Relativité Restreinte

Relativité restreinte

Insuffisances de la mécanique classique

- Les équations de Maxwell ne sont valides que dans un seul référentiel (celui ou la vitesse de la lumière est c)
- Expérience de Michelson (1881) & Morley(1887) : La lumière viole le principe d'addition des vitesses de Galilée.

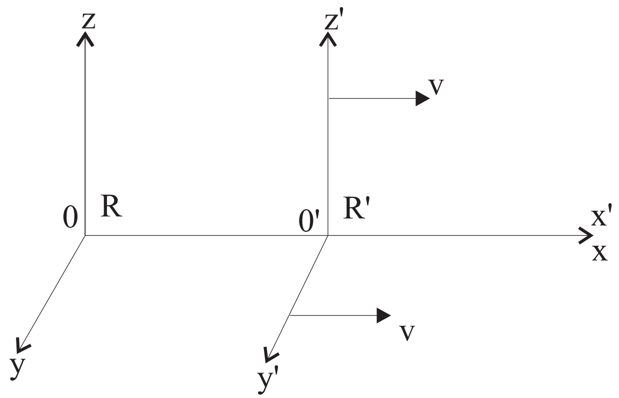
Einstein, Poincaré (1905) : Principe de relativité restreinte

"*Les équations de la physique s'écrivent de la même façon dans tous les référentiels en translations uniformes les uns par rapports aux autres (référentiels galiliéens).*"

Equations de Maxwell $\Rightarrow c$ ne dépend pas du choix du référentiel

Transformation de Lorentz

M de coordonnées (x, y, z) à l'instant t dans un repère $\mathcal{R}$ et (x', y', z') à l'instant t' dans un repère $\mathcal{R}'$.
$\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{v}$ // $0x$ par rapport à $\mathcal{R}$.



Mécanique classique : (transformation de Galilée))

$$\begin{cases} x' = x + vt & z' = z \\ y' = y & t' = t \end{cases} \qquad (1)$$

Pour satisfaire, le Principe de Relativité Restreinte, nous devons donc chercher une relation plus compliquée de la forme

$$\begin{cases} x' = F(x, y, z, t) & y' = G(x, y, z, t) \\ z' = H(x, y, z, t) & t' = K(x, y, z, t) \end{cases} \qquad (2)$$

Linéarité, Réversibilité, Invariance de ds^2, ...
on note

$$\beta = \frac{v}{c} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \geq 1 \tag{3}$$

la relation entre les composantes d'un évènement dans $\mathcal{R}$ et les composantes correspondantes dans $\mathcal{R}'$ s'écrivent matriciellement

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\pm} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad A^{\pm} := \pm \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{bmatrix} \tag{4}$$

les définitions (3) montrent que $\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1$, comme $\gamma = \gamma(v)$, $\beta = \beta(v)$ on peut toujours trouver $\phi(v)$, $\gamma = \mathrm{ch}(\phi)$ et $\gamma\beta = \mathrm{sh}(\phi)$.

$\Rightarrow$ La matrice A^+ est donc celle d'une rotation hyperbolique

Notations 4D

4-vecteur position d'un évènement

Composante contravariante

Dans $\mathcal{R}$ donné, évènement $\Leftrightarrow$ (ct, x, y, z), plus généralement : Un évènement sera représenté par un vecteur de $\mathbb{M}_{4,\mathbb{R}}$ muni de la base $\mathbf{e}_{\mu_{(\mu=0,1,2,3)}}$

$$\mathbf{r} = \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} \tag{5}$$

Conventions

$$cx^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y \text{ et } x^3 = z \tag{6}$$

$$\mathbf{r} = x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} = x^0\mathbf{e}_0 + x^i\mathbf{e}_i \tag{7}$$

Nombres x^{μ} : composante contravariante du 4 vecteur $\mathbf{r}$.

Produit scalaire

2 évènements $\mathbf{r} = x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu}$ et $\mathbf{s} = y^{\nu}\mathbf{e}_{\nu}$

$$\mathbf{r}.\mathbf{s} := x^{\mu}\mathbf{e}_{\mu} \,.\, y^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = x^{\mu}y^{\nu}\mathbf{e}_{\mu} \,.\, \mathbf{e}_{\nu} \tag{8}$$

Comment calculer $\mathbf{e}_{\mu} \,.\, \mathbf{e}_{\nu}$: Math $\Rightarrow$ Physique

♡ : Relier ce produit scalaire à la notion de distance dans l'espace temps : ♡

$$\mathbf{r}.\mathbf{r} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{9}$$

