Le choix de l'équilibre

Jérôme Perez

Le potentiel képlerien

Il s'agit à la fois du plus simple et du plus célèbre potentiel gravitationnel ...

$$\psi\left(r\right) = -\frac{GM}{r}$$

Il correspond à la densité d'une masse ponctuelle située en l'origine $r = 0$, et donc de la forme

$$\rho\left(r\right) = M\delta\left(r\right)$$

C'est le potentiel du problème des deux corps !

Le potentiel homogène

Un système sphérique homogène possède une densité de masse constante dans une boule et nulle ailleurs, soit

$$\rho\left(r\right) = \begin{cases} \rho_o & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Potentiel : Equation de Poisson

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right) = 4\pi G\rho = \begin{cases} 4\pi G\rho_o & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

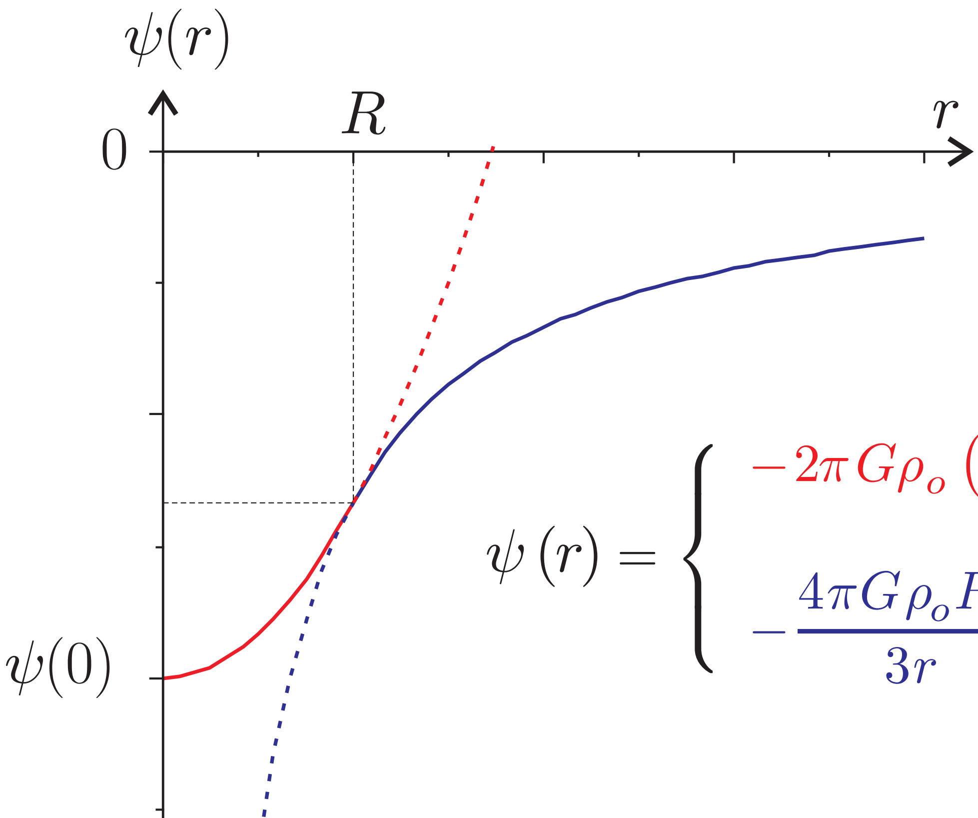
Equation homogène : 2 solutions évidentes $\psi_0^1\left(r\right) = 1$ et $\psi_0^2\left(r\right) = 1/r$.
Solution particulière avec second membre $\tilde{\psi}\left(r\right) = 2\pi G\rho_o r^2$

$$\psi = \begin{cases} A\psi_0^1 + B\psi_0^2 + \tilde{\psi} & \text{si } r \leq R \\ \\ C\psi_0^1 + D\psi_0^2 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Le potentiel homogène

Conditions aux limites du problèmes :

- $\psi(r)$ et $\psi'(r)$ sont continues en $r = R$;
- $\psi'(0) = 0$ système sphérique: la force qu'il crée en son centre est nulle;
- système est isolé $\lim\limits_{r \to +\infty} \psi(r) = 0$.



$$\psi(r) = \begin{cases} -2\pi G \rho_o \left(R^2 - \frac{1}{3} r^2\right) & \text{si } r \leq R \\ -\dfrac{4\pi G \rho_o R^3}{3r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Lois de puissances : Modèles (α, β, γ)

Densité

$$\rho\left(r\right) = \frac{\rho_s \; 2^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\gamma}\left(1+\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}}$$

$r^{-\gamma}$ dans la région centrale

transition en $r \approx r_s$

$r^{-\beta}$ dans la région externe

ρ_s : valeur de la densité en $r = r_s$

α : paramètre de contrôle de la transition entre les deux régions internes et externes

Masse

$$M\left(r\right) = 4\pi\rho_s \; 2^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}} \int_0^r x^2 \left(\frac{x}{r_s}\right)^{-\gamma}\left(1+\left(\frac{x}{r_s}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha}} dx$$

Condition pour avoir une masse finie

$$\begin{cases} \gamma < 3 & \text{pour la convergence en } r = 0 \\ \beta > 3 & \text{pour la convergence en } r \to +\infty \end{cases}$$

Potentiel ... uniquement sur rendez-vous !

Le modèle d'Hernquist : $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 1)$

Entièrement analytique ... ou presque, [Hernquist] :

$$\psi(r) = -\frac{GM}{a}\frac{1}{1+\frac{r}{a}}$$

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi a^2}\frac{1}{r\left(1+\frac{r}{a}\right)^3}, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 1) \text{ avec } r_s = a \text{ et } \rho_s = \frac{M}{16\pi a^3}$$

Masse

$$M(r) = M\frac{r^2}{(r+a)^2} \qquad \text{notons que } M(a) = \frac{M}{4}$$

En notant $\psi_o = \psi(0) < 0$, on remarque

$$\rho(r) = \rho(\psi) = -\frac{M}{2\pi a^3}\frac{\left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^4}{1-\frac{\psi}{\psi_o}}$$

on pourrait même calculer la fonction de distribution ...

