Gravitation statistique

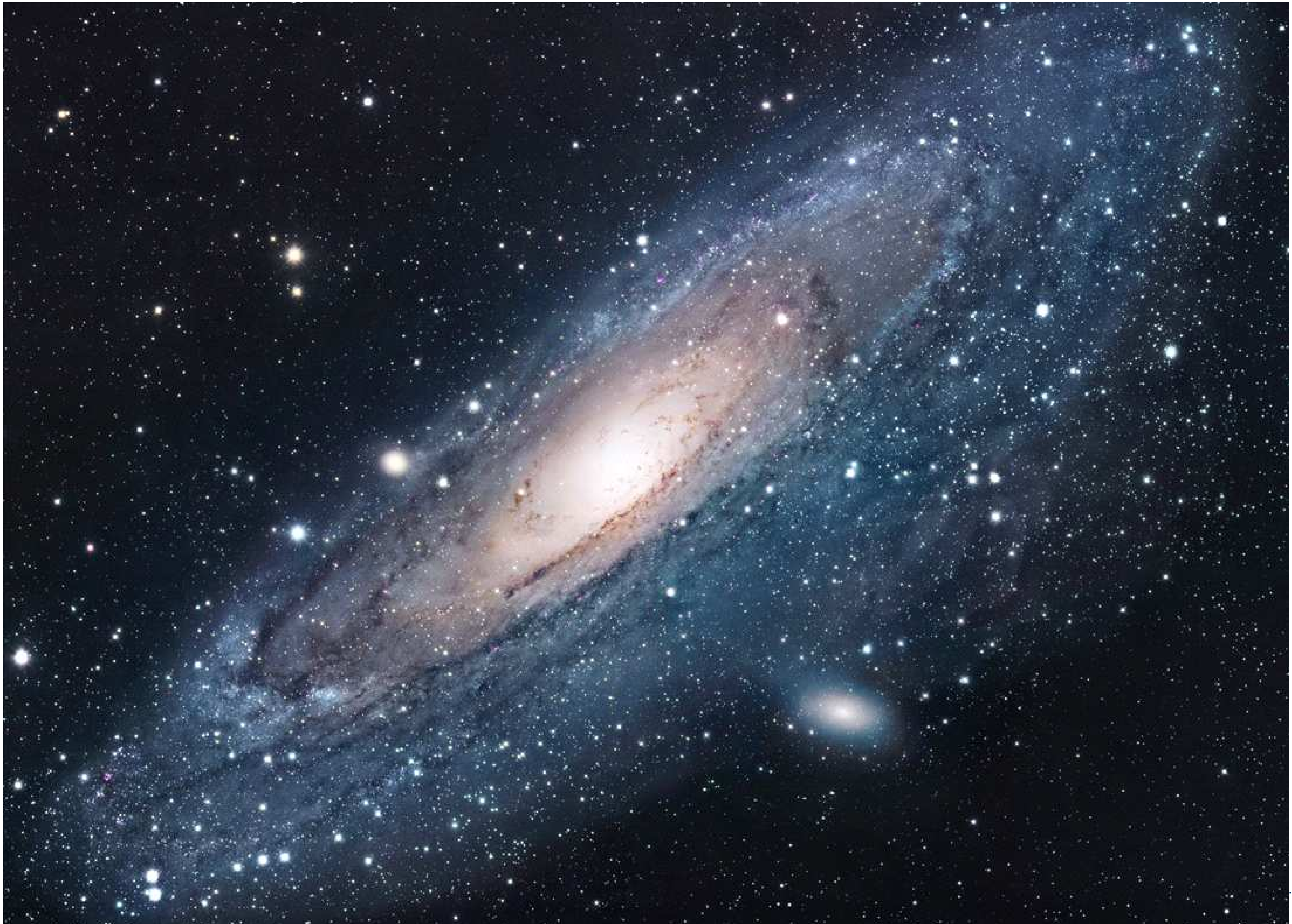
Gravitation statistique

Gravitation statistique

Gravitation statistique

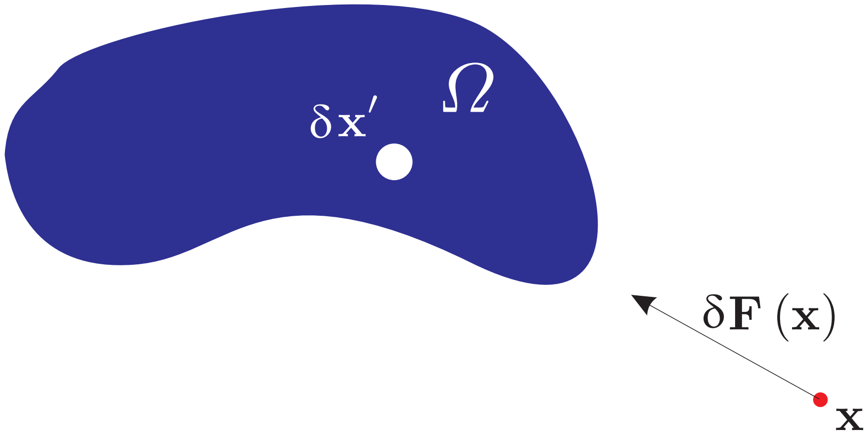
Gravitation statistique

Gravitation statistique



Nature de la gravitation

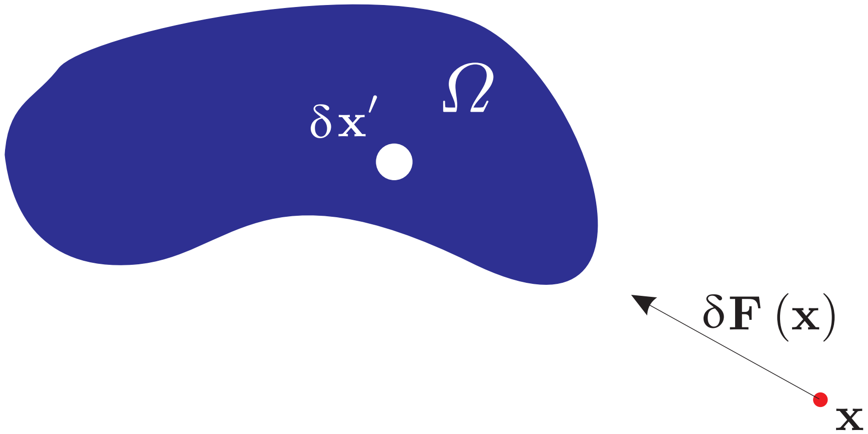
Nature de la gravitation



Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

Nature de la gravitation

