GHD - Temps, Equilibre, Orbites

Jérôme Perez

Temps de croisement et dynamique

Temps de croisement et dynamique

R taille caractéristique du système, V vitesse caractéristique d'une particule test dans le système (ou bien $\sigma = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$)

$$\text{Temps de croisement : } T_{cr} \propto \frac{R}{\sigma}$$

Temps de croisement et dynamique

R taille caractéristique du système, V vitesse caractéristique d'une particule test dans le système (ou bien $\sigma = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$)

$$\text{Temps de croisement : } T_{cr} \propto \frac{R}{\sigma}$$

Hypothèse : système autogravitant isolé à l'équilibre formé de N particules chacune de masse m : Viriel $2E_c + E_p = 0$

$$E_c = \frac{1}{2} N m \sigma^2 \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{G\,(Nm)^2}{R} \qquad \Rightarrow \sigma = \left(\frac{GNm}{R}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}$$

Temps de croisement et dynamique

R taille caractéristique du système, V vitesse caractéristique d'une particule test dans le système (ou bien $\sigma = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$)

$$\text{Temps de croisement : } T_{cr} \propto \frac{R}{\sigma}$$

Hypothèse : système autogravitant isolé à l'équilibre formé de N particules chacune de masse m : Viriel $2E_c + E_p = 0$

$$E_c = \frac{1}{2} N m \sigma^2 \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{G\left(Nm\right)^2}{R} \qquad \Rightarrow \sigma = \left(\frac{GNm}{R}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}$$

$$T_{cr} \rightarrow T_{dyn} \propto \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

le rapport $R^3/M \propto$ densité de masse moyenne $\overline{\rho}$ du système

$$T_{dyn} \propto \left(G\overline{\rho}\right)^{-1/2} \propto T_{cr}$$

Temps de croisement et dynamique

R taille caractéristique du système, V vitesse caractéristique d'une particule test dans le système (ou bien $\sigma = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$)

$$\text{Temps de croisement : } T_{cr} \propto \frac{R}{\sigma}$$

Hypothèse : système autogravitant isolé à l'équilibre formé de N particules chacune de masse m : Viriel $2E_c + E_p = 0$

$$E_c = \frac{1}{2} N m \sigma^2 \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{G\,(Nm)^2}{R} \qquad \Rightarrow \sigma = \left(\frac{GNm}{R}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2}$$

$$T_{cr} \to T_{dyn} \propto \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

le rapport $R^3/M \propto$ densité de masse moyenne $\overline{\rho}$ du système

$$T_{dyn} \propto (G\overline{\rho})^{-1/2} \propto T_{cr}$$

Si $\rho\,(\mathbf{r})$, $\psi\,(\mathbf{r})$, ... connus : Orbite d'une particule test d'énergie E.
$\Rightarrow$ Si $E = cste < 0$, mouvement périodique de période $T_{orb} \propto T_{cr} \approx T_{dyn}$

Temps de relaxation à deux corps

Temps de relaxation à deux corps

Particule test de masse m, de vitesse v évoluant dans le champ moyen crée par N particules de masse m.
T_{rel} temps mis par les interactions à 2 corps pour modifier significativement v^2

$$T_{rel} \propto \left[\overline{\frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right)} \right]^{-1} \quad (1)$$

Temps de relaxation à deux corps

Particule test de masse m, de vitesse v évoluant dans le champ moyen crée par N particules de masse m.
T_{rel} temps mis par les interactions à 2 corps pour modifier significativement v^2

$$T_{rel} \propto \left[\overline{\frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right)} \right]^{-1} \tag{1}$$

Calcul rigoureux : difficile [HH]
Ordre de grandeur : simple... Chandrasekhar, 1942

Temps de relaxation à deux corps

Particule test de masse m, de vitesse v évoluant dans le champ moyen crée par N particules de masse m.
T_{rel} temps mis par les interactions à 2 corps pour modifier significativement v^2

$$T_{rel} \propto \left[\overline{\frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right)} \right]^{-1} \quad (1)$$

Calcul rigoureux : difficile [HH]
Ordre de grandeur : simple... Chandrasekhar, 1942
Passage à une distance λ d'un voisin à la vitesse v

$$F = \frac{Gm^2}{\lambda^2} \text{ pendant } \delta\tau = \frac{\lambda}{v} \quad , \quad \lambda : \text{paramètre d'impact}$$

Principe fondamental de la dynamique

$$m\frac{\delta v}{\delta\tau} = F \quad \Rightarrow \delta v = \frac{F\delta\tau}{m} = \frac{Gm}{\lambda v} \quad (2)$$

Temps de relaxation à deux corps

Particule test de masse m, de vitesse v évoluant dans le champ moyen crée par N particules de masse m.
T_{rel} temps mis par les interactions à 2 corps pour modifier significativement v^2

$$T_{rel} \propto \left[\overline{\frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right)} \right]^{-1} \tag{1}$$

Calcul rigoureux : difficile [HH]
Ordre de grandeur : simple... Chandrasekhar, 1942
Passage à une distance λ d'un voisin à la vitesse v

$$F = \frac{Gm^2}{\lambda^2} \text{ pendant } \delta\tau = \frac{\lambda}{v} \quad , \quad \lambda : \text{paramètre d'impact}$$

Principe fondamental de la dynamique

$$m\frac{\delta v}{\delta \tau} = F \quad \Rightarrow \delta v = \frac{F\delta\tau}{m} = \frac{Gm}{\lambda v} \tag{2}$$

Particule test est en orbite circulaire de rayon r dans le système de densité ρ.