Le modèle de Jaffe $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 2)$

[Jaffe]
Potentiel

$$\psi_j\left(r\right) = \frac{GM}{r_j} \ln\left(\frac{r}{r + r_j}\right)$$

Densité

$$\rho_j\left(r\right) = \frac{M}{4\pi r_j^3} \frac{r_j^2}{r^2\left(1 + \frac{r}{r_j}\right)^2} \;\;, \;(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 2)\;, \;r_s = r_j \;\text{ et } \rho_s = \frac{M}{16\pi r_j^3}$$

Masse

$$M\left(r\right) = M \times \frac{r}{r + r_j}$$

Idée : ajustement de profil de luminosité de galaxies ($R^{1/4}$) ...

Plummer $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 5, 0)$

Cas exceptionnel : Potentiel

$$\psi(r) = -\frac{GM}{b} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}}}$$

Densité

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{5/2}} \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (2, 5, 0)\text{ , } r_s = b \text{ et } \rho_s = \frac{3M}{16\sqrt{2}\pi b^3}$$

Masse

$$M(r) = M \frac{r^3}{(b^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{notons que } M(b) = \frac{M}{2\sqrt{2}}$$

On remarque que

$$\rho(r) = \rho(\psi) = \rho_o \left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^5 \quad 5 \hookrightarrow n \text{ : Polytropes}$$

Polytropes

Equation d'équilibre hydrostatique $\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$. Si $\rho = \rho\left(\psi\right) = \rho_o \left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^n$

$$P = P_o + \frac{\left|\psi_o\right| \rho_o}{n+1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\Gamma - 1\right] \quad \text{avec } \Gamma = \frac{n+1}{n} \quad \text{Eq. d'état}$$

En posant, $\phi = \frac{\psi}{\psi_o}$, $x = \frac{r}{\lambda}$ et $\lambda = \sqrt{\frac{\psi_o}{4\pi G \rho_o}}$ Poisson devient

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d\phi}{dx}\right) - \phi^n = 0 \quad \text{Lane-Emden}$$

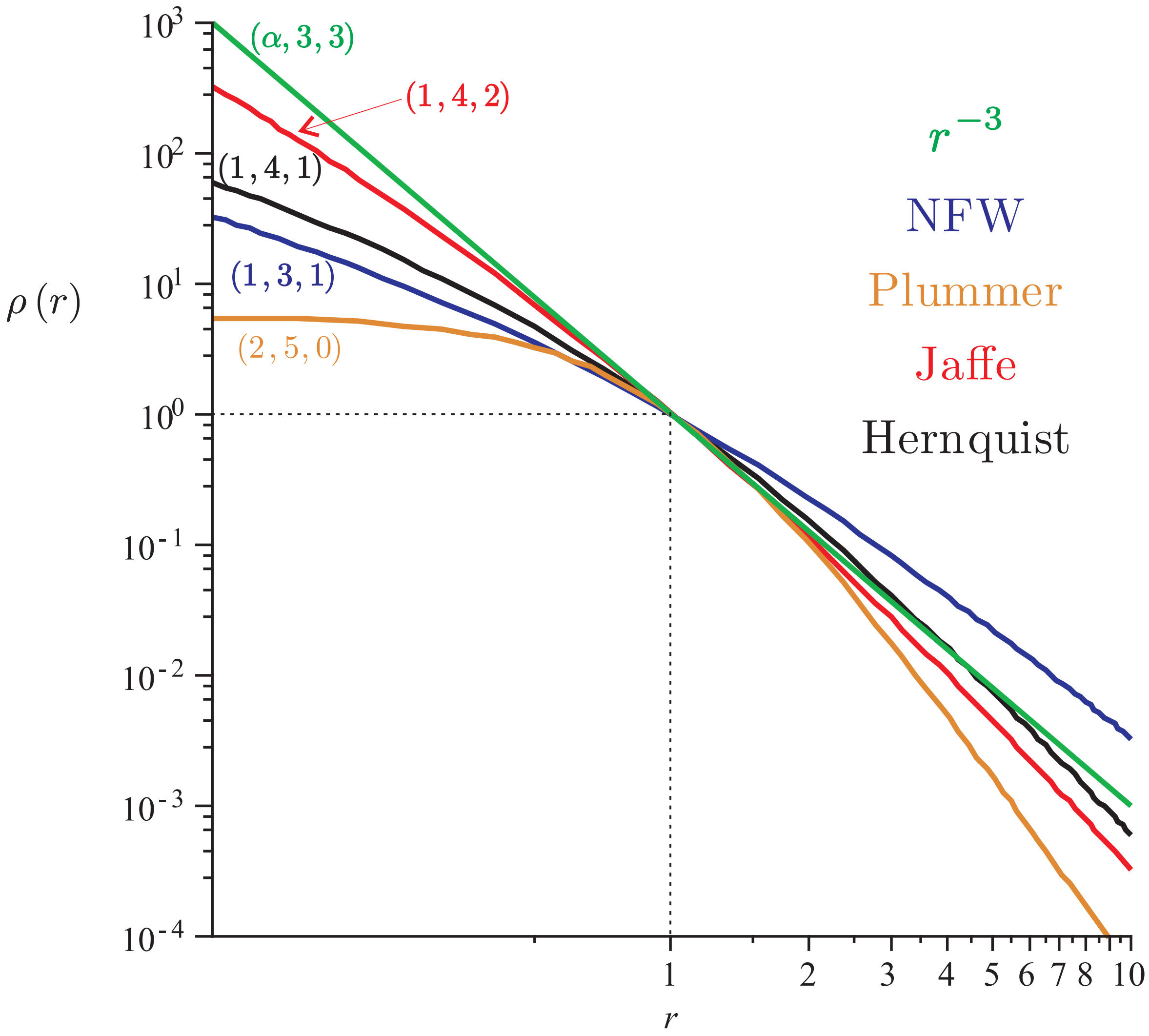
Solutions analytiques pour $n = 0, 1$ et 5(modèle de Plummer).
Etude complète : Chandrasekhar [Chandra]
La densité s'annule pour une valeur de r finie si $n < 5$, le système à une masse finie si $n \leq 5$ la formule d'inversion permet d'avoir la fonction de distribution

$$f\left(\varepsilon\right) \propto \left(\varepsilon\right)^{n-\frac{3}{2}} \times 1_{\varepsilon > 0}$$