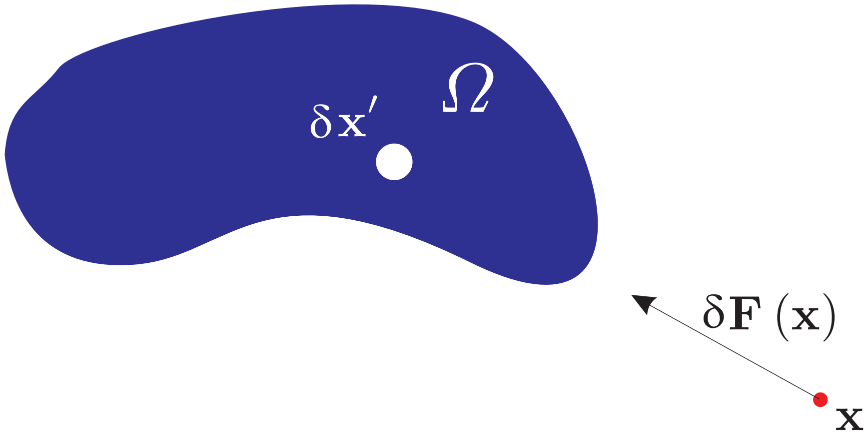


Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

$$\delta \mathbf{F} = -G \, \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; \delta^3 \mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; d^3 \mathbf{x}'$$

Nature de la gravitation



Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho\left(\mathbf{x}'\right) & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

