

Compléments de dynamique stellaire

Jérôme Perez

15 décembre 2009

Table des matières

1	Temps caractéristiques	3
1.1	Le temps de croisement et le temps dynamique	3
1.2	Le temps de relaxation à deux corps.	4
2	Equilibre des systèmes autogravitants	7
2.1	Le théorème de Jeans	7
2.2	Propriétés des équilibres	8
2.2.1	La fonction de distribution ne dépend que de $E = \frac{p^2}{2m} + m\psi$	8
2.2.2	La fonction de distribution dépend de E et de $L^2 = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p})^2$	9
2.3	Orbite d'une particule test dans un potentiel radial	11
2.3.1	Théorie générale	11
2.3.2	Orbites radiales	13
2.4	Inversions et applications	15
2.4.1	Les formules d'inversion	16
2.4.2	Comment inventer la troisième dimension	16
2.4.3	La fonction de distribution à partir de la densité	17
2.5	Couples potentiel-densité célèbres	19
2.5.1	Le potentiel képlérien	19
2.5.2	Le potentiel homogène	19
2.5.3	Lois de puissances : Modèles (α, β, γ)	20
2.5.4	L'amas isochrone	23
2.5.5	Modèles exponentiels	24
2.5.6	La sphère isotherme	26
2.5.7	Bilan : quel profil pour quel objet ?	32
3	Stabilité des systèmes autogravitants	35
3.1	L'instabilité de Jeans	35
3.2	La stabilité par des méthodes énergétiques	39
3.2.1	Structure hamiltonienne de l'équation de Vlasov	39
3.2.2	Application fondamentale à la stabilité	42
3.3	Instabilités thermodynamiques	47
3.3.1	Une propriété fondamentale	47
3.3.2	La sphère isotherme dans une boîte	49

4	Que s'est-il passé ?	56
4.1	Trois instabilités	56
4.2	Un mécanisme global	57

Chapitre 1

Temps caractéristiques

Les systèmes autogravitants possèdent plusieurs temps caractéristiques qu'il est bon de comprendre.

1.1 Le temps de croisement et le temps dynamique

Le temps de croisement T_{cr} d'un système physique est défini comme le rapport d'une vitesse caractéristique par une taille caractéristique. La vitesse V est par exemple celle d'un constituant représentatif du système, ou mieux une dispersion de vitesse $\sigma = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$

$$T_{cr} \propto \frac{R}{\sigma}$$

Pour un système autogravitant isolé à l'équilibre le théorème du viriel indique que

$$2E_c + E_p = 0$$

Pour un système de taille caractéristique R composé de N particules de masse m et dont la dispersion de vitesse est σ on peut raisonnablement écrire

$$E_c = \frac{1}{2}Nm\sigma^2 \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{G(Nm)^2}{R}$$

le viriel donne donc

$$\sigma = \left(\frac{GNm}{R} \right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}$$

En transportant ce résultat d'équilibre dans le temps de croisement, on obtient le temps dynamique

$$T_{dyn} \propto \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

le rapport R^3/M est proportionnel à la densité de masse moyenne $\bar{\rho}$ du système, on a donc

$$T_{dyn} \propto (G\bar{\rho})^{-1/2} \propto T_{cr}$$

On peut faire les choses plus précisément mais il faut se donner un potentiel ou une répartition de masse (c'est la même chose à un Poisson près ...). On peut alors écrire l'équation du mouvement d'une particule test à l'intérieur du système. Plusieurs temps caractéristiques apparaissent alors :

- le temps de chute libre est celui pris par une particule pour rejoindre le centre depuis le bord du système ;
- le temps orbital est celui mis par une particule pour effectuer une période de son mouvement radial.

L'idée à retenir est que tous ces temps sont de l'ordre de grandeur de T_{dyn} .

1.2 Le temps de relaxation à deux corps.

Considérons un système constitué de N particules ponctuelles de masse m avec $N \gg 1$. À l'équilibre, et sur de petites échelles de temps (de l'ordre de T_{dyn}), il semble louable de considérer que l'une de ces particules soit en orbite dans le champ moyen créé par toutes les autres. Sur de plus longues échelles de temps, le passage proche d'une voisine va inéluctablement affecter la trajectoire et modifier la vitesse de cette particule test. On définit donc le temps de relaxation à 2 corps comme

$$T_{rel} \propto \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right) \right]^{-1}. \quad (1.1)$$

Il s'interprète classiquement comme le temps mis par les interactions à 2 corps¹ pour modifier significativement v^2 . Le calcul de ce temps ainsi que des définitions plus précises abondent dans la littérature (voir par exemple le chapitre 14 de [19]), nous privilégions ici l'extraction d'un ordre de grandeur basé sur un raisonnement du maître Chandrasekhar.