Plummer : Cœur-Halo ($\gamma = 0$), $\approx$ amas globulaires.
Polytropes d'indices plus faibles (≈ 3) :équilibres sphériques d'étoiles.

NFW : $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 1)$

Entièrement basé sur l'ajustement de nombreuses simulations de formation de structures dans le cadre d'un Univers ΛCDM.
Densité centrale infinie, ($\gamma = 3$), masse totale infinie ! Pas universel ...



L'amas isochrone

[henon] Potentiel

$$\psi_i\left(r\right) = -\frac{GM}{b\left(1+\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\right)} \tag{1}$$

Densité

$$\rho_i\left(r\right) = \frac{M}{4\pi}\left[\frac{3ab\left(a+b\right)-br^2}{a^3\left(b+a\right)^3}\right] \qquad \text{avec } a = \sqrt{r^2+h^2}$$

Caractéristique fondamentale $\tau = \frac{2\pi GM}{\left(-2E\right)^{3/2}}$ et$\Phi = \pi\left(1+\frac{L}{\sqrt{L^2+4GMh}}\right)$

Amas isochrone : homogène au centre et képlerien au bord :

$$\psi_i\left(r\right) = \begin{cases} -\frac{GM}{2h^3}\left(h^2-r^2\right)+o\left(r^3\right) & \text{Si } r \rightarrow 0 \\ \\ -\frac{GM}{r}+o\left(\frac{1}{r}\right) & \text{Si } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Modèle correct mais pas suffisant quel dommage ...

Modèles exponentiels : Einasto-Sersic

Provient des observations de profils de luminosité projettée des galaxies elliptiques : $I\left(R\right) \propto R^{1/4}$ (de Vaucouleurs,1948).

$$I\left(R\right) = I_e \exp\left[-b_n \left\{\left(\frac{R}{R_e}\right)^{1/n} - 1\right\}\right] \tag{2}$$

- I_e: luminosité projetée en R_e qui renferme 50% de la lumière projetée de la galaxie,
- n : paramètre d'ajustement.

- b_n fixé par R_e, numériquement

$$b_n \approx 2n - \frac{1}{3} + \frac{9,88 \cdot 10^{-3}}{n} \quad \text{valable dès que } n \gtrsim \frac{1}{2}$$

On peut reconstruire $\rho\left(r\right)$ à partir de $I\left(R\right)$: Prugniel-Simien (voir [merritt] pour toutes les refs.) ou plus simple : Einasto

Profil de densité d’Einasto

$$\rho\left(r\right)=\rho_e \exp\left[-d_n\left\{\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n}-1\right\}\right]$$

$\rho_e=\rho(r_e)$, $r_e=r(50\% de M)$. Cette condition détermine la valeur de d_n pour chaque valeur de n.

Masse

$$M\left(r\right)=\frac{4\pi n\rho_o r_e^3}{d_n^3}\int_0^{d_n\left(\frac{r}{r_e}\right)^{1/n}} u^{3n-1}e^{-u}du$$

Si $M=M(r\rightarrow\infty)$

$$M=\frac{4\Gamma\left(3n\right)\pi n\rho_o r_e^3}{d_n^3}$$

Le paramètre d_n est donc fixé par la relation

$$\Gamma\left(3n\right)=\int_0^{+\infty} u^{3n-1}e^{-u}du=2\int_0^{d_n} u^{3n-1}e^{-u}du$$

$$d_n\approx\ 3n\ -\frac{1}{3}+\frac{7,9\cdot 10^{-3}}{n}\qquad \text{valable dès que } n\gtrsim\frac{1}{2}$$

Modèle poly-exponentiel (Prugniel-Simien)

$$I\left(R\right)=I_e\exp\left[-b_n\left\{\left(\frac{R}{R_e}\right)^{1/n}-1\right\}\right]$$

On pose, $x=b_n\left(\frac{R}{R_e}\right)^{1/n}$, $u=x-x_n\left(r\right)$ et $x_n\left(r\right)=b_n\left(\frac{r}{R_e}\right)^{1/n}$...Abel numéro 1...

$$\rho\left(r\right)=\frac{\Upsilon I_e}{\pi r}\exp\left[b_n-x_n\left(r\right)\right]\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{\left(\frac{u}{x_n(r)}+1\right)^{2n}-1}}\;du$$

...développement de la racine...

$$\left[\left(\varepsilon+1\right)^{2n}-1\right]^{-1/2}=\left(2n\right)^{-1/2}\left[\varepsilon^{-1/2}+\frac{\left(1-2n\right)}{4}\varepsilon^{1/2}+o\left(\varepsilon^{1/2}\right)\right]$$

en faisant l'hypothèse que $\frac{u}{x_n(r)}\ll 1$ (oups!), on obtient

$$\rho\left(r\right)=\frac{I_e}{R_e}\sqrt{\frac{\pi b_n}{2\pi n}}\left(\frac{r}{R_e}\right)^{\frac{1}{2n}-1}\exp\left[-b_n\left(\left(\frac{r}{R_e}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]\left(1+\frac{\left(1-2n\right)}{8b_n\left(\frac{r}{R_e}\right)^{\frac{1}{n}}}+o\left(r^{-1/n}\right)\right)$$