Métrique de Minkowski

On pose donc

$$\eta_{\mu\nu} := \mathbf{e}_\mu . \mathbf{e}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{r}.\mathbf{s} = \eta_{\mu\nu}\, x^\mu \; y^\nu \tag{10}$$

Composante covariante
Posons $y_\mu = \eta_{\mu\nu}\, y^\nu$ ainsi $\mathbf{r}.\mathbf{s} = x^\mu\, y_\mu$, on dit que y_μ est la composante covariante de l'évènement $\mathbf{s}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{M}_{4,\mathbb{R}} & & \text{Base} & \longrightarrow & \begin{array}{c}\text{comp.}\\ \text{contra.}\end{array} & x^\mu & \\
 & \nearrow & & & & & \searrow \\
\text{vecteur : } \mathbf{r} & & & & & & x_\nu = \eta_{\mu\nu}\, x^\mu \\
 & \searrow & & & & & \nearrow \\
\mathbb{M}^*_{4,\mathbb{R}} & & \begin{array}{c}\text{Base}\\ \text{duale}\end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c}\text{comp.}\\ \text{cov.}\end{array} & x_\nu &
\end{array}$$

Changement de Base

En notant $\eta^{\mu\nu}$, l'inverse de $\eta_{\mu\nu}$, i.e. $\eta^{\mu\nu} = $ diag(1,-1,-1,-1) on a $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ et

$$x^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}x^{\nu} = \eta^{\mu\alpha}\, x_{\alpha} \tag{11}$$

$\eta_{\mu\nu}$ et $\eta^{\mu\alpha}$: ascenseur pour les indices d'un évènement.

Changement de base
$\mathcal{R} \rightarrowtail \mathcal{R}'$:Transformation de Lorentz

$$x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{12}$$

pour peu que

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

on peut alors jouer avec l'ascenseur ...

$$L^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} L_{\mu}{}^{\beta}\ ,\ \ L_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\, L_{\beta}{}^{\mu}\ , ... \tag{14}$$

4-vecteurs de la physique

- Définition

$4-$vecteur physique (ou quadrivecteur) : tout ensemble ordoné de 4 quantités physiques, qui se transforme *comme* les composantes de la $4-$position lors d'un changement de référentiel.

  - Toute quantité physique réunissant 4 nombres n'est pas forcément un quadrivecteur.
  - Les composantes contravariantes a^μ d'un quadrivecteur $\mathbf{a}$ se décomposent en une composante temporelle a^0 et un 3-vecteur $\overrightarrow{a}$ appelé composante spatiale
  - Si $a^\mu = \left(a^0, \overrightarrow{a}\right)$, alors $a_\mu = \left(a_0 = a^0, -\overrightarrow{a}\right)$

- $4-$vitesse

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \quad \Rightarrow \quad u^\mu = (\gamma c, \gamma \overrightarrow{v}) \tag{15}$$

On remarque que $\mathbf{u}^2 = u^\mu \, u_\mu = \gamma^2 \left(c^2 - v^2\right) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \beta^2\right) = c^2$

- $4-$accélération

$$\Gamma = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Rightarrow \Gamma^\mu = \gamma \left(c \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \overrightarrow{v} + \gamma \overrightarrow{a} \right) \tag{16}$$

4-vecteurs électromagnétiques

Densité de courant

Conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{dt} + \overrightarrow{\nabla}.\left(\rho \overrightarrow{v}\right) = 0$$

réécriture

$$\frac{\partial}{\partial\left(ct\right)}\left(c\rho\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_z\right) = 0 \tag{17}$$

Notation :

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{18}$$

l'équation de continuité (17) se réécrit simplement

$$\partial_\mu\left(\rho\frac{dx^\mu}{dt}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad J^\mu := \rho\frac{dx^\mu}{dt} \tag{19}$$

J^μ : comp. cov. d'un 4-vecteur $J^\mu = \left(\rho c, \overrightarrow{j}\right)$, $\overrightarrow{j} = 3-$courant classique.

$\heartsuit$ Conservation de la charge $\Leftrightarrow$ $\partial_\mu J^\mu = 0$ $\heartsuit$

4-vecteur d'onde

Onde monochromatique de fréquence ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.

$$\text{Phase : } \varphi = \omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} \qquad (20)$$

φ est un 4-scalaire ... qui permet de "découvrir" un nouveau 4-vecteur $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \overrightarrow{k}\right)$ le 4-vecteur d'onde car

$$\varphi = k_\mu \, x^\mu \qquad (21)$$

- k_μ est isotrope : $k_\mu \, k^\mu = 0$
- Changement de base ...

donc

$$k'^\mu = L^\mu{}_\nu k^\nu \qquad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \omega' & = & \gamma\,(\omega - v k_x) & \quad (a) \\ k'_x & = & \gamma\,(k_x - \beta\omega/c) & \quad (b) \end{array} \right. \qquad (23)$$

(23$-a$) : Effet Doppler relativiste (si $\gamma \approx 1$, $\omega' = \omega - vk$)
(23$-b$) : aberration relativiste de la lumière.