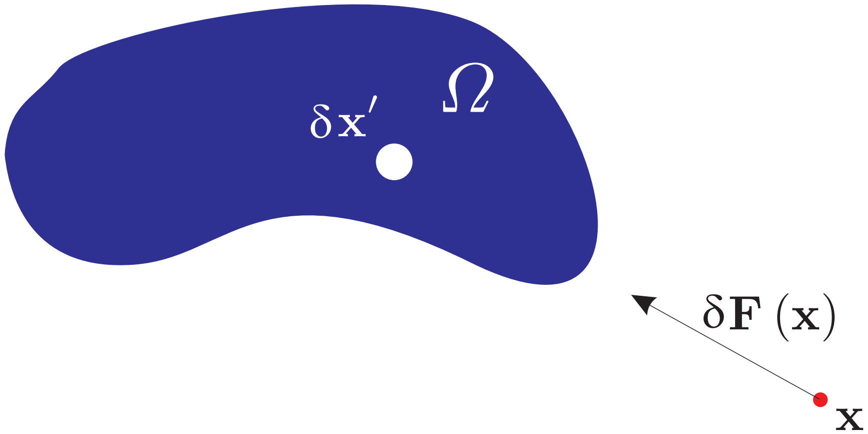
$$\delta\mathbf{F} = -G\,\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right|^3}\,\rho\left(\mathbf{x}'\right)\,\delta^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G\int\frac{\mathbf{x}'-\mathbf{x}}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right|^3}\,\rho\left(\mathbf{x}'\right)\,d^3\mathbf{x}'$$

Potentiel gravitationnel

$$\psi\left(\mathbf{x}\right) = -G\int\frac{\rho\left(\mathbf{x}'\right)}{\left|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right|}\,d^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla\psi$$

$$\boxed{\psi\left(\mathbf{x}\right) = -G\rho\left(\mathbf{x}\right) * \frac{1}{\left|\mathbf{x}\right|} = S_3 G\rho\left(\mathbf{x}\right) * g_{\Delta_3}\left(\mathbf{x}\right)}$$

Nature de la gravitation



Densité de masse

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

$$\delta \mathbf{F} = -G \, \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; \delta^3 \mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; d^3 \mathbf{x}'$$

Potentiel gravitationnel

$$\psi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \; d^3 \mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla \psi$$

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = -G \rho(\mathbf{x}) * \frac{1}{|\mathbf{x}|} = S_3 G \rho(\mathbf{x}) * g_{\Delta_3}(\mathbf{x})}$$

La gravitation est une propriété de l'espace ...

Équation de Poisson

Équation de Poisson

On part de la définition du potentiel gravitationnel

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = S_3 G\, \rho\left(\mathbf{r}\right) * g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right) \qquad S_3 = 4\pi$$

Équation de Poisson

On part de la définition du potentiel gravitationnel

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = S_3 G\, \rho\left(\mathbf{r}\right) * g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right) \qquad S_3 = 4\pi$$

le laplacien s'impose ....

$$\left(\Delta_3 \psi(\mathbf{r}, t), \varphi\right) = S_3 G\ \left(\rho\left(\mathbf{r}\right) * \Delta_3 g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right), \varphi\right) \qquad \varphi \in \mathbb{S}'$$

Équation de Poisson

On part de la définition du potentiel gravitationnel

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = S_3 G\ \rho\left(\mathbf{r}\right) * g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right) \qquad S_3 = 4\pi$$

le laplacien s'impose ....

$$\left(\Delta_3 \psi(\mathbf{r}, t), \varphi\right) = S_3 G\ \left(\rho\left(\mathbf{r}\right) * \Delta_3 g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right), \varphi\right) \qquad \varphi \in \mathbb{S}'$$

soit

$$\left(\Delta_3 \psi(\mathbf{r}, t), \varphi\right) = S_3 G\ \left(\rho\left(\mathbf{r}\right) * \delta_3\left(\mathbf{r}\right), \varphi\right)$$

Équation de Poisson

On part de la définition du potentiel gravitationnel

$$\psi\left(\mathbf{r}\right) = S_3 G\ \rho\left(\mathbf{r}\right) * g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right) \qquad S_3 = 4\pi$$

le laplacien s'impose ....