Collisions avec $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$: $dn = (2\pi p dp) \times (2\pi r) \times \left(\frac{\rho(r)}{m}\right)$

Collisions avec $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$: $dn = (2\pi p dp) \times (2\pi r) \times \left(\frac{\rho(r)}{m}\right)$

Collisions aléatoires : $\overline{\delta v} = 0$, mais

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta v^2 dn = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p}$$

Logarithme coulombien $\ln \Lambda = \ln\left(p_{\max}\right) - \ln\left(p_{\min}\right)$

Collisions avec $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$: $dn = (2\pi p dp) \times (2\pi r) \times \left(\frac{\rho(r)}{m}\right)$

Collisions aléatoires : $\overline{\delta v} = 0$, mais

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta v^2 dn = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p}$$

Logarithme coulombien $\ln \Lambda = \ln\left(p_{\max}\right) - \ln\left(p_{\min}\right)$

Hypothèse : $p_{\max} = r$ et $p_{\min} \approx$ rayon d'une particule $\approx \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{N}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi}{3N}\right)^{1/3} r$.

Ainsi, $\ln \Lambda = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{4\pi}{3N}\right) \approx \frac{1}{3} \ln N$ et

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \ln N$$

Collisions avec $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$: $dn = (2\pi p dp) \times (2\pi r) \times \left(\frac{\rho(r)}{m}\right)$

Collisions aléatoires : $\overline{\delta v} = 0$, mais

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta v^2 dn = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p}$$

Logarithme coulombien $\ln \Lambda = \ln\left(p_{\max}\right) - \ln\left(p_{\min}\right)$

Hypothèse : $p_{\max} = r$ et $p_{\min} \approx$ rayon d'une particule $\approx \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{N}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi}{3N}\right)^{1/3} r$.

Ainsi, $\ln \Lambda = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{4\pi}{3N}\right) \approx \frac{1}{3} \ln N$ et

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \ln N$$

Pour une période orbitale $\left(\Delta t\right)_{orb} \approx T_{dyn}$ ainsi

$$T_{rel}^{-1} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt}\right)_{orb} \approx \frac{4\pi^2}{3} \frac{G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^4} \frac{\ln N}{T_{dyn}}$$

Collisions avec $\lambda \in [\lambda, \lambda + d\lambda]$: $dn = (2\pi p dp) \times (2\pi r) \times \left(\frac{\rho(r)}{m}\right)$

Collisions aléatoires : $\overline{\delta v} = 0$, mais

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta v^2 dn = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p}$$

Logarithme coulombien $\ln \Lambda = \ln\left(p_{\max}\right) - \ln\left(p_{\min}\right)$

Hypothèse : $p_{\max} = r$ et $p_{\min} \approx$ rayon d'une particule $\approx \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{N}\right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi}{3N}\right)^{1/3} r$.

Ainsi, $\ln \Lambda = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{4\pi}{3N}\right) \approx \frac{1}{3} \ln N$ et

$$\left(\Delta v^2\right)_{orb} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^2} \ln N$$

Pour une période orbitale $\left(\Delta t\right)_{orb} \approx T_{dyn}$ ainsi

$$T_{rel}^{-1} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt}\right)_{orb} \approx \frac{4\pi^2}{3} \frac{G^2 m r \rho\left(r\right)}{v^4} \frac{\ln N}{T_{dyn}}$$

Viriel : $v^4 = \left(\frac{GNm}{r}\right)^2$ et $\rho\left(r\right) = Nm\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^{-1}$, on trouve

$$\frac{T_{rel}}{T_{dyn}} \approx \frac{9}{16\pi^3} \frac{N}{\ln N}$$

Application numérique

	N	R [kpc]	σ [km/s]	T_{dyn} [Gan]	T_{rel} [Gan]
Amas ouverts	250	1×10^{-3}	1	1×10^{-3}	4×10^{-2}
Amas globulaires	5×10^{5}	1×10^{-2}	7	1×10^{-3}	5×10^{1}
Galaxies elliptiques	10^{11}	5	200	2×10^{-2}	1×10^{8}
Groupes de galaxies diffus	5	400	100	4×10^{0}	1×10^{1}
Groupes de galaxies compacts	4	40	200	2×10^{-1}	6×10^{-1}
Amas de galaxies riches	400	1200	700	1×10^{-0}	1×10^{2}

Relaxation 2 corps $\Rightarrow$ Ralentir les plus lourds $\Rightarrow$ Ségrégation de masse

Équilibre : $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

Équilibre : $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

Equation de Vlasov, $E = \dfrac{p^2}{2m} + m\psi$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

Équilibre : $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

Equation de Vlasov, $E = \dfrac{p^2}{2m} + m\psi$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

+ Equations de Hamilton $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{df}{dt} = 0$

Équilibre : $f = f_o\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right)$

Equation de Vlasov, $E = \dfrac{p^2}{2m} + m\psi$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

+ Equations de Hamilton $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{df}{dt} = 0$

Intégrale première : $A_i = A_i\left(\mathbf{r}\left(t\right), \mathbf{p}\left(t\right)\right) \in \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{dA_i}{dt} = 0$

Équilibre : $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

Equation de Vlasov, $E = \dfrac{p^2}{2m} + m\psi$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

+ Equations de Hamilton $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{df}{dt} = 0$

Intégrale première : $A_i = A_i(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{dA_i}{dt} = 0$

Remarque : si $f = f_o(A_1, ..., A_n)$ alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f_o}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_o}{\partial A_i}\frac{dA_i}{dt} = 0$$

Équilibre : $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

Equation de Vlasov, $E = \frac{p^2}{2m} + m\psi$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

+ Equations de Hamilton $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{df}{dt} = 0$

Intégrale première : $A_i = A_i(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{dA_i}{dt} = 0$

Remarque : si $f = f_o(A_1, ..., A_n)$ alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f_o}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_o}{\partial A_i} \frac{dA_i}{dt} = 0$$

Théorème de Jeans : Toute fonction positive et normalisable ne dépendant que des intégrales premières du mouvement est une fonction de distribution d'équilibre d'un système autogravitant.

