

Gravitation différentielle

 ***Résonances***

Résonances

Fonction perturbatrice

$$\mathbf{u} = (a, e, i), \quad \mathbf{v} = (\Omega, \omega, M) \quad R = R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}')$$

$$M = n(t - \tau)$$

... Fourier ...

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad j^2 = -1$$

$$R = \Re \left\{ Gm' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')} \right\}$$

Résonances

Fonction perturbatrice

$$\mathbf{u} = (a, e, i), \quad \mathbf{v} = (\Omega, \omega, M) \quad R = R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}')$$

$$M = n(t - \tau)$$

... Fourier ...

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad j^2 = -1$$

$$R = \Re \left\{ Gm' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')} \right\}$$

Première équation planétaire

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

donc

$$a^{1/2} da = 2Gm' dt \Re \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} j k_3 A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')} \right\}$$

Tout est constant sauf a , $M = M_o + n_o(t - t_o)$ et $M' = M'_o + n'_o(t - t_o)$

Résonances

Fonction perturbatrice

$$\mathbf{u} = (a, e, i), \quad \mathbf{v} = (\Omega, \omega, M) \quad R = R(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}')$$

$$M = n(t - \tau)$$

... Fourier ...

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad j^2 = -1$$

$$R = \Re \left\{ Gm' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')} \right\}$$

Première équation planétaire

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{n^2 a} \frac{\partial R}{\partial \tau} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

donc

$$a^{1/2} da = 2Gm' dt \Re \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} j k_3 A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')} \right\}$$

Tout est constant sauf a , $M = M_o + n_o(t - t_o)$ et $M' = M'_o + n'_o(t - t_o)$

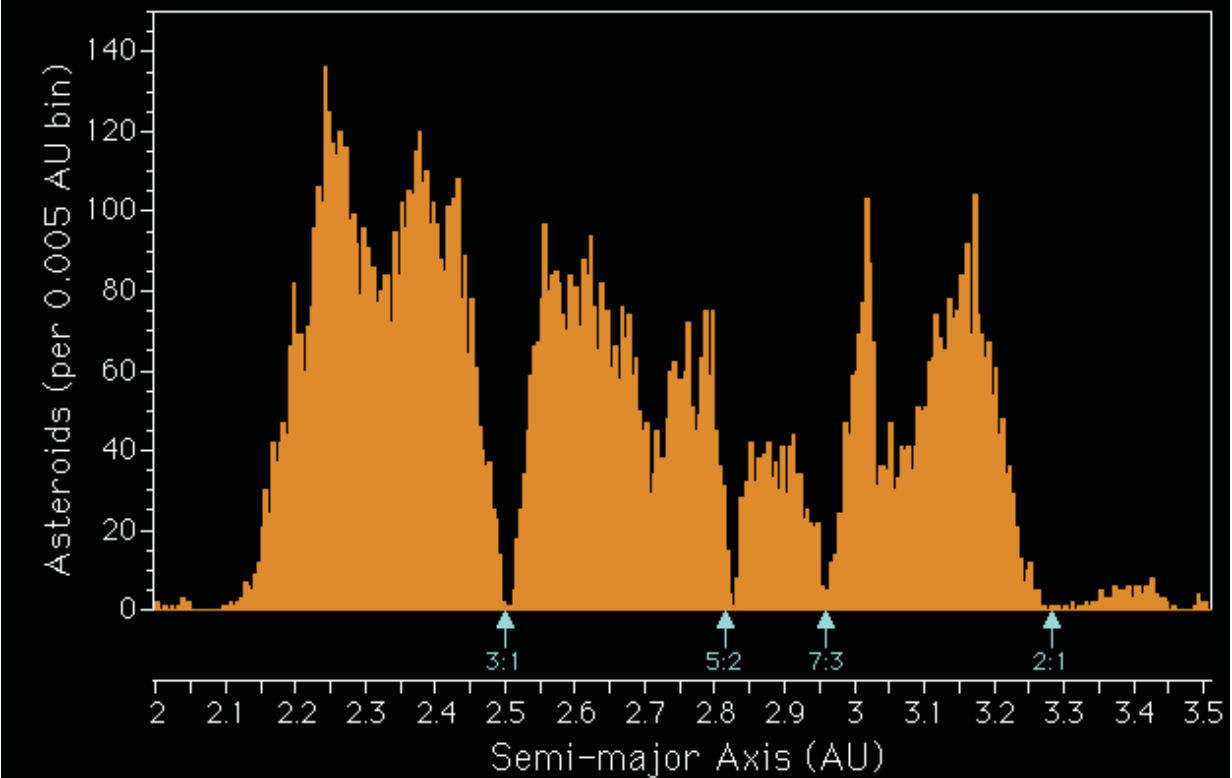
$$a^{3/2}(t) = a_o^{3/2} + 3Gm' \Re \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{k_3 A_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{u}, \mathbf{u}')}{k_3 n_o + k'_3 n'_o} e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}')} \right\}$$