$$(\Delta_3 \psi(\mathbf{r}, t), \varphi) = S_3 G\ \left(\rho\left(\mathbf{r}\right) * \Delta_3 g_{\Delta_3}\left(\mathbf{r}\right), \varphi\right) \qquad \varphi \in \mathbb{S}'$$

soit

$$(\Delta_3 \psi(\mathbf{r}, t), \varphi) = S_3 G\ \left(\rho\left(\mathbf{r}\right) * \delta_3\left(\mathbf{r}\right), \varphi\right)$$

le Dirac étant l'élément neutre de l'algèbre de convolution, nous obtenons finalement l'équation de Poisson

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}, t)$$

Equation de Vlasov

Système de N $(\to \infty)$ particules,

Chaque particule $1 \leq \alpha \leq N$ est repérée par $w_\alpha(t) = [\mathbf{r}_\alpha(t), \mathbf{p}_\alpha(t)]^T$,

Espace de configuration :

$$E = \left\{ \forall\alpha, \forall t \qquad [\mathbf{r}_\alpha(t), \mathbf{p}_\alpha(t)]^T \right\}$$

Densité de probabilité de présence dans E à l'instant t

$$1 = \int f^{(N)}(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_N, t) \;\; d\mathbf{w}_1 ... d\mathbf{w}_N$$

Conservation du nombre de particules : Equation de continuité

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \text{div}\left(f^{(N)}\dot{\mathbf{w}}\right) = 0$$

$$\dot{\mathbf{w}} = [\dot{\mathbf{w}}_1, ..., \dot{\mathbf{w}}_N]^T = \left[\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} ..., \frac{d\mathbf{r}_N}{dt}, \frac{d\mathbf{p}_N}{dt}\right]^T$$

c'est à dire

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left[\frac{\partial\left(f^{(N)}\dot{\mathbf{r}}_\alpha\right)}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{\partial\left(f^{(N)}\dot{\mathbf{p}}_\alpha\right)}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right] \;=\; 0$$

le Hamiltonien H du système est

$$H = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_\alpha}}_{\text{E}_c} + \underbrace{\sum_{\alpha\neq\beta}^{N} -G\frac{m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}}_{\text{E}_p}$$

Les équations de Hamilton s'écrivent donc :

$$\forall\, 1 \leq \alpha \leq N \qquad \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} \\ \dot{\mathbf{p}}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_\alpha} = -\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha}\left(\sum_{\alpha\neq\beta}^{N} -\frac{G m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha}.\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha}.\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha}\right\} + f^{(N)}\sum_{\alpha=1}^{N}\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{r}_\alpha \partial \mathbf{p}_\alpha} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}_\alpha \partial \mathbf{r}_\alpha}\right\} = 0$$

l'équation de continuité conduit donc à une équation de Liouville

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right\} = 0 \tag{1}$$

dérivée par Gibbs en 1884, 2 ans après la mort de Liouville

$f^{(N)}$: Ingérable ...
on introduit les densités à 1 variables (lois marginales)

$$f^{(1)} = f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) = \int \cdots \int f^{(N)} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

on intègre Liouville sur $w_2 \cdots w_N$,

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} \quad + \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \int \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\}$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \int \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} = 0$$

on peut alors intégrer sur $r_2 \cdots r_N$, la condition aux bornes

$$\lim_{\mathbf{r}_\alpha \to \infty} f^{(N)} = 0$$

permet de "liquider" la plupart des produits scalaires

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \int \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} = \int \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

$$= \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} . \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int f^{(N)} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

$$= \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} . \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1}$$

pour les mêmes raisons mais en vitesse ...

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \left\{ \int \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} = \int \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}_1} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

de Liouville il ne reste alors plus que

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} . \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} - \int \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}_1} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = 0$$

$\boxed{\text{H}}$ Les particules (étoiles) sont inscernables (Grexons ...)