Équilibre : $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$

Equation de Vlasov, $E = \dfrac{p^2}{2m} + m\psi$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

+ Equations de Hamilton $\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{df}{dt} = 0$

Intégrale première : $A_i = A_i(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}$ telle que $\dfrac{dA_i}{dt} = 0$

Remarque : si $f = f_o(A_1, ..., A_n)$ alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f_o}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_o}{\partial A_i}\frac{dA_i}{dt} = 0$$

Théorème de Jeans : Toute fonction positive et normalisable ne dépendant que des intégrales premières du mouvement est une fonction de distribution d'équilibre d'un système autogravitant.

$\longrightarrow$ Vlasov : $\dfrac{dE}{dt} = 0$ donc $f_o(E)$ distribution d'équilibre

$\longrightarrow$ Autres intégrales ? $L^2 = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}|^2$, $L_z = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}| .\widehat{e_z}$, ...

Équilibre $f_o = f_o(E)$

Équilibre $f_o = f_o(E)$

Densité volumique de masse du système (particule test liée : $E < 0$)

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = m \int f\ \left(\mathbf{p}, \mathbf{r}\right) d\mathbf{p} = 4\pi m \int_0^{\sqrt{2m|\psi|}} f\ \left(E\right) p^2 dp$$

Équilibre $f_o = f_o(E)$

Densité volumique de masse du système (particule test liée : $E < 0$)

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int f\ (\mathbf{p}, \mathbf{r})\, d\mathbf{p} = 4\pi m \int_0^{\sqrt{2m|\psi|}} f\ (E)\, p^2 dp$$

$dE = m^{-1} p dp$ ainsi

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi m^2 \int_{m\psi}^{0} f\ (E)\, pdE = 4\pi m^2 \int_{m\psi}^{0} f(E)\sqrt{2m(E - m\psi)}dE \quad (3)$$

$$= \rho(\psi(\mathbf{r})) \quad (4)$$

l'équation de Poisson s'écrit donc $\Delta\psi = 4\pi G \rho(\psi)$

Équilibre $f_o = f_o(E)$

Densité volumique de masse du système (particule test liée : $E < 0$)

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = m\int f\ \left(\mathbf{p},\mathbf{r}\right)d\mathbf{p} = 4\pi m\int_0^{\sqrt{2m|\psi|}} f\ \left(E\right)p^2 dp$$

$dE = m^{-1}pdp$ ainsi

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = 4\pi m^2\int_{m\psi}^{0} f\ \left(E\right)pdE = 4\pi m^2\int_{m\psi}^{0} f\left(E\right)\sqrt{2m\left(E - m\psi\right)}dE \quad (3)$$

$$= \rho\left(\psi\left(\mathbf{r}\right)\right) \quad (4)$$

l'équation de Poisson s'écrit donc $\Delta\psi = 4\pi G\rho\left(\psi\right)$

Théorème Gidas-Ni-Niremberg 1

Hypothèses : $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_-)$, $\exists m > 0\ /\ u\left(\mathbf{x}\right)\ = O\left(|\mathbf{x}|^{-m}\right)$ quand $\mathbf{x} \rightarrow +\infty$ et solution de $\Delta u = h\left(u\right)$ avec $h \searrow \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ telle que$\exists \alpha > \frac{4}{m}\ /\ h\left(u\right) = O\left(u^\alpha\right)$ quand $u \rightarrow 0$.

Conclusion : u est une fonction radiale croissante.

Application en astrophysique

Application en astrophysique

Système isolé, $\psi < 0$, $\rho \searrow$:

$$f = f\left(E\right) \Rightarrow \rho = \rho\left(\psi\right) \Rightarrow \psi = \psi\left(r\right) \Rightarrow \rho = \rho\left(r\right) \quad \text{avec } r = \left|\mathbf{r}\right|$$

Un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie possède la symétrie sphérique dans l'espace des positions.

Application en astrophysique

Système isolé, $\psi < 0$, $\rho \searrow$:

$$f = f\left(E\right) \Rightarrow \rho = \rho\left(\psi\right) \Rightarrow \psi = \psi\left(r\right) \Rightarrow \rho = \rho\left(r\right) \quad \text{avec } r = \left|\mathbf{r}\right|$$

Un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie possède la symétrie sphérique dans l'espace des positions.

Dispersion de vitesse :

$$\forall i = 1,2,3 \;\; \sigma_i^2 = \frac{1}{\rho}\int\left(\frac{\mathbf{p}.\widehat{\mathbf{e}_i}}{m}\right)^2 f\left(E\right)d\mathbf{p}$$

Comme $f\left(E\right) = f\;\left(\left|\mathbf{p}\right|, \left|\mathbf{r}\right|\right)$ on a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

Un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie est isotrope dans l'espace des vitesses.

Équilibre $f_o = f_o(E, L^2)$

Équilibre $f_o = f_o(E, L^2)$

La densité volumique de masse vaut toujours

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = m \int f \ \left(\mathbf{p}, \mathbf{r}\right) d\mathbf{p}$$

mais maintenant $f = f\left(E, L^2\right)$ avec

$$L = \left|\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}\right| = rp\sqrt{1-\mu^2} \text{ avec } \mu = \cos\widehat{\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right)} \tag{5}$$

Équilibre $f_o = f_o(E, L^2)$

La densité volumique de masse vaut toujours

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = m\int f\ \left(\mathbf{p},\mathbf{r}\right)d\mathbf{p}$$

mais maintenant $f = f\left(E, L^2\right)$ avec

$$L = \left|\mathbf{r}\wedge\mathbf{p}\right| = rp\sqrt{1-\mu^2}\ \text{ avec } \mu = \cos\widehat{\left(\mathbf{r},\mathbf{p}\right)} \tag{5}$$

on a donc

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = 2\pi m\int\int f\ \left(r,p,\mu\right)p^2dpd\mu$$

et après quelques lignes

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\pi m^2}{r}\int_{m\psi}^{0}dE\int_{0}^{2r^2(E-m\psi)}f\ \left(E,L^2\right)\frac{dL^2}{\sqrt{2mr^2\left(E-m\psi\right)-L^2}}$$