Profil de Prugniel-Simien

Approximation de Pruniel-Simien

$$\rho\left(r\right) = \rho_o \left(\frac{r}{R_e}\right)^{-p_n} \exp\left[-b_n \left\{\left(\frac{r}{R_e}\right)^{1/n} - 1\right\}\right] \tag{3}$$

approximation de la déprojection d'un profil de luminosité de Sersic ($R^{1/n}$) - analyse détaillée dans [LGM]. En prenant

$$\rho_o = \Upsilon I_e b_n^{n(1-p_n)} \frac{\Gamma\left(2n\right)}{2R_e \Gamma\left(3n - np_n\right)}$$

les paramètres R_e, n et b_n correspondent à ceux du profil de Sersic et p_n s'obtient numériquement

$$p_n \approx 1 - \frac{0,6097}{n} + \frac{5,46 \cdot 10^{-2}}{n^2} \quad \text{correcte pour} \left\{ \begin{array}{c} 0,6 \leq n \leq 10 \\ 10^{-2} \leq r/R_e \leq 10^{3,5} \end{array} \right.$$

Ces profils provenant de l'observation les potentiels associés sont peu accessibles analytiquement, ils s'expriment en terme de fonctions spéciales. Les profils de masses et de vitesse ont été plus étudiés.

La sphère isotherme

Physique statistique : Equilibre $\leftrightarrow$Maximum de l'entropie
Système autogravitant : f ,$M =$ cste $< \infty$, $H =$ cste $< \infty$, on note $d\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{p}d\mathbf{r}$

$$\mathcal{E}_{M,H} = \left\{ f, \begin{array}{c} M = m\int f \ d\mathbf{\Gamma} < \infty \\ \\ H = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \ f\left(\mathbf{\Gamma}\right) \ d\mathbf{\Gamma} \ - \ mG\int\int \frac{f(\mathbf{\Gamma})f\left(\mathbf{\Gamma}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{\Gamma}' d\mathbf{\Gamma} < \infty \end{array} \right\}$$

$\mathcal{E}_{M,H}$: ensemble des fonctions de distributions décrivant des systèmes de masse et énergie finie dans lesquels évolue une particule test de masse m et d'énergie

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\psi\left(\mathbf{r}\right) \quad \text{avec } \psi\left(\mathbf{r}\right) = -mG\int \frac{f\left(\mathbf{\Gamma}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{\Gamma}'$$

L'équilibre sera atteint pour

$$f^{eq} = \max_{f\in\mathcal{E}_{M,H}} \left[S\left(f\right) = -k\int f \ln f \ d\mathbf{\Gamma} \right] \qquad k = \text{Boltzmann}$$

Solution du problème

Distribution de Fermi-Dirac classique faiblement dégénérée : Mawxell-Boltzmann [6]

$$f^{eq} = f^{eq}(E) = \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta}\right)^{-3/2} e^{-\beta E}$$

β et α : multiplicateurs de lagrange pour conservation de H et M.

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\psi(r)) = m\int f\, d\mathbf{p} = 4\pi m \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta}\right)^{-3/2} e^{-\beta m\psi} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}\, dp \\ &= \frac{m}{\alpha^3} e^{-\beta m\psi}\end{aligned}$$

Equation de Poisson

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\psi}{dr}\right) = 4\pi G\rho = \frac{4\pi G m}{\alpha^3} e^{-\beta m\psi}$$

on introduit $x = \frac{r}{r_o}$ avec $r_o^2 = \frac{\alpha^3}{4\pi G m^2 \beta}$ puis $y = \beta m\psi$ et il vient

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) = e^{-y}$$

Un gros soucis...

- Solution particulière $\tilde{y}(x) = -\ln\left(\frac{2}{x^2}\right) \quad \rightarrow \quad \tilde{\rho}(r) = \frac{2mr_o^2}{\alpha^3 r^2}$, de masse

$$\tilde{M}(r) = \int_{B(r)} \rho d\mathbf{r} = \frac{8\pi m r_o^2}{\alpha^3} \int_0^r ds = 8\pi m \left(\frac{r_o}{\alpha}\right)^3 \frac{r}{r_o}$$

qui diverge ... Sphère isotherme singulière n'est pas dans $\mathcal{E}_{M,H}$!

- Solution générale, on pose $\zeta(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ et Poisson devient

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{d\zeta}{dx}\right) = 2\left(e^{-\zeta} - 1\right)$$

changement d'inconnue $t = \ln(x)$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt} = 2\left(e^{-\zeta} - 1\right) \tag{4}$$

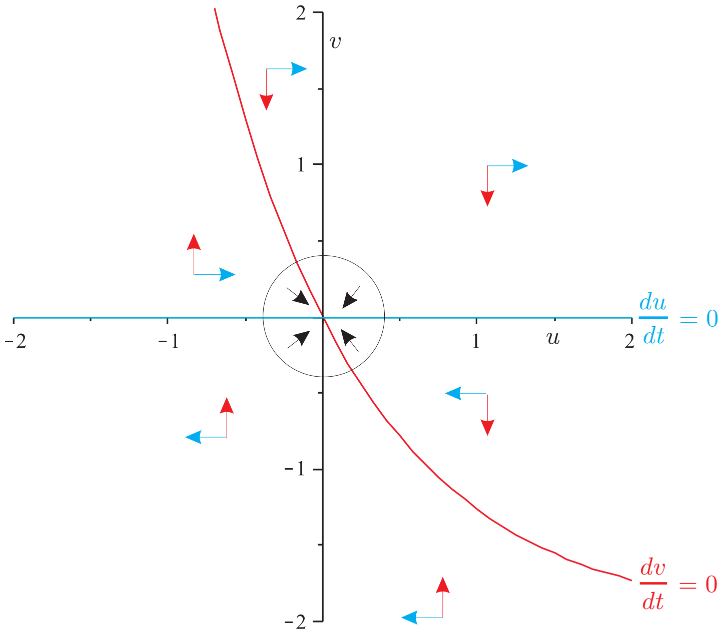
Réduction à un système d'équations dans $\mathbb{R}^2$, $X = [u, v]^\top = \left[\zeta, \frac{d\zeta}{dt}\right]^\top$ on a

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = F(X) = \begin{bmatrix} v \\ -v + 2\left(e^{-u} - 1\right) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Le seul point d'équilibre est l'origine ! La linéarisation donne

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{avec } A = DF(X)(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Tr}(A) < 0 \\ \det(A) > 0 \\ \Rightarrow 0 \ : UAS \end{array}$$

$\mathrm{div}(F) = -1 \Rightarrow$ critère de Bendixon : pas d'orbites périodiques et toutes les orbites bornées convergent.