Résonance pour $k_3 n_o + k'_3 n'_o \approx 0$, i.e. $n_o/n'_o \in \mathbb{Q}$

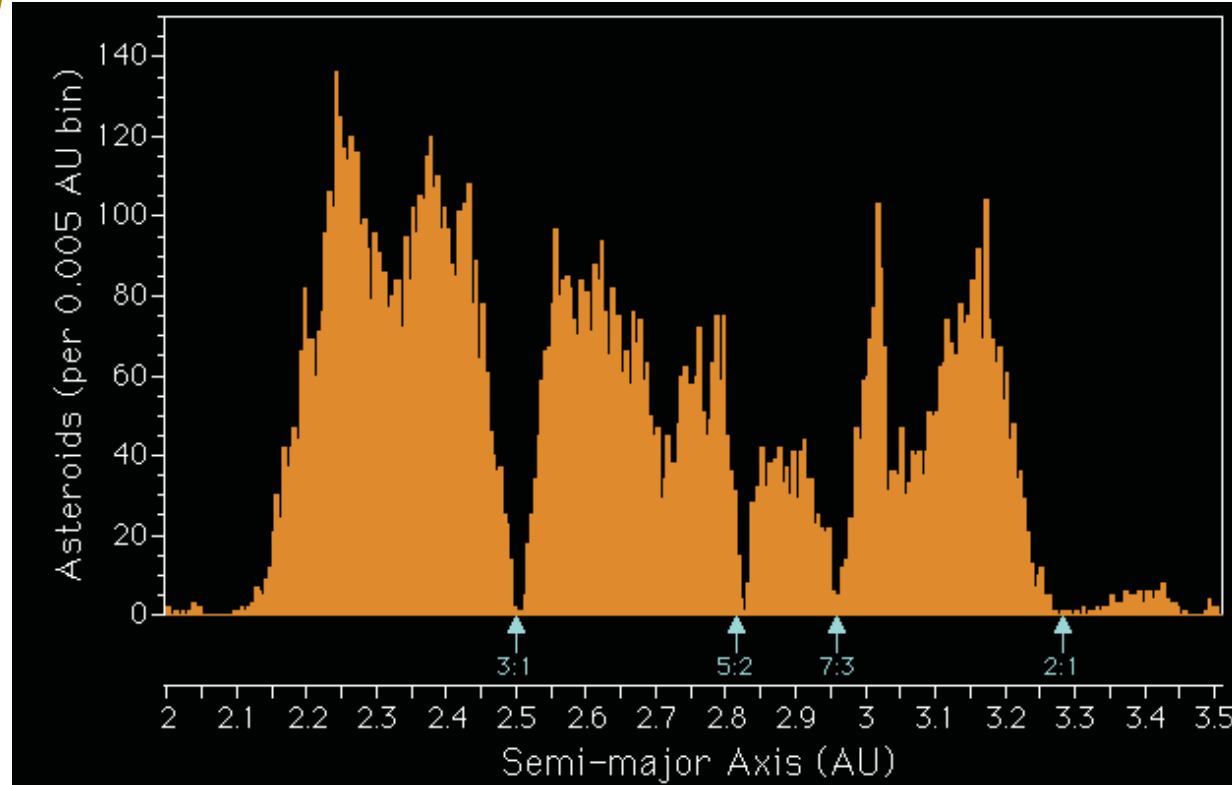
 ***Exemples ...***



Examples ...



🍏 🍏 🍏 *Exemples ...*



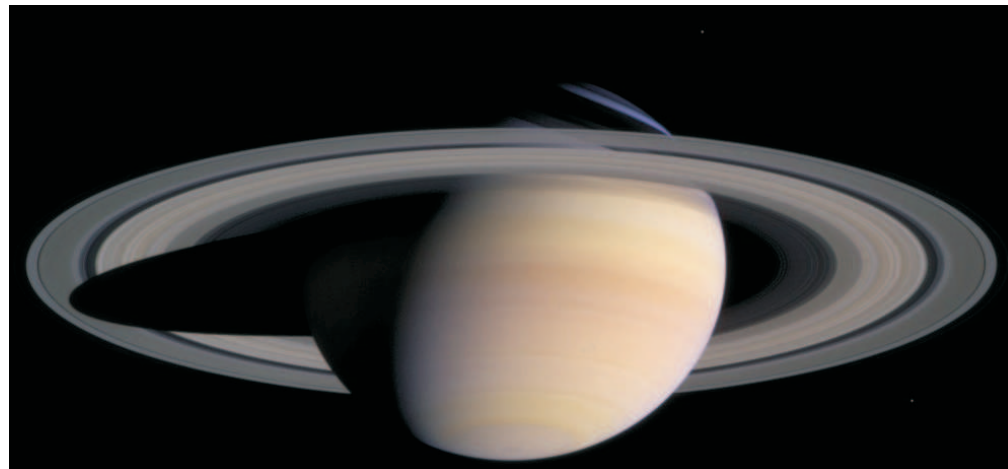
Division de Cassini, Mimas

$$T_m = 0.942 \text{ j}, a_m = 3.08$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste} = 0.03037$$

$$a_c = 1.95$$

$$T_c = \sqrt{\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_m} \times a_c^3$$
$$= 0.474 \simeq \frac{1}{2} T_m$$