Équilibre $f_o = f_o(E, L^2)$

La densité volumique de masse vaut toujours

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = m \int f \ \left(\mathbf{p}, \mathbf{r}\right) d\mathbf{p}$$

mais maintenant $f = f\left(E, L^2\right)$ avec

$$L = \left|\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}\right| = rp\sqrt{1-\mu^2} \ \text{ avec } \mu = \cos\widehat{\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right)} \tag{5}$$

on a donc

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = 2\pi m \int\int f \ \left(r, p, \mu\right) p^2 dp d\mu$$

et après quelques lignes

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = \frac{\pi m^2}{r} \int_{m\psi}^{0} dE \int_{0}^{2r^2(E-m\psi)} f \ \left(E, L^2\right) \frac{dL^2}{\sqrt{2mr^2\left(E-m\psi\right) - L^2}}$$

soit

$$\rho = \rho(r, \psi)$$

L’équation de Poisson s’écrit donc maintenant

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho\left(\psi, r\right)$$

L'équation de Poisson s'écrit donc maintenant

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho\left(\psi, r\right)$$

Théorème Gidas-Ni-Niremberg 2
La conclusion est inchangée si $\Delta u = h\left(u, |\mathbf{x}|\right)$ et h strictement décroissante en $|\mathbf{x}|$.

L'équation de Poisson s'écrit donc maintenant

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho\left(\psi, r\right)$$

Théorème Gidas-Ni-Niremberg 2
La conclusion est inchangée si $\Delta u = h\left(u, |\mathbf{x}|\right)$ et h strictement décroissante en $|\mathbf{x}|$.

Application en astrophysique :

- Un système autogravitant avec $f_o = f_o(E, L^2)$ tel que sa densité volumique de masse est décroissante en ψ et strictement décroissante en r possède la symétrie sphérique dans l'espace des positions.

L'équation de Poisson s'écrit donc maintenant

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho\left(\psi, r\right)$$

Théorème Gidas-Ni-Niremberg 2
La conclusion est inchangée si $\Delta u = h\left(u, |\mathbf{x}|\right)$ et h strictement décroissante en $|\mathbf{x}|$.

Application en astrophysique :

- Un système autogravitant avec $f_o = f_o(E, L^2)$ tel que sa densité volumique de masse est décroissante en ψ et strictement décroissante en r possède la symétrie sphérique dans l'espace des positions.
- Un tel système peut présenter une anisotropie dans l'espace des vitesses : la dépendance en $L^2 = mr^2\left(v_\theta^2 + v_\varphi^2\right)$ brise l'isotropie des vitesse que véhiculait $E = \frac{1}{2}mr\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) + \psi\left(r\right)$, ainsi d'une manière générale

$$\sigma_r^2 \neq \sigma_\theta^2 = \sigma_\varphi^2$$

L'anisotropie peut être radiale ou tangentielle.

Orbite dans un potentiel radial

Orbite dans un potentiel radial

Potentiel radial $\psi = \psi(r)$ $\Rightarrow$ force $\mathbf{F} = \nabla(m\psi)$ radiale $\Rightarrow$ conservation de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ $\Rightarrow$ Mvt plan.

Orbite dans un potentiel radial

Potentiel radial $\psi = \psi\left(r\right)$ $\Rightarrow$ force $\mathbf{F} = \nabla\left(m\psi\right)$ radiale $\Rightarrow$ conservation de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ $\Rightarrow$ Mvt plan.

Coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, équations du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L = cste \\ \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi\left(r\right) = cste \end{array} \right. \tag{6}$$

Orbite dans un potentiel radial

Potentiel radial $\psi = \psi(r) \Rightarrow$ force $\mathbf{F} = \nabla(m\psi)$ radiale $\Rightarrow$ conservation de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ $\Rightarrow$ Mvt plan.

Coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, équations du mouvement

$$\begin{cases} mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L = cste \\ \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi(r) = cste \end{cases} \tag{6}$$

Propriétés du potentiel :

- Système lié $\psi(r) < 0$, Système isolé $\psi(r \to +\infty) = 0$,

Orbite dans un potentiel radial

Potentiel radial $\psi = \psi(r)$ $\Rightarrow$ force $\mathbf{F} = \nabla(m\psi)$ radiale $\Rightarrow$ conservation de $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ $\Rightarrow$ Mvt plan.

Coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, équations du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L = cste \\ \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi(r) = cste \end{array} \right. \tag{6}$$

Propriétés du potentiel :

- Système lié $\psi(r) < 0$, Système isolé $\psi(r \to +\infty) = 0$,
- Comportement en 0 : Supposons $\psi(r) \propto \frac{1}{r^\alpha}$ pour $r \to 0$, Poisson