Existence de trajectoires non bornées ?

1) Les orbites tournent autour de 0

2) ϕ_n application de retour sur $v = 0$ est telle que

$$\phi_n(X) - X < 0$$

Conclusion :

Pas d'orbites non bornées

Ainsi

$$\forall X(0) \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{t \to +\infty} X(t) = 0$$

Comportement asymptotique $(t \longrightarrow +\infty)$

$$\zeta(x) \rightarrow \frac{k_1 \cos\left[\ln\left(x^{\sqrt{7}/2}\right)\right] + k_2 \sin\left[\ln\left(x^{\sqrt{7}/2}\right)\right]}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Soit

$$\rho(r) \sim \frac{2mr_o^2}{\alpha^3 r^2}\left(1 \pm \left(\frac{r_k}{r}\right)^{1/2}\right) \quad \text{quand } r \longrightarrow +\infty.$$

Conclusion : toutes les sphère isothermes ont des masses infinies, $f \notin \mathcal{E}_{M,H}$

Que signifie cet équilibre ?

Le remède de King

[King]
Si une étoile d'un système autogravitant possède une vitesse trop grande elle ne sera plus liée à ce système ...

$\Rightarrow$ borne supérieure dans l'intégration en vitesse de la fonction de distribution

Cette borne coupe la densité et fait converger la masse ...
Problème : le système s'évapore ... Vlasov $\longrightarrow$ Fokker-Planck
La fonction de distribution d'un modèle de King s'écrit

$$f_k(E) = \begin{cases} \rho_o \left(2\pi\sigma^2\right)^{-3/2} \left[\exp\left(\frac{E_\ell - E}{\sigma^2}\right) - 1\right] & \text{si } E < E_\ell \\ \\ 0 & \text{si } E > E_\ell \end{cases}$$

E_ℓ est l'énergie de libération au dela de laquelle l'étoile ne fait plus partie du système.

$$\rho(\Psi) = \rho_o \left[e^{\Psi/\sigma^2} \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \Psi(r) = E_\ell - m\psi(r) \\ \\ \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \end{array}$$

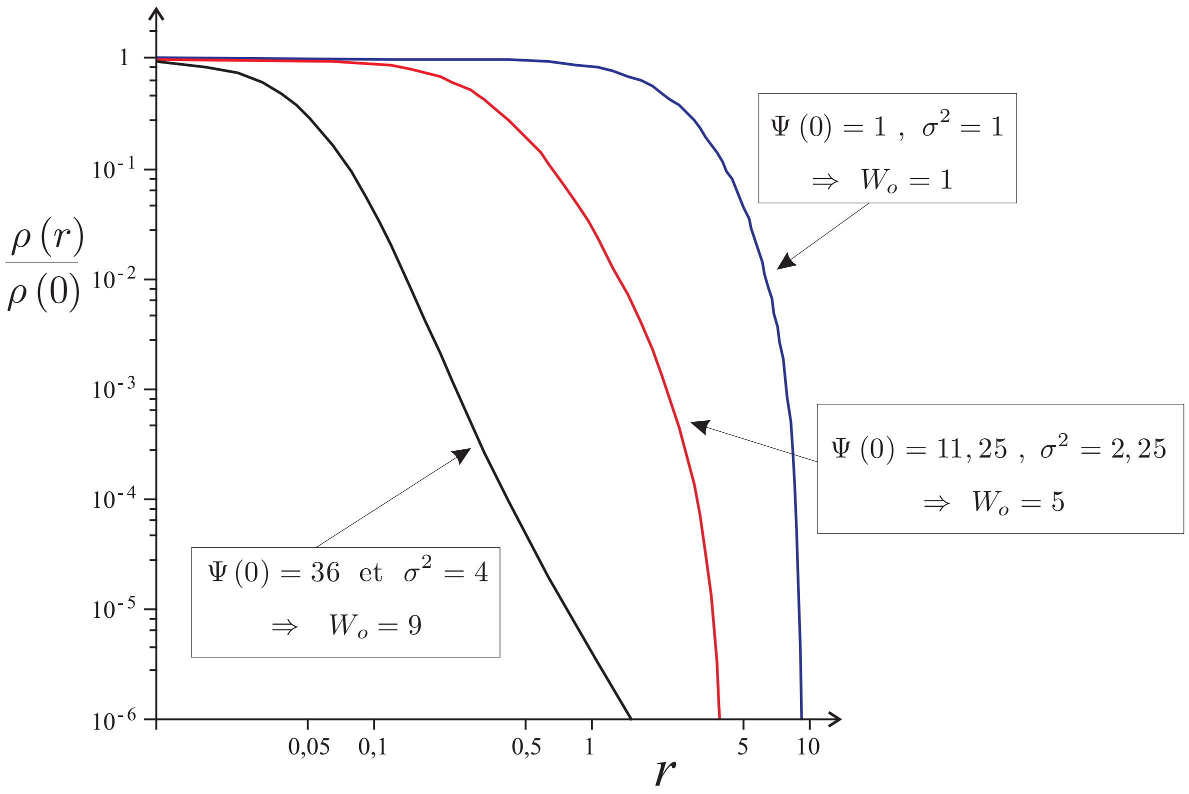
En remarquant que $\Delta(\Psi) = -m\Delta(\psi) = -4\pi G\rho$,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) = -4\pi G\rho_o r^2\left[e^{\Psi/\sigma^2}\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}}\left(1+\frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right)\right]$$