 ***Effets de marée***

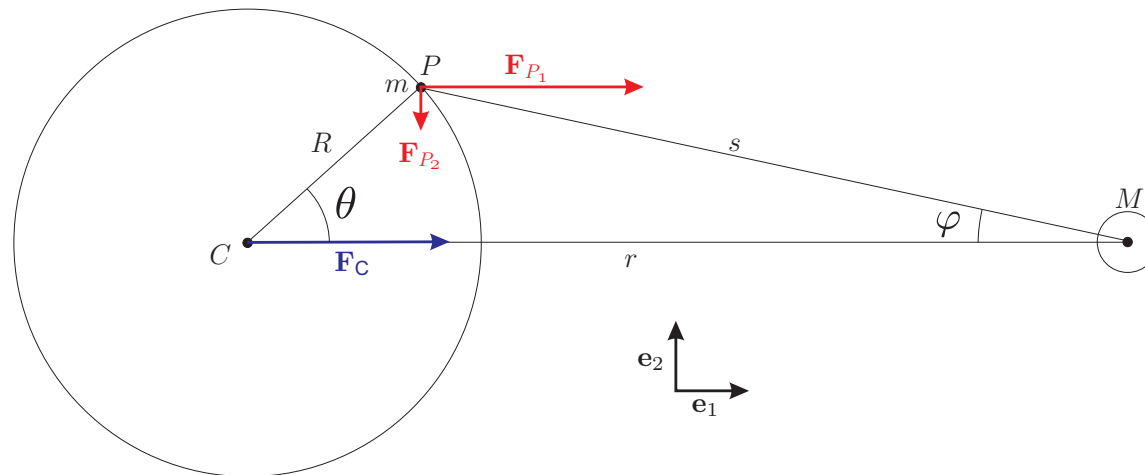
Effets de marée

Déformation des corps

🍏 🍏 🍏 Effets de marée

Déformation des corps

Action d'un corps de masse M sur un élément de masse m à la surface d'un corps de masse totale M_{\oplus} .

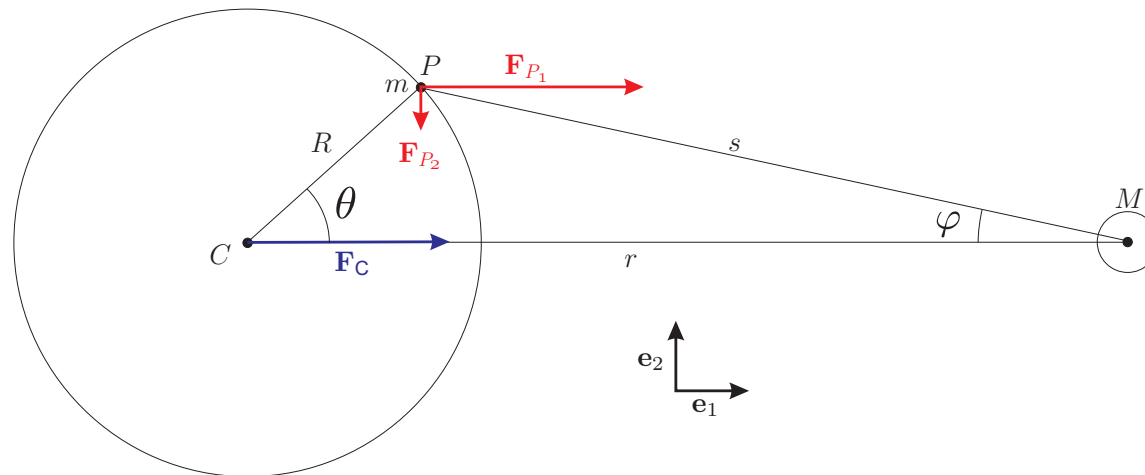


$$\mathbf{F}_C = G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{F}_P = G \frac{Mm}{s^2} (\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2)$$