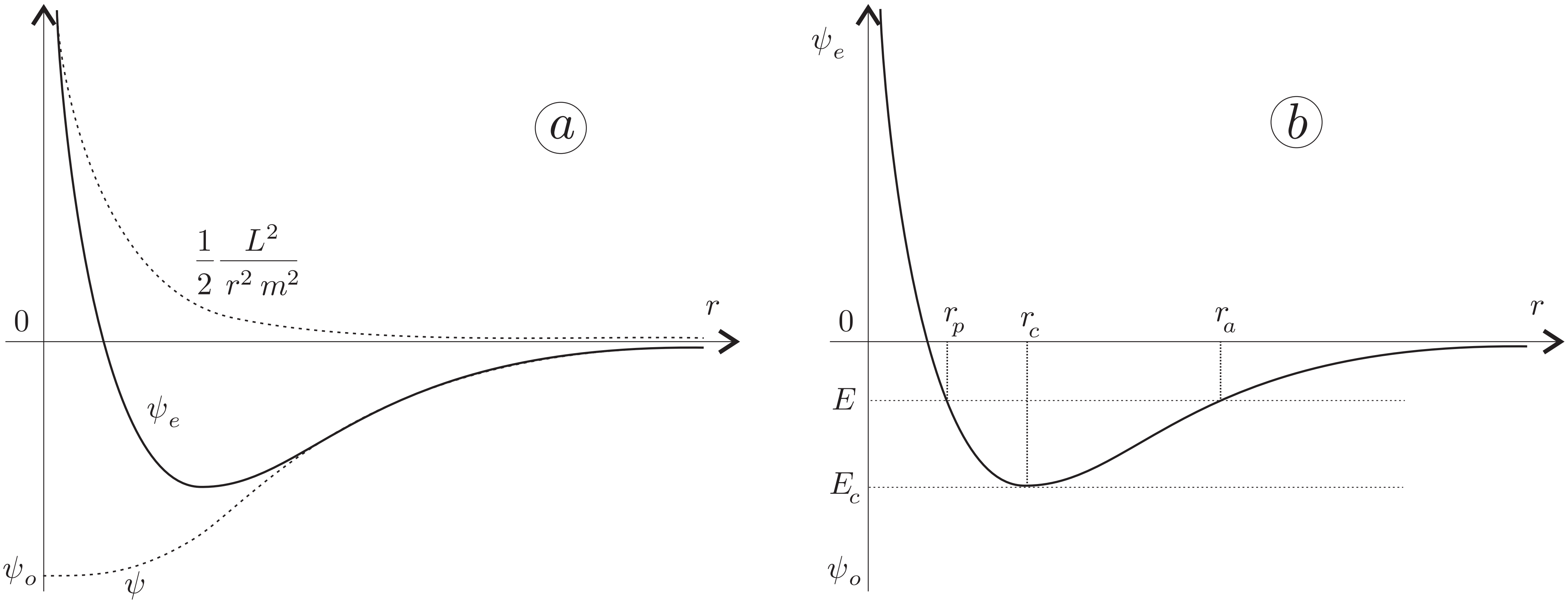
$$\rho \propto \Delta\psi \propto \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)\right) \propto \frac{1}{r^{\alpha+2}}$$

+ Hypothèse de masse finie

$$M \propto \int_0^{r_{\max}} r^2 \rho(r)\, dr \propto \int_0^{r_{\max}} \frac{dr}{r^\alpha} \quad \Rightarrow \alpha < 1$$

Apo-Pericentre

Potentiel effectif : $\psi_e(r) := \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r^2} + \psi(r)$. Si $M < \infty$, $\begin{cases} \psi_e(r \to +\infty) \to 0^- \\ \psi_e(r \to 0) \to +\infty \end{cases}$



l'énergie d'une particule test est bornée $E = \left(\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + m\psi_e(r)\right) \in [E_c, 0]$

et $r_p \leq r(t) \leq r_a$

Période radiale

Période radiale

EDO vérifiée par $r(t)$:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r^2} + \psi\left(r\right)$$

Période radiale

EDO vérifiée par $r(t)$:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r^2} + \psi\left(r\right)$$

On calcule

$$\frac{\tau}{2} = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - \psi\left(r\right)\right) - \frac{L^2}{m^2r^2}}} \tag{7}$$

Période radiale

EDO vérifiée par $r(t)$:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi\left(r\right)$$

On calcule

$$\frac{\tau}{2} = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - \psi\left(r\right)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \qquad (7)$$

Si $E \in [E_c < 0, 0]$ et $M < \infty$, alors $\frac{\tau}{2} < \infty$, ainsi

$$r\left(t\right) = r_p \Rightarrow r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) = r_a \Rightarrow r\left(t + \tau\right) = r_p = r\left(t\right)$$

Période radiale

EDO vérifiée par $r(t)$:

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi\left(r\right)$$

On calcule

$$\frac{\tau}{2} = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - \psi\left(r\right)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \tag{7}$$

Si $E \in [E_c < 0, 0]$ et $M < \infty$, alors $\frac{\tau}{2} < \infty$, ainsi

$$r\left(t\right) = r_p \Rightarrow r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) = r_a \Rightarrow r\left(t + \tau\right) = r_p = r\left(t\right)$$

Les fonctions $r\left(t\right)$ et $r\left(t+\tau\right)$ sont solutions de la même EDO.
Cauchy $\Rightarrow$