On pose

$$\psi_1 = \psi_1\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\right) = \sum_{\beta \neq 1}^{N} \psi_{1\beta}$$

où $$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}\left(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta\right) := -\frac{G m_\alpha m_\beta}{\left|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta\right|}$$

ainsi

$$\int \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}_1} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = \sum_{\beta \neq 1}^{N} \left\{ \int \frac{\partial \psi_{1\beta}}{\partial \mathbf{r}_1} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\}$$

$$= (N-1) \int \frac{\partial \psi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} . \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

on introduit alors la densité marginale à 2 particules

$$f^{(2)} = f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = \int \cdots \int f^{(N)} d\mathbf{w}_3 \cdots d\mathbf{w}_N$$

ψ_{12} ne dépend que de $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ on peut finir donc l'intégration du potentiel, ...

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1}.\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} = (N-1)\int \frac{\partial \psi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1}.\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \tag{2}$$

Cette équation traduit la variation de $f^{(1)}$ connaissant $f^{(2)}$, en poursuivant on obtient

$$f^{(1)} \hookleftarrow f^{(2)} \hookleftarrow ... \hookleftarrow f^{(N)}$$

Hierarchie BBGKY Born,Bogoliubov,Green, Kirkwood,Yvon

$1935 \leftrightarrow 1942$

Faire des hypothèses pour stopper la hierarchie, i.e. trouver $\boxed{\text{H}}$ tel que

$$\exists p < N, \forall n > p \qquad f^{(n)} = 0$$

$\boxed{\text{H}}$ Hypothèse de chaos moléculaire (Boltzmann)

$$f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) f^{(1)}(\mathbf{w}_2, t) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)$$

$g(w_1, w_2, t)$: Fonction de corrélation à 2 particules. Les particules étant indiscernables on pose

$$f\,(\mathbf{w}, t) = N\, f^{(1)}(\mathbf{w}, t) \qquad \text{ainsi} \qquad \int f\,(\mathbf{w}, t)\, d\mathbf{w} = N$$

La version intégrée (2) de l'équation de Liouville s'écrit donc

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\right)}{N}=(N-1)\int \frac{\partial \psi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1}.\frac{\partial\left(\frac{f(\mathbf{w}_1,t)}{N}\frac{f(\mathbf{w}_2,t)}{N}+g\right)}{\partial \mathbf{p}_1}d\mathbf{w}_2$$

soit
$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}= \frac{(N-1)}{N}\frac{\partial f(\mathbf{w}_1,t)}{\partial \mathbf{p}_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1}\int \psi_{12} f(\mathbf{w}_2,t)\,d\mathbf{w}_2$$

$$+N(N-1)\int \frac{\partial \psi_{12}}{\partial \mathbf{r}_1}.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_1}d\mathbf{w}_2$$

un petit rappel,
$$\int \psi_{12} f(\mathbf{w}_2,t)\,d\mathbf{w}_2 = -Gm^2\int \frac{f(\mathbf{w}_2,t)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

$$\left(\rho(\mathbf{r},t)=m\int f(\mathbf{w},t)\,d\mathbf{p}\right) = -G\int \frac{\rho(\mathbf{r}_2,t)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}d\mathbf{r}_2$$

$$= -G\rho(\mathbf{r}_1,t) * \frac{1}{|\mathbf{r}_1|} = \psi(\mathbf{r}_1,t)$$

en prenant $N-1\approx N$ on obtient finalement (Equation de Boltzmann)

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}-\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}}=N^2 GC(\mathbf{w},t) \qquad (3)$$

Terme de corrélation $C\left(\mathbf{w},t\right)=\int\frac{\partial g\left(\mathbf{w},\mathbf{w}_2,t\right)}{\partial\mathbf{p}}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_2}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2\right|^3}d\mathbf{w}_2$

Systèmes gravitationnels : collisions = dynamiquement inefficace pendant de longues périodes. Chandrasekhar(1941) : $T_{rc}\approx N\,T_d\,/\,\ln\left(N\right)$. Sur une centaine de temps dynamiques (T_d), les amas globulaires et galaxies en tous genres sont dits non collisionnels, i.e. $C\left(\mathbf{w},t\right)\equiv 0$

Boltzmann $\Rightarrow$ Vlasov : $\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{r}}-\frac{\partial f}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}=0$