🍏 🍏 🍏 Effets de marée

Déformation des corps

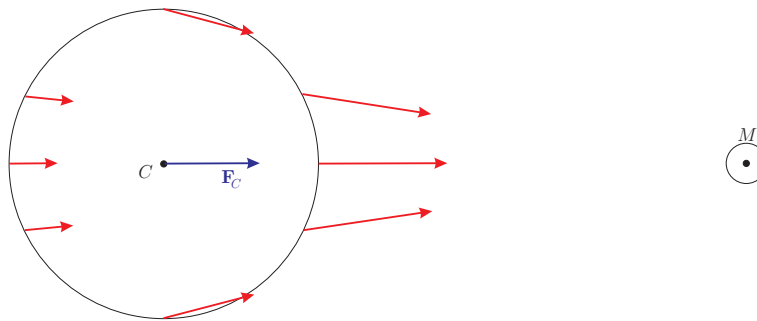
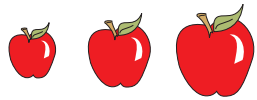
Action d'un corps de masse M sur un élément de masse m à la surface d'un corps de masse totale M_{\oplus} .



$$\mathbf{F}_C = G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{F}_P = G \frac{Mm}{s^2} (\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2)$$

$$s^2 = R^2 \sin^2 \theta + (r - R \cos \theta)^2 = r^2 [1 - y]$$

$$\text{avec } y = \rho (2 \cos \theta + \rho) \text{ et } \rho = R/r$$



Force différentielle de gravitation en P

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_P - \mathbf{F}_C = \frac{GMm}{r^2} \left[\left(\frac{\cos \varphi}{1-y} - 1 \right) \mathbf{e}_1 - \frac{\sin \varphi}{1-y} \sin \varphi \mathbf{e}_2 \right]$$

$$\cos \varphi = \frac{r - R \cos \theta}{s} = \frac{1 - \rho \cos \theta}{\sqrt{1-y}} \quad \sin \varphi = \frac{R \sin \theta}{s} = \frac{\rho}{\sqrt{1-y}}$$

si $\rho \ll 1$, ... $\Delta \mathbf{F} = \frac{GMm}{r^2} \rho [\delta_1(\rho, \theta) \mathbf{e}_1 + \delta_2(\rho, \theta) \mathbf{e}_2]$ avec

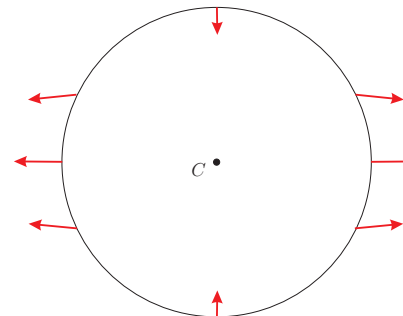
$$\delta_1(\rho, \theta) = 2 \cos \theta - \frac{3}{2} \rho (1 + 2 \cos \theta - 5 \cos^2 \theta) + \mathcal{O}(\rho)$$

$$\delta_2(\rho, \theta) = -\sin \theta - \frac{3}{2} \rho \sin 2\theta + \mathcal{O}(\rho)$$

