d_2{}^2 F_2}$$

$$d_1 = d_2 = 10\ pc \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{m_{2\,abs} - m_{1\,abs}}{2,5}}$$

$$\frac{L}{L_0} = 10^{\frac{m_s - m}{2,5}}$$

A partir des magnitudes absolues des étoiles principales calculées dans la première partie, établir leurs rapports M/M_0.

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^{1/\alpha} = 10^{\frac{4,77 - m}{2,5\times 3,2}}$$

Nom de l'étoile	Magnitude apparente	Magnitude absolue	M/M_0
Atlas	3,6	-1,7	6,4
Alcyone	2,75	-2,55	8,2
Célaeno	5,5	0,2	3,7
Electra	3,75	-1,55	6,2
Maia	4	-1,3	5,7
Mérope	4,2	-1,1	5,4
Pléione	5	-0,3	4,3
Stérope I	5,7	0,4	3,5
Stérope II	6,5	1,2	2,8
Taygeta	4,25	-1,05	5,3

Pour les étoiles dites secondaires, en considérant qu'elles sont toutes dans la séquence principale, calculer le rapport M/M_0 qui correspond aux magnitudes apparentes 5,5 ; 6 ; 6,5 ; 7 et 7,5.

m_{app}	m_{abs}	M/M_0
5,5	0,2	3,7
6	0,7	3,2
6,5	1,2	2,8
7	1,7	2,4
7,5	2,2	2,1

Calculer la masse totale de l'amas en fonction de la masse du Soleil.

A titre indicatif, avec les données des tableaux précédents, on trouve :

$M_{tot} = 563\ M_0$

Estimer l'erreur faite sur la masse d'une étoile si on mesure une magnitude plus petite de 0,5 par rapport à la magnitude réelle.

Si une magnitude m correspond à une étoile de masse M, alors une magnitude m'=m-0,5 correspond à une étoile de masse M' telle que :

$$\frac{M'}{M_0} = 10^{\frac{4{,}77-(m-0{,}5)}{3{,}2\times 2{,}5}} = 10^{\frac{4{,}77-m}{3{,}2\times 2{,}5}} \times 10^{\frac{0{,}5}{3{,}2\times 2{,}5}} = \frac{M}{M_0} \times 1{,}15$$

Une erreur de 0,5 en magnitude donne une erreur de 15% sur la masse estimée de l'étoile.

Vérifier que la contribution de 500 naines brunes à la masse totale de l'amas est quasiment négligeable.

$$0{,}001\ M_0 < M_{naine\ brune} < 0{,}07\ M_0$$

$$0{,}5\ M_0 < 500\ M_{naine\ brune} < 35\ M_0$$

Partie IV

Vérifier que U a la même dimension que l'énergie cinétique.

$$F \equiv \frac{dU}{dr}$$

[U]=[force][longueur]=[M][L][T]$^{-2}$[L]=[M][L]²[T]$^{-2}$=[K]=[masse][vitesse]²

Trouver l'énergie potentielle U(r) dont dérive la force d'interaction gravitationnelle exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 :

$$\overrightarrow{F_{12}} = -G\frac{m_1 m_2}{\left|\overrightarrow{r_{12}}\right|^3}\overrightarrow{r_{12}}$$

$$\vec{F}_i(r) = -\frac{dU}{d\vec{r}} \qquad U(\vec{r}) = -\frac{Gm_1 m_2}{\left|\vec{r}_{12}\right|^2}\vec{r}_{12}$$

Écrire le principe fondamental de la dynamique pour la Terre.

$$M_T\,\vec{a} = \vec{F}_{Soleil \to Terre}$$

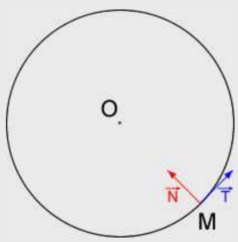
Vous pouvez éventuellement vérifier qu'il est licite de considérer que la Terre n'est soumise qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil en comparant les forces exercées par la Lune et Jupiter à celle exercée par le Soleil.

$$\frac{\left\|\vec{F}_{Soleil \to Terre}\right\|}{\left\|\vec{F}_{Lune \to Terre}\right\|} = \frac{M_S / d_S^{\,2}}{M_L / d_L^{\,2}} = 179$$

$$\frac{\left\|\vec{F}_{Soleil \to Terre}\right\|}{\left\|\vec{F}_{Jupiter \to Terre}\right\|} = \frac{M_S / d_S^{\,2}}{M_J / d_J^{\,2}} = 28\,469$$

Projetez l'équation obtenue dans la base de Frenet.