Dynamique des systèmes autogravitants : Système de Vlasov-Poisson

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{r}}-\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}=0\\ \psi(\mathbf{r},t)=\ -Gm\int\frac{f(\mathbf{r}',\mathbf{p},t)}{\mid\mathbf{r}-\mathbf{r}'\mid}d^3\mathbf{r}'d^3\mathbf{p}\end{array}\right.$$

... énergie moyenne par particule $E=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\psi$, ...

$$\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial f}{\partial t}=\{\,E\,,\,f\,\} & \text{Vlasov : Dynamique}\\ \Delta\psi=\ 4\pi G\rho & \text{Poisson : Champ}\end{array}\right.$$

Théorème du viriel classique

N particules de masses m_i sans liaisons internes, positions instantannées $r_1, ..., r_N$.

Energie cinétique $T\left(\dot{\mathbf{r}}_1, ..., \dot{\mathbf{r}}_N\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \Rightarrow$ fonction homogène de degré 2,

en effet pour tout réel λ on a

$$T\left(\lambda\dot{\mathbf{r}}_1, ..., \lambda\dot{\mathbf{r}}_N\right) = \lambda^2 T\left(\dot{\mathbf{r}}_1, ..., \dot{\mathbf{r}}_N\right)$$

Théorème d'Euler des fonction homogènes :

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \, \mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{r}}_i} T = 2T \tag{4}$$

$\boxed{\text{H}}$ Energie potentielle $U = U\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\right) \;\Rightarrow\; \mathbf{p}_i := \mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{r}}_i} \mathcal{L} = \mathrm{grad}_{\dot{\mathbf{r}}_i} T$
la relation (4) donne donc

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{r}}_i \, \mathbf{p}_i = 2T \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \, \mathbf{p}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \, \mathbf{r}_i = 2T \tag{5}$$

Valeur moyenne temporelle

$$\overline{\varphi} := \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \varphi \, dt$$

Pour l'énergie cinétique, il vient

$$2\overline{T} = \overline{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \, \mathbf{p}_i\right)} - \overline{\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \, \mathbf{r}_i}$$

système à support compact : valeur moyenne temporelle du terme dérivé $\equiv 0$, ainsi

$$2\overline{T} = -\overline{\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i \, \mathbf{r}_i} \tag{6}$$

$\Rightarrow$ deuxième équation de Hamilton $\dot{\mathbf{p}}_i = -\mathrm{grad}_{\mathbf{r}_i} U$

$$2\overline{T} = \overline{\sum_{i=1}^{3N} \mathbf{r}_i \, \mathrm{grad}_{\mathbf{r}_i} U}$$

$\boxed{\text{H}}$ U est homogène de degré $\alpha \quad \Rightarrow \quad 2\overline{T} = \alpha \overline{U}$

Théorème du viriel : relation entre les valeurs moyennes temporelles des énergies cinétique et potentielle si cette dernière est homogène ...

$$\mathrm{Gravitation3D} \quad : \quad U\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\right) = -\sum_{i \neq j}^{N} \frac{G m_i m_j}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|}$$

Energie potentielle homogène de degré -1

$$U\left(\alpha \mathbf{r}_1, ..., \alpha \mathbf{r}_N\right) = -\sum_{i \neq j}^{N} \frac{G m_i}{\alpha \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|} = \alpha^{-1} U\left(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N\right)$$

$\Rightarrow$ le théorème du viriel stipule donc que

$$\boxed{2\overline{T} + \overline{U} = 0}$$

Gravitation uniforme : $\alpha = 1$

Potentiel harmonique : $\alpha = 2$

...