δ_1 : paire en θ

δ_2 impaire en θ

→ Elongation de M_{\oplus}

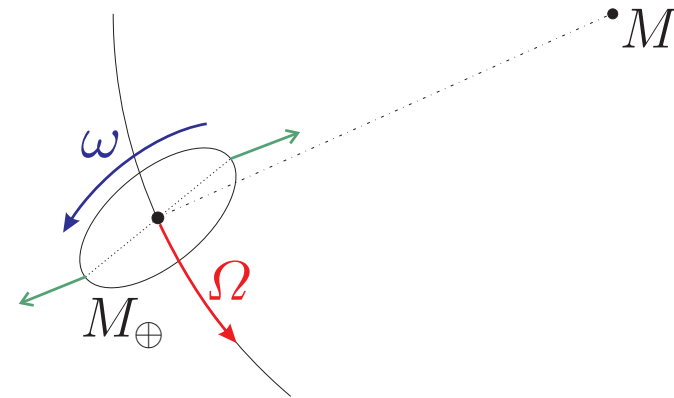


Synchronisation

🍏 🍏 🍏 *Synchronisation*

$\omega < \Omega$: couple accélérateur

$\omega > \Omega$: couple décélérateur

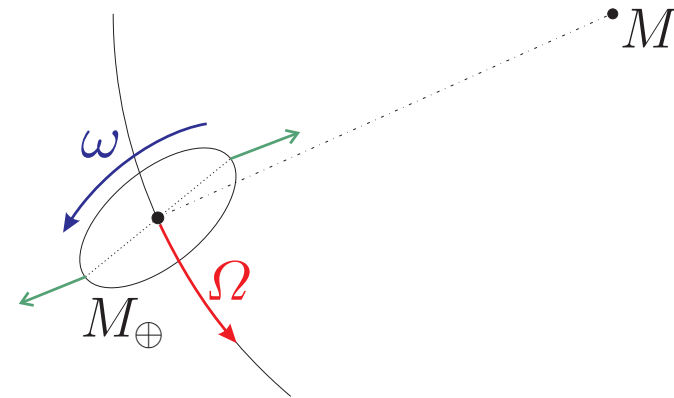


Effets de marée : En général, $\lim |\omega - \Omega| = 0$

🍏 🍏 🍏 Synchronisation

$\omega < \Omega$: couple accélérateur

$\omega > \Omega$: couple décélérateur



Effets de marée : En général, $\lim |\omega - \Omega| = 0$

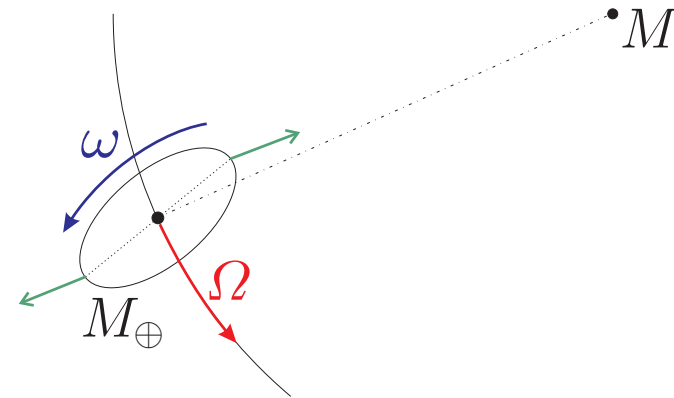
■ Terre → Lune : Effectif

■ Lune → Terre : 1 jour ↗ 2 ms/siècle (pas constant)

Relevés paléoclimatiques : Il y a $9 \cdot 10^8$ ans, il y avait 481 jours de 18 heures/an.

🍏 🍏 🍏 Synchronisation

- $\omega < \Omega$: couple accélérateur
- $\omega > \Omega$: couple décélérateur

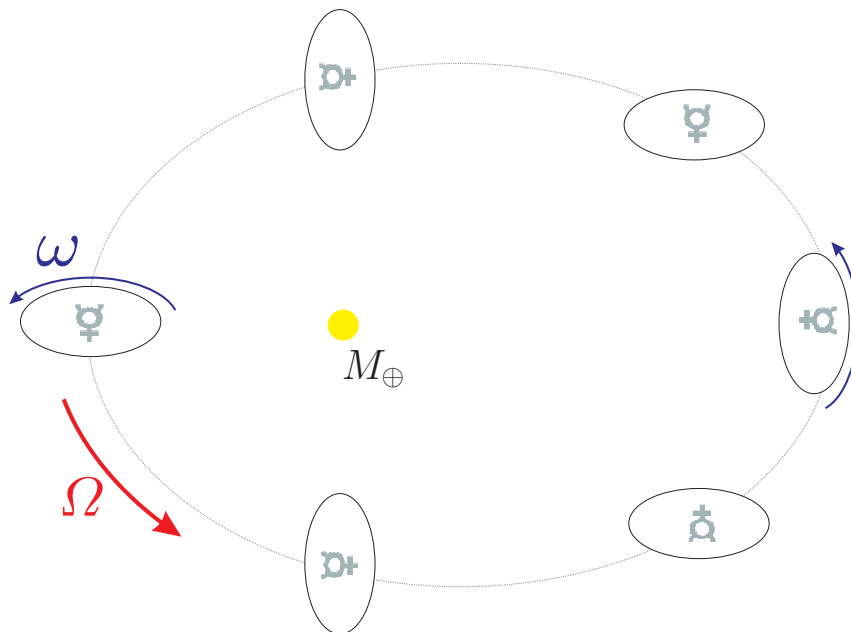


Effets de marée : En général, $\lim |\omega - \Omega| = 0$

- Terre → Lune : Effectif
- Lune → Terre : 1 jour ↗ 2 ms/siècle (pas constant)

Relevés paléoclimatiques : Il y a $9 \cdot 10^8$ ans, il y avait 481 jours de 18 heures/an.

Soleil → Mercure : Couplage Spin-Orbite (3 ans = 2 jours)



Hyp. : a et $e = \text{cste}$
 Goldreich & Peale, 1968
 Rambaux & Bois, 2003

Migration et circularisation

Effets de marée \implies Synchronisation

Moment cinétique $J = M_{\oplus}(\Omega^2 + \omega^2)r^2 = cste$

Si $\omega \nearrow$ alors $r \searrow$
Si $\omega \searrow$ alors $r \nearrow$ (Terre-Lune : $+4\text{ cm/an}$)