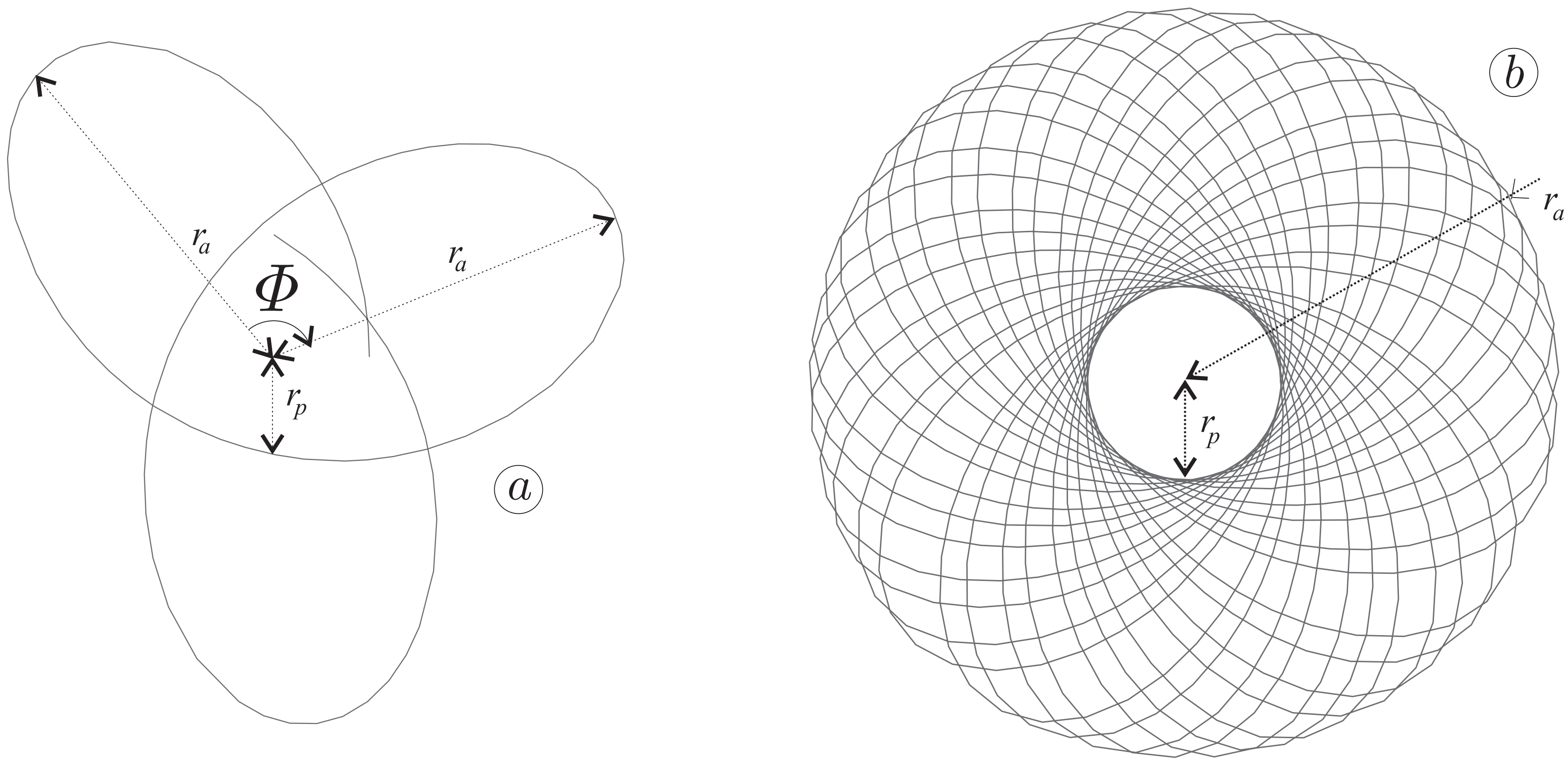
La fonction $r\left(t\right)$ est $\tau-$périodique

En se donnant le potentiel, on calcule $\tau = T_{orb}$...

Décalage de l'apocentre

Pendant une période radiale, l'angle Φ correspondant au mouvement de l'apocentre s'écrit

$$\Phi = 2\int_{r_p}^{r_a} \frac{d\theta}{dt}\frac{dt}{dr}dr = \frac{2}{m}\int_{r_p}^{r_a} \frac{L\,dr}{r^2\sqrt{2\left(\frac{E}{m}-\psi\left(r\right)\right)-\frac{L^2}{m^2r^2}}}$$



On remarque que $\tau = \tau\left(E, L^2\right)$ et l'angle $\Phi = \Phi\left(E, L^2\right)$ ... Le cas du potentiel isochrone !

Inversions & Applications

Première formule d'Abel (Eddington) - $0 < \alpha < 1$

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_0^t \frac{df}{dx} \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} \right] \end{aligned}$$

Inversions & Applications

Seconde formule d'Abel (Eddington) - $0 < \alpha < 1$

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha} dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^{+\infty} \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dx \\ &= -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_t^{+\infty} \frac{df}{dx} \frac{dx}{(x-t)^{1-\alpha}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \right] \end{aligned}$$

Inventer la troisième dimension ...

Inventer la troisième dimension ...

Système sphérique, $I(R)$: profil de luminosité projetée, $\lambda(r)$ et $\rho(r)$: densités de lumière et de masse dans l'espace.

$$\rho(r) = \Upsilon\ (r)\,\lambda(r)$$

Inventer la troisième dimension ...

Système sphérique, $I\left(R\right)$: profil de luminosité projetée, $\lambda\left(r\right)$ et $\rho\left(r\right)$: densités de lumière et de masse dans l'espace.

$$\rho\left(r\right) = \Upsilon\ \left(r\right)\lambda\left(r\right)$$

- Amas globulaire : $\Upsilon\ \approx 3\ \Upsilon_{\odot}$ [$3,4 \pm 1.0$ pour NGC 1835 (voir [melheg])]

Inventer la troisième dimension ...

Système sphérique, $I(R)$: profil de luminosité projetée, $\lambda(r)$ et $\rho(r)$: densités de lumière et de masse dans l'espace.

$$\rho(r) = \Upsilon\ (r)\,\lambda(r)$$

- Amas globulaire : $\Upsilon\ \approx 3\ \Upsilon_{\odot}$ [$3,4 \pm 1.0$ pour NGC 1835 (voir [melheg])]
- Galaxie elliptique $\Upsilon\ \approx 10\ \Upsilon_{\odot}$ (voir [lauer] pour une longue liste ...)

Inventer la troisième dimension ...

Système sphérique, $I\,(R)$: profil de luminosité projetée, $\lambda\,(r)$ et $\rho\,(r)$: densités de lumière et de masse dans l'espace.

$$\rho\,(r) = \Upsilon\ (r)\,\lambda\,(r)$$

- Amas globulaire : $\Upsilon\ \approx 3\ \Upsilon_{\odot}$ [$3,4 \pm 1.0$ pour NGC 1835 (voir [melheg])]
- Galaxie elliptique $\Upsilon\ \approx 10\ \Upsilon_{\odot}$ (voir [lauer] pour une longue liste ...)
- $\Upsilon\ \approx 100\ \Upsilon_{\odot}$ pour les amas de galaxies.

Inventer la troisième dimension ...