On suppose que la Terre a une orbite parfaitement circulaire autour du Soleil



$\vec{F}_{Soleil \to Terre}$ est une force centrale, c'est-à-dire selon $\vec{N}$

$$M_T\,a = M_T\frac{v_T^{\,2}}{d_S} = G\frac{M_T M_S}{d_S^{\,2}}$$

$$M_T v_T^{\ 2} = G\frac{M_T M_S}{d_S}$$

Conclure que 2K=-U

On reconnaît $U = -G\frac{M_T M_S}{d_S}$ et $K = \frac{1}{2}M_T v_T^{\ 2}$

Écrire l'énergie cinétique totale de l'amas sous forme d'une somme.

Simplifier en considérant que les étoiles sont toutes animées d'une vitesse $\sqrt{<v^2>}$ qui correspond en fait à une moyenne des vitesses de toutes les étoiles.

$$K_{tot} = \sum_{étoiles\ i}\frac{1}{2}m_i v_i^{\ 2} = \frac{1}{2}\langle v^2\rangle \sum_{étoiles\ i} m_i = \frac{1}{2}M_{tot\ amas}\langle v^2\rangle$$

L'énergie potentielle globale de l'amas est : $\boxed{-\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}}}$

La simplifier en considérant que toutes les étoiles sont de même masse m, que $N^2 \approx N(N-1)$ et qu'il existe une taille caractéristique pour l'amas notée <r>.

$$-\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i} G\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \approx -\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i} G\frac{m^2}{\langle r\rangle} \approx -\frac{1}{2}N(N-1)G\frac{m^2}{\langle r\rangle} \approx -\frac{1}{2}N^2 G\frac{m^2}{\langle r\rangle} \approx -\frac{1}{2}G\frac{M_{tot\ amas}^{\ 2}}{\langle r\rangle}$$

En utilisant l'image C (p.26) dotée d'une échelle, déterminer de façon approximative cette taille <r>.

La taille de l'amas est d'environ 4 pc, on peut prendre <r>=2 pc ou...

Écrire alors le théorème du viriel pour l'amas des Pléiades.

Calculer $\sqrt{<v^2>}$

$$2K = -U$$

$$M_{tot\ amas}\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{GM_{tot\ amas}^{\ 2}}{\langle r\rangle}$$

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{GM_{tot\ amas}}{\langle r\rangle}}$$

Pour l'application numérique penser à convertir <r> en mètres

A titre indicatif, avec les données précédentes, on trouve :

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = 780\ m.s^{-1}$$

Partie V

Si l'on considère grossièrement que l'étoile est entièrement constituée d'hydrogène et que 10% de sa masse totale est à température suffisante pour fusionner, que vaut E ?

D'après la formule d'Einstein, l'énergie libérée lors d'une réaction de fusion est égale à Δm c².

Dans le cas de la fusion de quatre noyaux d'hydrogène en un noyau d'hélium, l'écart de masse Δm entre quatre atomes d'hydrogène indépendants et un atome d'hélium vaut :

$\Delta m = 0{,}007 \times 4 M_H$ où M_H est la masse d'un noyau d'hydrogène, c'est-à-dire d'un proton

L'étoile tire toute son énergie de réactions de fusion.
Si l'on considère qu'une étoile n'est constituée que d'hydrogène et peut brûler au total 10% de sa masse dans des réactions de fusion d'hydrogène en hélium, l'énergie totale disponible est :

$$E = 0{,}1 \times 0{,}007 \times M \times c^2$$

Exprimer et calculer l'espérance de vie t_0 du Soleil.

$$t_0 = \frac{E_0}{L_0} = \frac{0{,}1 \times 0{,}007 \times 2.10^{30} \times (3.10^8)^2}{4.10^{26}} = 3{,}15.10^{17}\ s \approx 10^{10}\ ans$$

Combien de temps lui reste-t-il à vivre ?

Selon notre modèle, la durée de vie d'une étoile de masse M_0 est de 10 milliards d'années. Le Soleil est donc à peu près à la moitié de sa vie.

Calculer en fonction de t_0 l'espérance de vie t des étoiles principales des Pléiades.

$$t = \frac{0{,}1 \times 0{,}007 \times M \times c^2}{L} = \frac{(0{,}1 \times 0{,}007 \times M_0 \times c^2)}{L_0} \frac{M}{M_0} \frac{L_0}{L} = t_0 \frac{M}{M_0} \frac{L_0}{L} = t_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^{1-\alpha}$$

Une étoile de masse M = 5 M_0 aurait par exemple une durée de vie de 290 millions d'années et une étoile de masse M = 3 M_0 de 890 millions.

Combien de temps reste à vivre aux étoiles des Pléiades ? Quelles sont les étoiles de l'amas qui vivront le plus longtemps ?

Les étoiles des Pléiades ont une durée de vie inférieure à celle du Soleil. Et ce sont les étoiles les plus massives qui vivront le moins longtemps.