🍏 🍏 🍏 Migration et circularisation

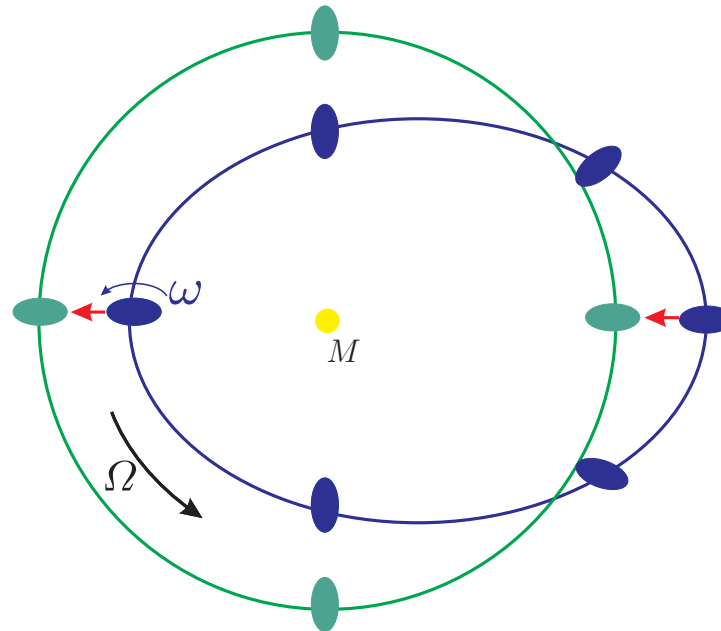
Effets de marée \implies Synchronisation

Moment cinétique $J = M_{\oplus}(\Omega^2 + \omega^2)r^2 = cste$

Si $\omega \nearrow$ alors $r \searrow$
 Si $\omega \searrow$ alors $r \nearrow$ (Terre-Lune : $+4\text{ cm/an}$)

Synchronisation = rapide (Hut, 1981)
 Si orbite excentrique ($e \neq 0, \Omega \neq cste$)

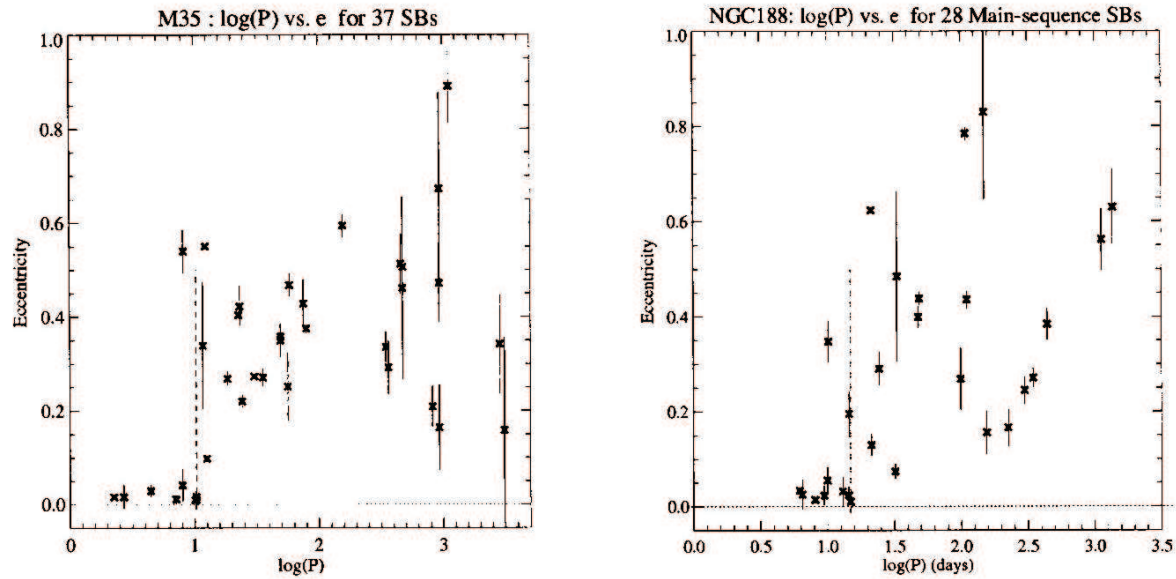
$v_p > v_a$
 $a \nearrow$ $a \searrow$
 Effet : $e \rightarrow 0$



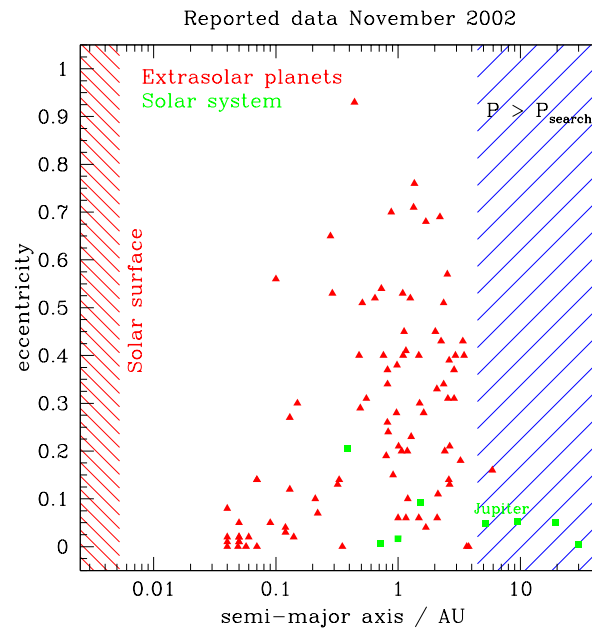
$T_{circ} \propto (R/r)^6$
 Zahn, 1966, Lecar et al, 1976