Pour les puristes ...

Définition fondamentale

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension *finie*, et E^* son dual

$$\mathcal{T}_2 = E^* \otimes E^* = \{\text{applications linéaires continues de } E \times E \text{ dans } \mathbb{K}\}$$

Un élément de $\mathcal{T}_2$ est appelé tenseur d'ordre 2, deux fois covariant.
Construction

$$E = (E^*)^* \Longrightarrow \mathcal{T}_1^1 = E \otimes E^*.$$

... etc...

$$\mathcal{T}_p^q = (E^*)^{\otimes q} \otimes (E)^{\otimes p}$$

Eléments de $\mathcal{T}_p^q$: tenseurs q fois covariants et p fois contravariants ...

Définition pratique

Théorème de Cartan : un objet à $p+q$ indices est un tenseur si et seulement si chacun de ses indices subit une transformation de Lorentz "régulière"
Exemple : $T_\alpha{}^\beta{}_\mu$ issu d'un tenseur d'ordre 3, deux fois covariant et une fois contravariant ssi

$$T'_\alpha{}^\beta{}_\mu = L_\alpha{}^\sigma \, L_\mu{}^\nu \, L^\beta{}_\rho \, T_\sigma{}^\rho{}_\nu \tag{24}$$

Propriétés

Symétrie : $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, antisymétrie : $T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha}$, Contraction $T_\alpha{}^\alpha{}_\beta = T_\beta$, ...

Calcul vectoriel différentiel

- $4-$nabla

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{25}$$

- $4-$gradient d'un $4-$scalaire ($= 4-$vecteur)

$$\partial_\mu f := f_{,\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \overrightarrow{\nabla f} \right)$$

- $4-$divergence d'un $4-$vecteur ($= 4-$scalaire)

$$\partial_\mu \, A^\mu = \partial^\mu \, A_\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial a^0}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{a} \tag{26}$$

- $4-$rotationnel (tenseur d'ordre 2)

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{27}$$

- $4-$laplacien

$$\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \, \partial^\mu \ . \tag{28}$$

Question importante ...

$$\partial_\mu \, A^\nu \text{ ou } \partial^\mu \, A_\nu \text{ objets tensoriels ?}$$

Vérification : $\partial'_\mu = L_\mu{}^\alpha \partial_\alpha$ et $A'^\nu = L^\nu{}_\beta \, A^\beta$ ainsi

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \, A'^\nu &= L_\mu{}^\alpha \partial_\alpha \left(L^\nu{}_\beta \, A^\beta \right) \\ &= A^\beta L_\mu{}^\alpha \partial_\alpha \left(L^\nu{}_\beta \right) + L_\mu{}^\alpha L^\nu{}_\beta \partial_\alpha \, A^\beta \end{aligned} \tag{29}$$

la transformation de Lorentz est linéaire, ainsi les composantes $L^\nu{}_\beta$ sont toutes constantes, et ses dérivées sont donc nulles ... ouf !

$$\partial'_\mu \, A'^\nu = L_\mu{}^\alpha L^\nu{}_\beta \partial_\alpha \, A^\beta \tag{30}$$

et l'on assiste à une transformation correcte, qui confère donc le statut de tenseur de rang 2 à l'objet dont la composante mixte est $\partial_\alpha \, A^\beta$.
Si le changement se fait vers un repère non inertiel ... tout s'écroule !

Application ... électromagnétisme !

Mécanique classique

$$S = \int \mathcal{L} dt \ . \tag{31}$$

Extremum $\Longleftrightarrow$Mouvement

Relativité restreinte

$$S \quad = \quad \underbrace{-mc\int ds}_{\text{P libre}} \quad \underbrace{-q\int A_\mu J^\mu \, dV \, dt}_{\text{int. CP}} \quad \underbrace{+k\int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \, dV \, dt}_{\text{C libre}} \tag{32}$$

- Mouvement de particules chargées dans un champ fixe

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad m\frac{d\, u_\mu}{d\tau} = q\, F_{\mu\nu} u^\nu \tag{33}$$

$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est un 4-rotationnel, $\partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow 2$ Maxwell's

- Champ crée par une distribution de charges

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu \tag{34}$$

2 autres Maxwell's ...