Système sphérique, $I\left(R\right)$: profil de luminosité projetée, $\lambda\left(r\right)$ et $\rho\left(r\right)$: densités de lumière et de masse dans l'espace.

$$\rho\left(r\right) = \Upsilon\ \left(r\right)\lambda\left(r\right)$$

- Amas globulaire : $\Upsilon\ \approx 3\ \Upsilon_{\odot}$ [$3,4 \pm 1.0$ pour NGC 1835 (voir [melheg])]
- Galaxie elliptique $\Upsilon\ \approx 10\ \Upsilon_{\odot}$ (voir [lauer] pour une longue liste ...)
- $\Upsilon\ \approx 100\ \Upsilon_{\odot}$ pour les amas de galaxies.

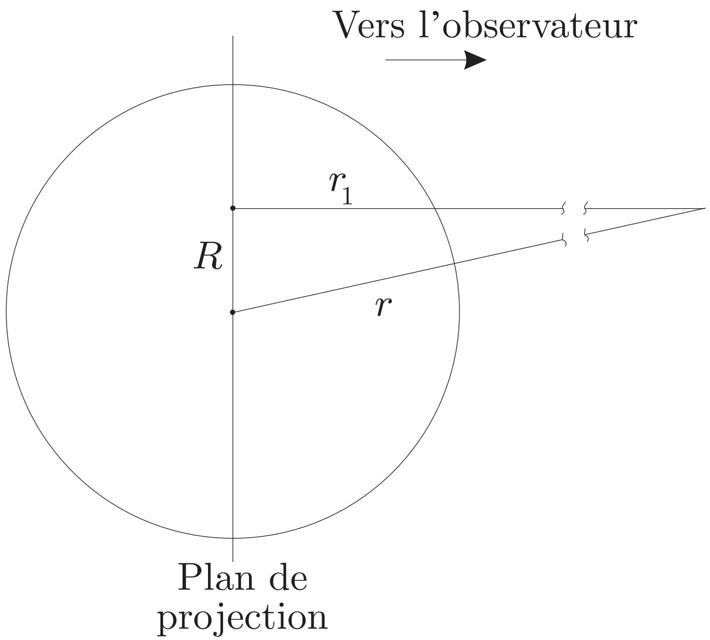
Pour un objet donné nous prendrons donc

$$\rho\left(r\right) = \Upsilon\,\lambda\left(r\right) \quad \text{avec } \Upsilon = cste$$

Luminosité radiale projetée $I\left(R\right)$ dans le plan orthogonal à une ligne de visée Or_1 : intégration ...

$$I = 2\int_0^{\infty}\lambda\left(r\right)\ dr_1$$

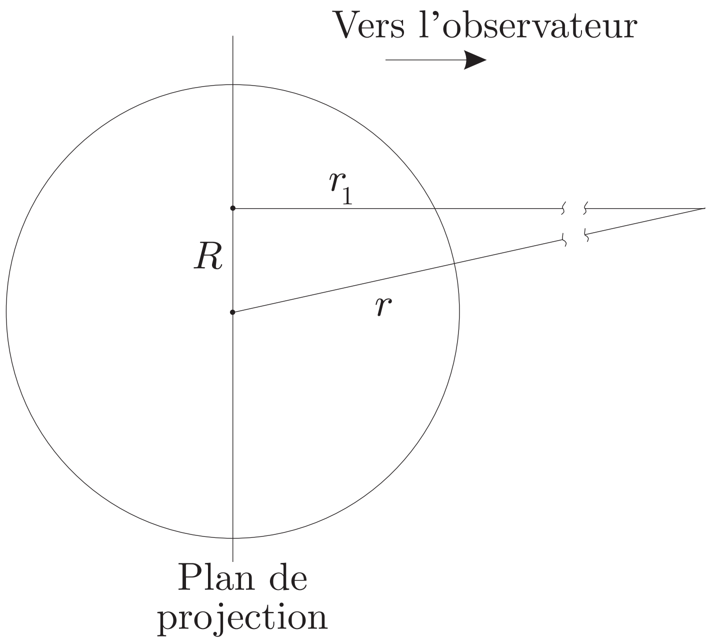
Inventer la troisième dimension ...



Comme $r^2 = R^2 + r_1^2$

$$I\left(R\right) = 2\int_R^\infty \frac{\lambda\left(r\right)\ r}{\sqrt{r^2 - R^2}}dr = \frac{1}{\Upsilon}\int_x^\infty \frac{\rho\left(t\right)}{\left(t-x\right)^{1/2}}dt \qquad \text{avec } x = R^2 \text{ et } t = r^2$$

Inventer la troisième dimension ...



Comme $r^2 = R^2 + r_1^2$

$$I\left(R\right) = 2\int_R^\infty \frac{\lambda\left(r\right)\ r}{\sqrt{r^2 - R^2}}dr = \frac{1}{\Upsilon}\int_x^\infty \frac{\rho\left(t\right)}{\left(t-x\right)^{1/2}}dt \qquad \text{avec } x = R^2 \text{ et } t = r^2$$

Deuxième formule d'Abel :

$$\rho\left(r\right) = -\frac{\Upsilon}{\pi}\int_{r^2}^\infty \frac{dI}{dR}\frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \tag{8}$$

et le tour est joué ...

f à partir de ρ

f à partir de ρ

- $\psi < 0$ et $\lim\limits_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \psi(\mathbf{r}) =?$ on pose donc

$$\varphi = \psi_\infty - \psi \qquad \text{avec } \lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \psi(\mathbf{r}) = \psi_\infty$$

f à partir de ρ

- $\psi < 0$ et $\lim_{|\mathbf{r}| \to +\infty} \psi(\mathbf{r}) =?$ on pose donc

$$\varphi = \psi_\infty - \psi \qquad \text{avec} \quad \lim_{|\mathbf{r}| \to +\infty} \psi(\mathbf{r}) = \psi_\infty$$

- Particule test liée : $E < 0$ on pose donc

$$\varepsilon = m\psi_\infty - E = m\varphi - \frac{p^2}{2m}$$

f à partir de ρ

- $\psi < 0$ et $\lim\limits_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \psi(\mathbf{r}) = ?$ on pose donc

$$\varphi = \psi_\infty - \psi \qquad \text{avec } \lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \psi(\mathbf{r}) = \psi_\infty$$