🍏 🍏 🍏 *Coupure = observée ...*

■ Binaires dans des amas (Meibom & Mathieu, *AstrophJ* 0303197)



■ Exoplanètes (catalogues...)



 ***Chauffage interne***

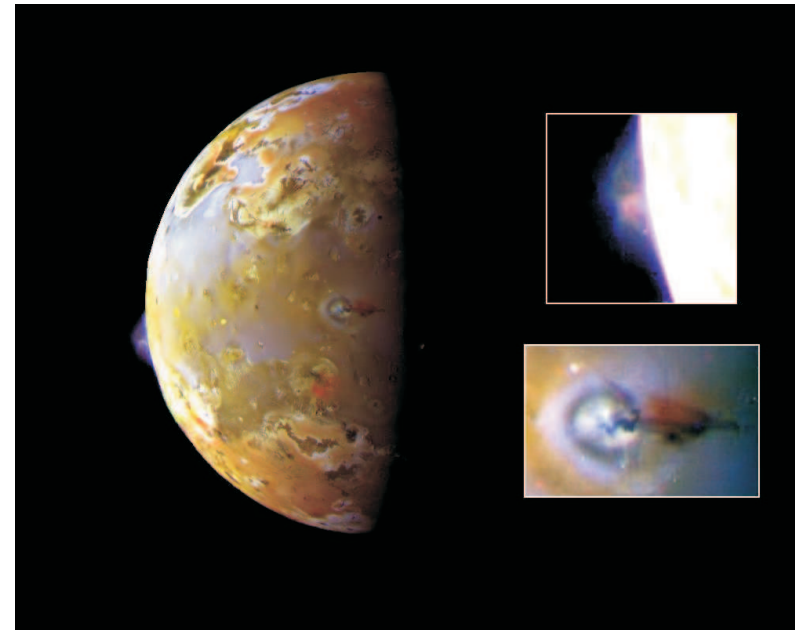
🍏 🍏 🍏 *Chauffage interne*

Volcanisme de Marées

Io

Peale & Cassen, 1979

Confirmation : Voyager II

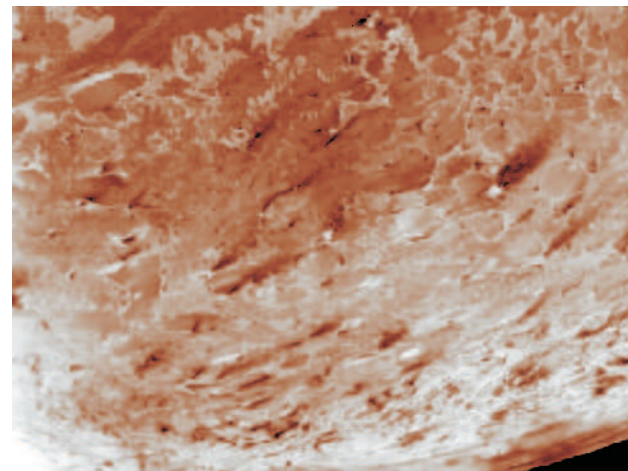


Triton

Geyser

(azote liquide)

