Rappels de mécanique analytique

Position du problème

Système : N particules M_k $(1 \leq k \leq N)$ ponctuelles

- Pas de liaisons :$\forall\ t$, $3N$ paramètres = position,vitesse
- $\exists\ c$ contraintes $f = 3N - c$ degrés de liberté

$\Rightarrow q_1, q_2, ..., q_f$ indépendantes, i.e. $\forall \quad 1 \leq i, j \leq f \qquad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$

Dans R_O

$$\forall \quad 1 \leq k \leq N \qquad \overrightarrow{OM_k} = \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k\left(q_1, ..., q_f\right)$$

$\hookrightarrow$ Vitesse

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad (1)$$

$\hookrightarrow$ Accélération

$$\frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\ddot{q}_i \qquad (2)$$

Principe fondamental de la dynamique : Equation vectorielle
Equations planétaires : Equations scalaires

$\mapsto$ Trouver des équations scalaires équivalentes au PFD.

Equations de Lagrange

Pour chaque particule k subissant une force résultante $\mathbf{f}_k$,

$$m_k \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{f}_k$$

Quelles grandeurs scalaires ?
Energie cinétique totale T

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt}\right)^2 \tag{3}$$

$1 \leq l \leq f$, ...

$$\frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_l}\dot{q}_j \dot{q}_i$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j \tag{4}$$

Le génie de Lagrange fait le reste ...

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) = \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} m_k \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \ddot{q}_j$$

on constate donc que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\sum_{i,j=1}^{f} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right) \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l}$$

qui grâce au PFD devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{f}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \tag{5}$$

Mécanique céleste ...

la force f_k ,dérive d'un potentiel $U\,(q_1, ..., q_f)$

$$\mathbf{f}_k = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k} \tag{6}$$

l'équation (5) devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k}\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial U}{\partial q_l}$$

comme $\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} = 0$, nous pouvons introduire le Lagragien

$$\mathcal{L} = T - U \tag{7}$$

qui vérifie donc pour chaque $1 \leq l \leq f$ les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = 0$$

Principe de moindre action

Système à un degré de liberté (pour simplifier), $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\mathsf{q}, \dot{\mathsf{q}}, \mathsf{t}\right)$

$\Longrightarrow$Action entre t_1 et t_2, telle que $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) dt$ vérifie

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \, dt$$

soit

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \left(\delta q\right) \, dt$$

une intégration par partie donne alors

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) \delta q \, dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q\right]_{t_1}^{t_2}$$

par hypothèse la position du système est parfaitement déterminée en $t_1$et t_2 :

$$\delta q\left(t_1\right) = \delta q\left(t_2\right) = 0$$

ainsi

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q \, dt$$

Lagrange : Mouvement extremise l'action (min)

Le mouvement est donc vu sous un angle nouveau (Principe de moindre action) :

Tout système mécanique est caractérisé par son lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$. Si aux instants t_1 et t_2 le système occupe deux positions déterminées, entre ces deux instants le système se meut de telle façon que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(q, \dot{q}, t\right) dt$$

ait la plus petite valeur possible.

$\Rightarrow$ Physique moderne ...

Equations de Hamilton

Lagrangien $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ donc

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Hamilton : nouvelle variable $$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

la différentielle du Lagrangien s'écrit alors

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} p_i \, d\dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + d\left(\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i\right) - \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i \\ \Leftrightarrow d\left(\sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}\right) &= \sum_{i=1}^{f} \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) dq_i + \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i \end{aligned}$$

ainsi $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$ est une fonction de q_i et p_i,

le Hamiltonien $H = H\left(q_i, p_i, t\right)$ est né !

En fait $L \mapsto H$: transformation de Legendre

Equations du mouvement issues de H

$$d\mathcal{H} \quad = \quad -\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i$$

... équations de Lagrange ...

$$d\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i + \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i dp_i = \sum_{i=1}^{f}\left(-\frac{dp_i}{dt}\right) dq_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{dq_i}{dt} dp_i$$

$$\Rightarrow \ \forall\, 1 \leq i \leq f \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \ \text{ et } \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \tag{8}$$

Pour un système sans liaisons internes tel que $f = 3N$ on aura donc

$$\forall \quad 1 \leq \alpha \leq N \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}_\alpha = \mathrm{grad}_{\mathbf{p}_\alpha} \mathcal{H} \\ \\ \mathbf{p}_\alpha = -\mathrm{grad}_{\mathbf{r}_\alpha} \mathcal{H} \end{array} \right.$$

Comment s'interprète H ?

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{f} \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 - U\right)$$

souvent ... $p_i := m_i \dot{q}_i$ donc

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{f} m_i \dot{q}_i^2 - \sum_{j=1}^{f} \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 + U$$

d'ou l'on déduit immédiatement que

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{f} \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 + U$$

$\Rightarrow$ H : Energie mécanique totale

Crochets de Poisson

$\forall a(..., q_i, ...p_i, ...)$ et $b(..., q_i, ...p_i, ...)$

$$\{a, b\} := \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial q_i} \tag{9}$$

indépendance des coordonnées généralisées: $\forall\ 1 \leq i, j \leq f$

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \qquad \text{et} \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$\longrightarrow$ équations de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, \mathcal{H}\} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, \mathcal{H}\}$$

Plus généralement pour toute fonction $\varphi(..., q_i, ...p_i, ...)$ nous avons

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\{q_i, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\{p_i, \mathcal{H}\} = \{\varphi, \mathcal{H}\}$$

$\Rightarrow$ Mécanique symplectique, systèmes dynamiques ....