- Particule test liée : $E < 0$ on pose donc

$$\varepsilon = m\psi_\infty - E = m\varphi - \frac{p^2}{2m}$$

Fonction de distribution d'équilibre d'un système shérique isotrope

$$f = \begin{cases} f(\varepsilon) & \text{si } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon \leq 0 \end{cases} \qquad \text{on a } \varepsilon = 0 \text{ pour } p = m\sqrt{2\varphi}$$

f à partir de ρ

- $\psi < 0$ et $\lim\limits_{|\mathbf{r}| \to +\infty} \psi(\mathbf{r}) = ?$ on pose donc

$$\varphi = \psi_\infty - \psi \qquad \text{avec} \lim_{|\mathbf{r}| \to +\infty} \psi(\mathbf{r}) = \psi_\infty$$

- Particule test liée : $E < 0$ on pose donc

$$\varepsilon = m\psi_\infty - E = m\varphi - \frac{p^2}{2m}$$

Fonction de distribution d'équilibre d'un système shérique isotrope

$$f = \begin{cases} f(\varepsilon) & \text{si } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

on a $\varepsilon = 0$ pour $p = m\sqrt{2\varphi}$

Densité volumique de masse

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int f(\varepsilon)\, d\mathbf{p}$$
$$= 4\pi m \int_0^{m\sqrt{2\varphi}} f(\varepsilon)\, p^2 dp$$

f **à partir de** ρ

pour une valeur donnée du rayon, on peut écrire

$$p = \sqrt{2m}\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2} \text{ et } pdp = -md\varepsilon$$

ainsi

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = 4\sqrt{2}\pi m^{5/2}\int_0^{m\varphi} f\left(\varepsilon\right)\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2} d\varepsilon = \rho\left(\varphi\right)$$

f à partir de ρ

pour une valeur donnée du rayon, on peut écrire

$$p = \sqrt{2m}\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2} \text{ et } pdp = -md\varepsilon$$

ainsi

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = 4\sqrt{2}\pi m^{5/2} \int_0^{m\varphi} f\left(\varepsilon\right)\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2} d\varepsilon = \rho\left(\varphi\right)$$

En dérivant par rapport à φ

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi m^{7/2}}\frac{d\rho}{d\varphi} = \int_0^{m\varphi} \frac{f\left(\varepsilon\right)}{\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2}} d\varepsilon$$

f à partir de ρ

pour une valeur donnée du rayon, on peut écrire

$$p = \sqrt{2m}\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2} \text{ et } pdp = -md\varepsilon$$

ainsi

$$\rho\left(\mathbf{r}\right) = 4\sqrt{2}\pi m^{5/2}\int_0^{m\varphi} f\left(\varepsilon\right)\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2} d\varepsilon = \rho\left(\varphi\right)$$

En dérivant par rapport à φ

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi m^{7/2}}\frac{d\rho}{d\varphi} = \int_0^{m\varphi}\frac{f\left(\varepsilon\right)}{\left(m\varphi - \varepsilon\right)^{1/2}}d\varepsilon$$

Première formule d'Abel

$$f\left(\varepsilon\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 m^{7/2}}\left[\int_0^{\varepsilon}\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{\left(\varepsilon - m\varphi\right)^{1/2}} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\left.\frac{d\rho}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}\right] \tag{9}$$

[Hernquist] L. Hernquist, *An analytical model for spherical galaxies and bulges*, **The Astrophysical Journal**, vol. 356, pp. 359-364, 1990.

[merritt] D. Merritt, A. W. Graham, B. Moore, J. Diemand, B. Terzic, *Empirical models for dark matter halos I*, **The Astronomical Journal**, vol. 132, pp. 2685-2700, 2006.

[BT] J. Binney & S. Tremaine, *Galactic dynamics*, **Princeton university press**, 1987

[LGM] G. B. Lima Neto, D. Gerbal & I. Marquez, , **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 309, pp. 481-495, 1999.

[henon] M. Hénon, *L'amas isochrone*, **Annales d'astrophysique**, vol. 22, p. 126, 1959

[Jaffe] W. Jaffe, *A simple model for the distribution of light in spherical galaxies*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 202, pp. 995-999, 1983

[Chandra] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, **Dover Publications**, 509 pages, 1958

[King] I. King, *The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models*, **Astronomical Journal**, Vol. 71, pp. 64-75, 1966

[FP] A.M Fridman & V.L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Vols. 1 and 2, **Springer**, New York, 1984

[MK] M. K.-H. Kiessling, *The Jeans Swindle. A True Story: Mathematically Speaking*, **Advances in Applied Mathematics**, vol 31, pp. 132-149, 2003

[vdVMK] G. van de Ven, R. Mandelbaum and C. R. Keeton, *Galaxy density profiles and shapes - I. Simulation pipeline for lensing by realistic galaxy models*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 398, pp. 607-634, 2009

[elsonhutina] R. Elson, P.Hut and S. Inagaki, *Dynamical evolution of globular clusters*, **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Vol. 25, pp. 565-601, 1987 [melheg] G. Meylan and D. C. Heggie, Internal dynamics of globular clusters, **The Astronomy and Astrophysics Review**, Vol. 8, pp. 1-143, 1997

[RP] F. Roy & J. Perez, *Dissipationless collapse of a set of N massive particles*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 348, p. 62, 2004

[JMSL] M. Joyce, B. Marcos & F. Sylos Labini, *Energy ejection in the collapse of a cold spherical self-gravitating cloud*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol.397, p. 775, 2009

[lauer] T.R. Lauer, *The cores of elliptical galaxies*, **The Astrophysical Journal**, vol. 292, pp 104-121,1985

[HH] D. Heggie and Piet Hut, *The gravitational Million-Body problem*, **Cambridge University Press**, 2003