Voyager II



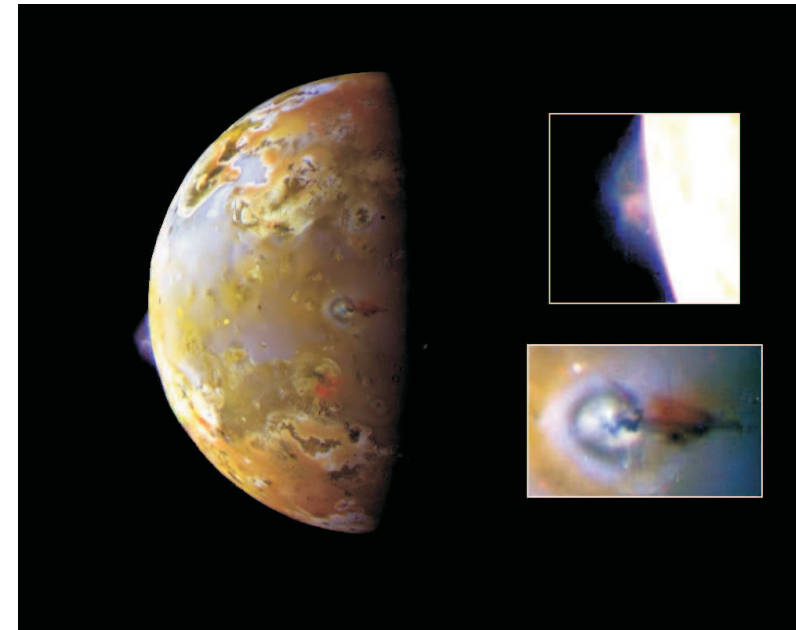
🍏 🍏 🍏 *Chauffage interne*

Volcanisme de Marées

Io

Peale & Cassen, 1979

Confirmation : Voyager II

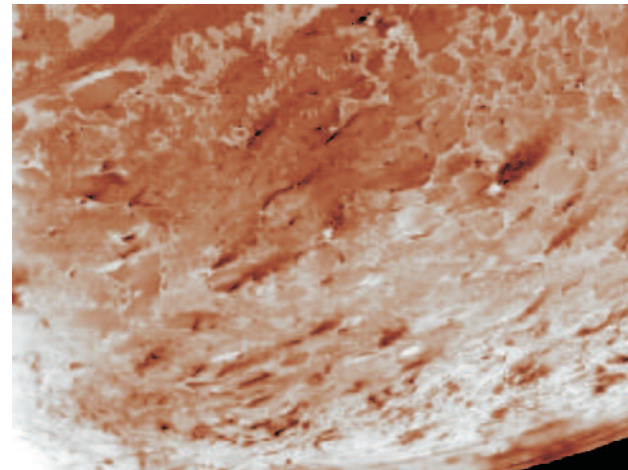


Triton

Geyser

(azote liquide)

Voyager II



Planètes extrasolaires

Pégasides : $e \approx 0$ très chaude)

⇒ Bodenheimer et al, 2001, Guillot & Showmann, 2002

 ***Limite de Roche***

Limite de Roche

P : Corps sphérique homogène, m_p, ρ_p .

S : Satellite de P , sphérique homogène, m_s, ρ_s , orbite circulaire à la distance r , spin ω .

Forces de marée \Rightarrow Etirement \Rightarrow Brisure ?

Limite de Roche

P : Corps sphérique homogène, m_p, ρ_p .

S : Satellite de P , sphérique homogène, m_s, ρ_s , orbite circulaire à la distance r , spin ω .

Forces de marée \Rightarrow Etirement \Rightarrow Brisure ?

■ Forces d'étirement: Marée : $2Gm_p r_s r^{-3}$, Centrifuge : $\omega^2 r_s$

■ Forces de cohésion : Auto-gravitation $Gm_s r_s^{-2}$

Condition d'existence du satellite : Etirement < Cohésion

$$2 \frac{Gm_p r_s}{r^3} + \omega^2 r_s < \frac{Gm_s}{r_s^2}$$

Limite de Roche

P : Corps sphérique homogène, m_p, ρ_p .

S : Satellite de P , sphérique homogène, m_s, ρ_s , orbite circulaire à la distance r , spin ω .

Forces de marée \Rightarrow Etirement \Rightarrow Brisure ?

■ Forces d'étirement: Marée : $2Gm_p r_s r^{-3}$, Centrifuge : $\omega^2 r_s$

■ Forces de cohésion : Auto-gravitation $Gm_s r_s^{-2}$

Condition d'existence du satellite : Etirement < Cohésion

$$2 \frac{Gm_p r_s}{r^3} + \omega^2 r_s < \frac{Gm_s}{r_s^2}$$

Hypothèse : rotation synchrone de la révolution (marées, Kepler)

$$\omega^2 = \frac{Gm_p}{r^3} \quad \text{Condition} : r > \left(3 \frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{1}{3}} r_s = \left(3 \frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{3}} r_p$$

Cas général : Non homogène, non sphérique, orbite d'exentricité e ...

$$r > \kappa \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{\frac{1}{3}} r_p \quad \kappa \in [1, 3]$$

... Anneaux de Saturne ...



Références

- **Goldreich P. & Peale J.**, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, **6**, 287, 1968
- **Rambaux G. & Bois E.**, Astronomy and Astrophysics , astroph0306387, 2003
- **Hut P.** ,Astronomy and Astrophysics, **99**, 126, 1981
- **Zahn J.P.**,Annales d'Astrophysique., **29**, 313, 1966
- **Lecar S. et al**,The Astrophysical Journal, **205**, 556, 1976
- **Bodenheimer et al**,The Astrophysical Journal, **548**, 466, 2001
- **Guillot T. & Showmann**,Astronomy and Astrophysics, **99**, 126, 2002
- **Peale&Cassen**,Science, **203**, 892, 1979