Condition limite imposée : $\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{r=0} = -m\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r=0} = \overrightarrow{F(0)}.\widehat{e_r} = 0$, mais

$\Psi(0) = E_\ell - m\psi(0) > 0$ ou $W_o = \dfrac{\Psi(0)}{m\sigma^2} = \dfrac{E_\ell - m\psi(0)}{\sigma^2}$: concentration

sont des paramètres du modèle de King



$\Rightarrow$ Cœur - Halo

$$r_c = \sqrt{\frac{3\sigma^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho_o}}$$

ou bien

$$c = \log_{10}(R/r_c)$$

avec

$$\Psi(R) = E_\ell - m\psi(R) = 0$$

Question ...

Quel profil pour quel objet ?

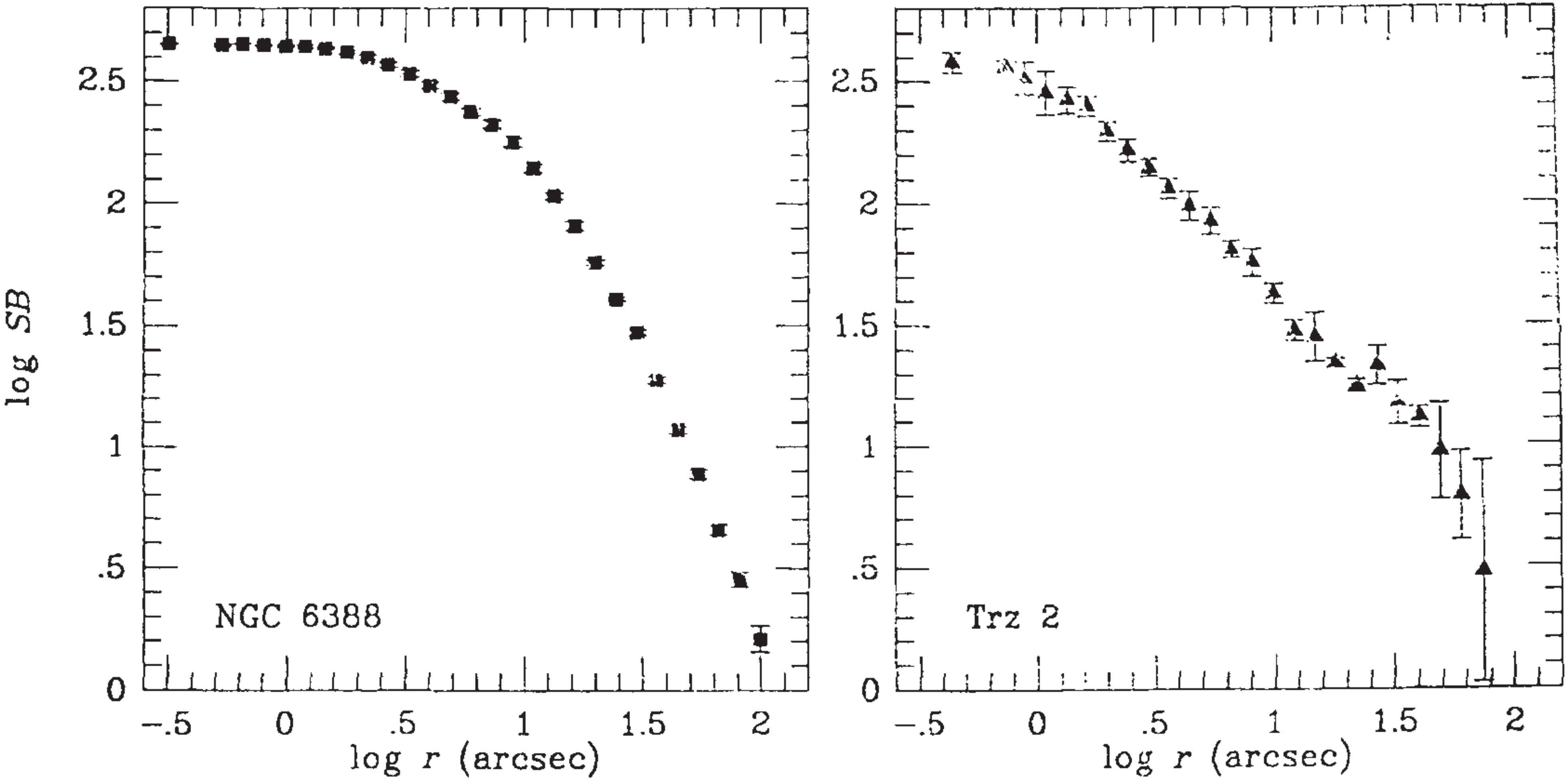
Profil de densité des galaxies

- Observations :
  - Galaxies elliptiques :
    - Profil de densité en loi de puissance avec plusieurs pentes ... compatibles avec celle d'une sphère isotherme (-2) $($voir $[$vdVMK$])$.
    - Profil de luminosité ~ loi de de Vaucouleurs (Einasto-Sersic $n = 4$).
  - Galaxies spirales
    - Bulbe ~ Elliptiques
    - Profil du halo de matière noire : débat.
- Simulations numériques : étude complète [merritt]
  Pas de profil universel (Galaxie isolée $\neq$ Petit amas $\neq$ Gros amas)
  Le meilleur des (α, β, γ) est obtenu avec $\alpha = 1$ et $\beta = 3$