Théorème du viriel statistique

1) établir des moyennes sur les vitesses de l'équation de Vlasov, on intoduit pour celà les quantités moyennes suivantes

Fonctions des variables $\mathbf{r}$ et t

- Densité spatiale $$\nu(\mathbf{r},t) = \int f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\, d^3\mathbf{p} \qquad \rho = m\nu$$
- Champ de vitesse $$\overline{\mathbf{v}}\,(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\nu}\int \mathbf{v} f\,(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\, d^3\mathbf{p} \qquad \overline{\mathbf{p}} = m\overline{\mathbf{v}}$$

Tenseurs à composantes fonctionnelles

- Tenseur de température cinétique

$$\overline{p_i p_j}\,(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\nu}\int p_i p_j\, f\, d^3\mathbf{p}$$

- Tenseur de variance-covariance cinétique

$$\sigma_{ij}^2\,(\mathbf{r},t) = \overline{p_i p_j} - \overline{p_i}\,\overline{p_j}$$

- Tenseur de pression cinétique

$$\mathbf{P}_{ij}\,(\mathbf{r},t) = \frac{\nu}{m^2}\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{m^2}\left(\int p_i p_j\, f\, d^3\mathbf{p} - \int p_i\, f\, d^3\mathbf{p} \int p_j\, f\, d^3\mathbf{p}\right)$$

Tenseurs à composantes scalaires

- Tenseur cinétique : Il est composé de deux parties

$$\mathbf{C}_{ij} := \frac{1}{2m}\int \nu\,\overline{p_i}\,\overline{p_j}\,d^3\mathbf{r} \qquad \textbf{et} \qquad \mathbf{K}_{ij} := \frac{1}{m}\int \nu\sigma_{ij}^2\,d^3\mathbf{r}$$

on a alors

$$\mathbf{T}_{jk} := \mathbf{C}_{jk} + \frac{1}{2}\mathbf{K}_{jk} \qquad \text{tel que} \qquad \mathrm{Tr}\left(\mathbf{T}_{jk}\right) = T$$

- Tenseur potentiel

$$\mathbf{U}_{ij} := -\int \rho r_j \frac{\partial\psi}{\partial r_i} d^3\mathbf{r} \qquad \text{tel que} \qquad \mathrm{Tr}\left(\mathbf{U}_{jk}\right) = U$$

- Tenseur d'inertie

$$\mathbf{I}_{ij} := \frac{1}{m}\int \nu\, r_i r_j d^3\mathbf{r}$$

2)dériver les équations de la gravito-hydrodynamique $(Jeans, 1924)$

$$\left[\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial r_i} \left(\rho \overline{v_i}\right) = 0 & (a) \\[2em]
\dfrac{\partial}{\partial t} \left(\rho \overline{v_j}\right) + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial r_i} \left(\rho\, \overline{v_i v_j}\right) + \dfrac{\rho}{m} \dfrac{\partial \psi}{\partial r_j} = 0 & (b) \\[2em]
\dfrac{\partial \overline{v_j}}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \overline{v_i} \dfrac{\partial \overline{v_j}}{\partial r_i} = -\dfrac{1}{m^2 \rho} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial r_i} \left(\rho \sigma_{ij}^2\right) - \dfrac{1}{m} \dfrac{\partial \psi}{\partial r_j} & (c) \\[2em]
\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial r_i^2} = 4\pi G \rho & (d)
\end{array}\right.$$

r_i : Coordonnées cartésiennes de $\mathbf{r}$

Détails du calcul (Voir poly ...)

(a) $\int$(Vlasov)$d\mathbf{p}$

(b) $\int$(Vlasov)$p_j d\mathbf{p}$

(c) $(a) - \overline{p_j}\,(b)$

(d) Poisson

Un nouveau calcul, dont le point de départ est l'intégrale

$$\int (c)\, r_k d\mathbf{r}$$

permet d'obtenir la relation

$$\boxed{\frac{1}{2} m \frac{d^2 \mathbf{I}_{jk}}{dt^2} = \mathbf{U}_{jk} + 2\mathbf{C}_{jk} + \mathbf{K}_{jk}}$$

qui constitue le théorème du viriel tensoriel, dont la trace permet d'obtenir le théorème du viriel scalaire

$$\frac{1}{2} m \frac{d^2}{dt^2} \mathrm{Tr}\left(\mathbf{I}_{jk}\right) = U + 2T$$

dans le cas d'un système à l'équilibre on retrouve le résultat classique ...

Relations fondamentales en Astrophysique
Calculs de masses, vitesses,
masse/luminosité, rotation, etc ....