

Rappels de mécanique analytique



Position du problème

Système : N particules M_k ($1 \leq k \leq N$) ponctuelles

■ Pas de liaisons : $\forall t$, $3N$ paramètres = position, vitesse

■ $\exists c$ contraintes $f = 3N - c$ degrés de liberté

$\Rightarrow q_1, q_2, \dots, q_f$ indépendantes, i.e. $\forall 1 \leq i, j \leq f \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$

Dans R_O

$$\forall 1 \leq k \leq N \quad \overrightarrow{OM_k} = \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, \dots, q_f)$$

\hookrightarrow Vitesse

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (1)$$

\hookrightarrow Accélération

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \ddot{q}_i \quad (2)$$

Principe fondamental de la dynamique : Equation vectorielle

Equations planétaires : Equations scalaires

\mapsto Trouver des équations scalaires équivalentes au PFD.



Equations de Lagrange

Pour chaque particule k subissant une force résultante \mathbf{f}_k ,

$$m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} = \mathbf{f}_k$$

Quelles grandeurs scalaires ?

Energie cinétique totale T

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

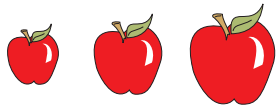
$1 \leq l \leq f, \dots$

$$\frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^N m_k \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_l} \dot{q}_j \dot{q}_i$$

et

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k=1}^N m_k \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (4)$$

Le génie de Lagrange fait le reste ...



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) = & \sum_{k=1}^N m_k \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_l} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ & + \sum_{k=1}^N m_k \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j \\ & + \sum_{k=1}^N m_k \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \ddot{q}_j \end{aligned}$$

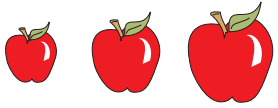
on constate donc que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^N m_k \left(\sum_{i,j=1}^f \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right) \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l}$$

qui grâce au PFD devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} \quad (5)$$

Mécanique céleste ...



la force f_k , dérive d'un potentiel $U(q_1, \dots, q_f)$

$$\mathbf{f}_k = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k} \quad (6)$$

l'équation (5) devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_l} = -\frac{\partial U}{\partial q_l}$$

comme $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} = 0$, nous pouvons introduire le Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - U \quad (7)$$

qui vérifie donc pour chaque $1 \leq l \leq f$ les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} = 0$$



Principe de moindre action

Système à un degré de liberté (pour simplifier), $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$

\implies Action entre t_1 et t_2 , telle que $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$ vérifie

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt$$

soit

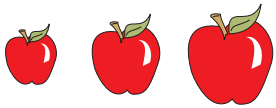
$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) dt$$

une intégration par partie donne alors

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}$$

par hypothèse la position du système est parfaitement déterminée en t_1 et t_2 :

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$



ainsi

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt$$

Lagrange : Mouvement extrême l'action (min)

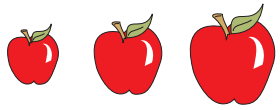
Le mouvement est donc vu sous un angle nouveau (Principe de moindre action) :

Tout système mécanique est caractérisé par son lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$. Si aux instants t_1 et t_2 le système occupe deux positions déterminées, entre ces deux instants le système se meut de telle façon que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

ait la plus petite valeur possible.

⇒ Physique moderne ...



Equations de Hamilton

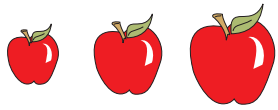
Lagrangien $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ donc

$$d\mathcal{L} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Hamilton : nouvelle variable $p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

la différentielle du Lagrangien s'écrit alors

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^f p_i d\dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + d\left(\sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i\right) - \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i \\ \Leftrightarrow d\left(\sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}\right) &= \sum_{i=1}^f \left(-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) dq_i + \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i \end{aligned}$$



ainsi $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$ est une fonction de q_i et p_i ,

le Hamiltonien $H = H(q_i, p_i, t)$ est né !

En fait $L \mapsto H$: transformation de Legendre

Equations du mouvement issues de H

$$d\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i$$

... équations de Lagrange ...

$$d\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i + \sum_{i=1}^f \dot{q}_i dp_i = \sum_{i=1}^f \left(-\frac{dp_i}{dt} \right) dq_i + \sum_{i=1}^f \frac{dq_i}{dt} dp_i$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq f \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (8)$$

Pour un système sans liaisons internes tel que $f = 3N$ on aura donc

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \begin{cases} \mathbf{r}_\alpha = \text{grad}_{\mathbf{p}_\alpha} \mathcal{H} \\ \mathbf{p}_\alpha = -\text{grad}_{\mathbf{r}_\alpha} \mathcal{H} \end{cases}$$



Comment s'interprète H ?

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^f \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 - U \right)$$

souvent ... $p_i := m_i \dot{q}_i$ donc

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^f m_i \dot{q}_i^2 - \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 + U$$

d'ou l'on déduit immédiatement que

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^f \frac{1}{2} m_j \dot{q}_j^2 + U$$

$\Rightarrow H$: Energie mécanique totale



Crochets de Poisson

$\forall a(\dots, q_i, \dots p_i, \dots)$ et $b(\dots, q_i, \dots p_i, \dots)$

$$\{a, b\} := \sum_{i=1}^f \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \quad (9)$$

indépendance des coordonnées généralisées: $\forall 1 \leq i, j \leq f$

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

→ équations de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, \mathcal{H}\} \quad \text{et} \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, \mathcal{H}\}$$

Plus généralement pour toute fonction $\varphi(\dots, q_i, \dots p_i, \dots)$ nous avons

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \{q_j, \mathcal{H}\} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \{p_j, \mathcal{H}\} = \{\varphi, \mathcal{H}\}$$

⇒ Mécanique symplectique, systèmes dynamiques