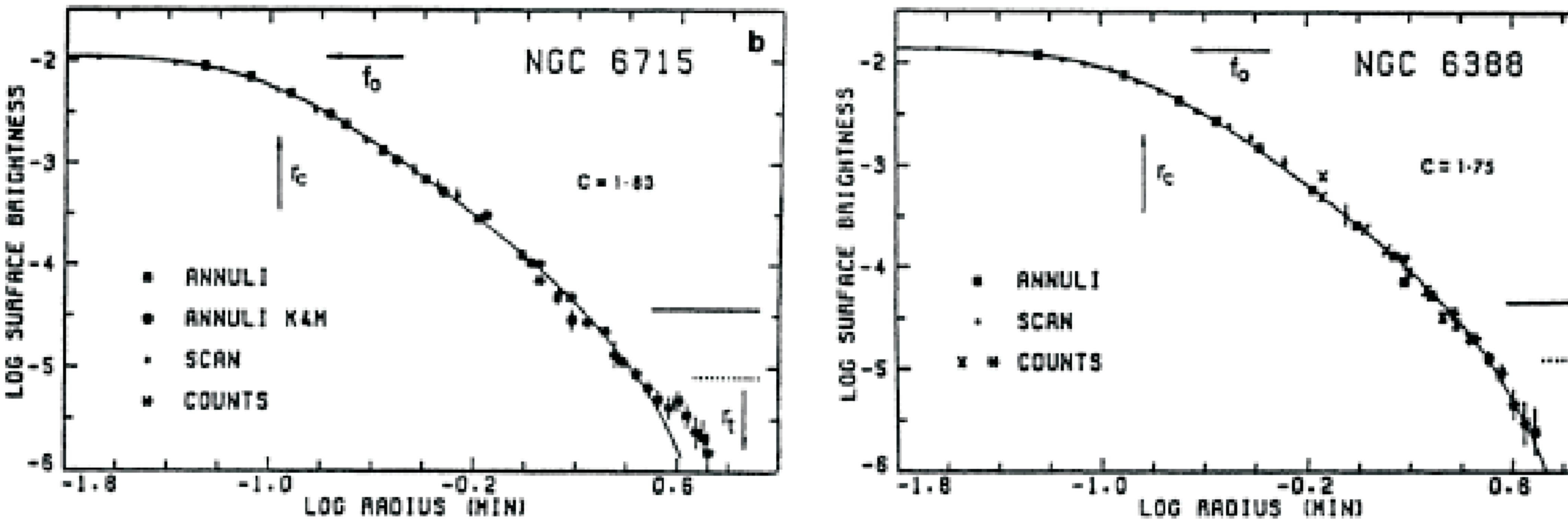
  Le moins mauvais profil est Prugniel-Simien $n_{PS} \approx 3$

Profil de densité des amas globulaires

[melheg],[elsonhutina]
Voie lactée = 143 amas globulaires : 80% = Cœur-Halo + 20% cœur effondré
(Consulter le catalogue [Harris])



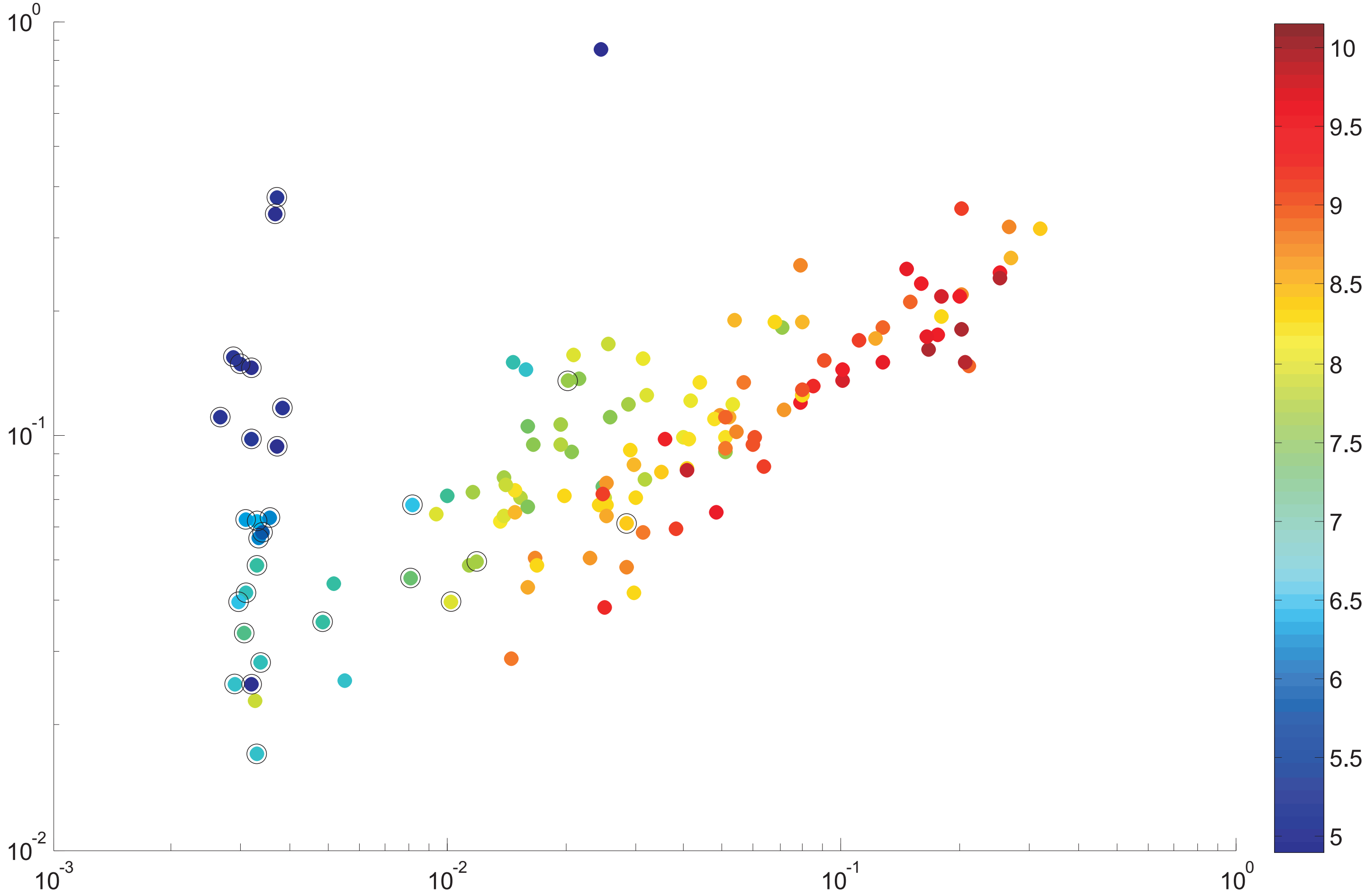
Cœur-halo sont très bien représentées par un modèle de King avec $c \approx 2$ ...



Les cœurs effondrés sont caractérisés par une loi de puissance du type R^{-1} pour la lumière projetée soit r^{-1} pour la densité de masse en utilisant l'inversion d'Abel.

Explication ...

Origine de la différence Cœur-Halo vs Cœur effondré : Instabilité d'Antonov ?



r_h/r_t en fonction de r_c/r_t pour les AG du catalogue de Harris, couleur : $\ln(T_{rel})$
Les cœurs effondrés sont cerclés

[GNN] B. Gidas, W.-M. Ni & L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$,**Mathematical Analysis and Applications**, vol. 79, pp. 369-402, 1981.

L. Hernquist, *An analytical model for spherical galaxies and bulges*, **The Astrophysical Journal**, vol. 356, pp. 359-364, 1990.

[Hernquist] L. Hernquist, *An analytical model for spherical galaxies and bulges*, **The Astrophysical Journal**, vol. 356, pp. 359-364, 1990.

[merritt] D. Merritt, A. W. Graham, B. Moore, J. Diemand, B. Terzic, *Empirical models for dark matter halos I*, **The Astronomical Journal**, vol. 132, pp. 2685-2700, 2006.

[BT] J. Binney & S. Tremaine, *Galactic dynamics*, **Princeton university press**, 1987

[LGM] G. B. Lima Neto, D. Gerbal & I. Marquez, , **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 309, pp. 481-495, 1999.

[henon] M. Hénon, *L'amas isochrone*, **Annales d'astrophysique**, vol. 22, p. 126, 1959

[Jaffe] W. Jaffe, *A simple model for the distribution of light in spherical galaxies*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 202, pp. 995-999, 1983

[Chandra] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, **Dover Publications**, 509 pages, 1958

[King] I. King, *The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models*, **Astronomical Journal**, Vol. 71, pp. 64-75, 1966

[FP] A.M Fridman & V.L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Vols. 1 and 2, **Springer**, New York, 1984

[MK] M. K.-H. Kiessling, *The Jeans Swindle. A True Story: Mathematically Speaking*, **Advances in Applied Mathematics**, vol 31, pp. 132-149, 2003

[vdVMK] G. van de Ven, R. Mandelbaum and C. R. Keeton, *Galaxy density profiles and shapes - I. Simulation pipeline for lensing by realistic galaxy models*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 398, pp. 607-634, 2009

[elsonhutina] R. Elson, P.Hut and S. Inagaki, *Dynamical evolution of globular clusters*, **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Vol. 25, pp. 565-601, 1987 [melheg] G. Meylan and D. C. Heggie, Internal dynamics of globular clusters, **The Astronomy and Astrophysics Review**, Vol. 8, pp. 1-143, 1997

[RP] F. Roy & J. Perez, *Dissipationless collapse of a set of N massive particles*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 348, p. 62, 2004

[JMSL] M. Joyce, B. Marcos & F. Sylos Labini, *Energy ejection in the collapse of a cold spherical self-gravitating cloud*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol.397, p. 775, 2009

[lauer] T.R. Lauer, *The cores of elliptical galaxies*, **The Astrophysical Journal**, vol. 292, pp 104-121,1985

[HH] D. Heggie and Piet Hut, *The gravitational Million-Body problem*, Cambridge University Press, 2003

[PA] J. Perez , J.-J. Aly, *Stability of spherical self-gravitating systems I : Analytical results*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 280, p. 689, 1996

[1] Bloch A.M., Krishnaprasad P.S., Marsden J.E. and Ratiu T.S., Ann. Inst. Henri Poincaré : Non linear analysis, 11, 37, 1994

[2] Huanchun Ye and P.J.Morrison, Physics of Fluids B, vol 4, 771, 1992

[3] Kandrup H.E. , ApJ, 351, 104, 1990

[4] Kandrup, H.E., ApJ, 370, 312, 1991

[5] Kandrup, H.E., ApJ, 380, 511, 1991

[6] Lynden-Bell D., MNRAS, 136, 101, 1967

[7] Katz J. and Lynden-Bell D., MNRAS, 184, 709, 1978

[8] Morrison P.J. , Phys. Lett. A, 80, 383, 1980

[9] Morrison P.J., Z. Naturforschung. Teil A 42,1115,1987

[10] P.J.Morrison, and D.Pfirsch, Phys. Rev A, 40, 3898, 1989

[11] P.J.Morrison and D. Pfirsch, Physics of Fluids B, 2, 1105, 1990

[12] P.J.Morrison, Transport Theory and Statistical, 29, 397, 2000

[13] Moser J., Mem,.Am. Math. Soc, 81,1, 1968

[14] Perez J. and Lachieze-Rey M., ApJ, 465 ,54,1996

[15] K. R. Yawn and B. N. Miller, Phys. Rev. E, 68, 56120 , 2003

[KS] H.E. Kandrup & J.-F. Sygnet, *A simple proof of dynamical stability for a class of spherical clusters*, **The Astrophysical Journal**, vol. 298, pp 27-33,1985

[Harris] Harris, W.E. , *Catalog of Parameters for Milky Way Globular Clusters*, **The Astronomical Journal**, vol. 112, p.1487, 1996