Tous les corps ont la même masse m . Lors d'un passage à une distance p d'un voisin, une particule test de vitesse v ressent une force de module

$$F = \frac{Gm^2}{p^2}$$

pendant un temps caractéristique

$$\delta\tau = \frac{p}{v}.$$

La variation de vitesse δv de la particule test induite par cette rencontre peut s'obtenir en tentant un principe fondamental de la dynamique

$$m \frac{\delta v}{\delta\tau} = F \quad \Rightarrow \quad \delta v = \frac{F \delta\tau}{m} = \frac{Gm}{pv} \quad (1.2)$$

Le paramètre p est souvent appelé paramètre d'impact de la rencontre qui prend alors le statut de collision. Supposons que la particule test soit en orbite circulaire de rayon r dans le système de densité ρ . Il est facile de se convaincre que sur une période, le nombre de collisions avec un paramètre d'impact compris entre p et $p + dp$ s'écrit

$$dn = (2\pi p dp) \times (2\pi r) \times \left(\frac{\rho(r)}{m} \right) \quad (1.3)$$

$$= \frac{4\pi^2}{m} p r \rho(r) dp \quad (1.4)$$

¹Ce sont les seules interactions qui peuvent modifier quelque chose dans ce genre de système purement gravitationnel. Les interactions à plus de 2 corps sont négligeables.

Les collisions sont suffisamment aléatoires pour que la moyenne des variations de vitesse $\overline{\delta v}$ soit nulle. Pour obtenir l'action des collisions sur la vitesse il faut donc considérer une dispersion de vitesse. Sur une période, la variation $(\Delta v^2)_{orb}$ de δv^2 s'obtient en combinant (1.2) et (1.3) et en sommant sur toutes les valeurs possibles de p , soit

$$(\Delta v^2)_{orb} = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta v^2 dn = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho(r)}{v^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p}$$

Si l'on veut éviter les infinis, il est nécessaire à ce stade d'introduire une coupure haute et basse pour les valeurs de p , un long débat numérique-physico-psychologique se produit généralement autour de ces valeurs. Avec nos ordres de grandeurs, nous introduisons

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{p_{\max}}{p_{\min}} \right)$$

et prônerons le fait que $p_{\max} = r$ alors que p_{\min} peut correspondre au rayon d'une particule test que nous estimons par la relation crue

$$p_{\min} = \left(\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{N} \right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi}{3N} \right)^{1/3} r$$

ainsi

$$\begin{aligned} \ln \Lambda &= -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{4\pi}{3N} \right) = -\frac{1}{3} \left[\ln \left(\frac{4\pi}{3} \right) - \ln(N) \right] \\ &\approx \frac{1}{3} \ln N \end{aligned}$$

Finalement et sur une période, nous sommes convaincus d'obtenir

$$(\Delta v^2)_{orb} = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho(r)}{3 v^2} \ln N$$

Toujours sur une période nous avons vu au paragraphe précédent que

$$(\Delta t)_{orb} \approx T_{dyn}$$

il n'en faut pas plus pour écrire

$$\frac{1}{v^2} \left(\frac{dv^2}{dt} \right)_{orb} \approx \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho(r) \ln N}{3 v^4 T_{dyn}}$$

La moyenne permettant de calculer le temps de relaxation à 2 corps peut s'envisager sur une période, l'expression (1.1) s'écrit donc

$$\frac{T_{rel}}{T_{dyn}} \approx \frac{3}{4\pi^2} \frac{v^4}{G^2 m r \rho(r) \ln N}$$

le théorème du viriel, car nous sommes à l'équilibre, nous offre

$$v^4 = \left(\frac{GNm}{r} \right)^2$$

ainsi

$$\frac{T_{rel}}{T_{dyn}} \approx \frac{3}{4\pi^2} \frac{m}{r^3 \rho(r)} \frac{N^2}{\ln N} .$$

Au point où nous en sommes on peut toujours tenter

$$\rho(r) = \frac{Nm}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

et l'on obtient finalement

$$\frac{T_{rel}}{T_{dyn}} \approx \frac{9}{16\pi^3} \frac{N}{\ln N}$$

Dans un amas d'étoile ou une galaxie, le temps de relaxation à deux corps est donc généralement beaucoup grand que le temps dynamique. Un tableau résume bien l'affaire

	N	R [kpc]	σ [km.s ⁻¹]	T_{dyn} [Gan]	T_{rel} [Gan]
Amas ouverts	250	1×10^{-3}	1	1×10^{-3}	8×10^{-4}
Amas globulaires	5×10^5	1×10^{-2}	7	1×10^{-3}	1
Galaxies elliptiques	10^{11}	5	200	2×10^{-2}	2×10^6
Groupes diffus de galaxies	5	400	100	4	2×10^{-1}
Groupes compacts de galaxies	4	40	200	2×10^{-1}	1×10^{-2}
Amas riches de galaxies	400	1200	700	2	2

Avec un univers âgé de $1,3 \times 10^1$ Gan, les galaxies sont loin d'avoir acquis le statut d'objet relaxé par les collisions, l'hypothèse Vlasov est donc entièrement justifiée. En ce qui concerne les autres objets autogravitant, il est clair que les amas ouverts relaxent très vite alors que le statut des amas globulaires est plus discutable : l'importance des collisions dans leurs dynamique est différente entre les régions centrales denses et le halo externe plus diffus.

Le calcul grossier du temps de relaxation à deux corps que nous avons présenté ici est sous estimé en ce qui concerne les groupes et amas de galaxies, pour lesquels l'effet de la matière noire doit être pris en compte.

Un phénomène de ségrégation de masse est associé au processus de collision. Une fois encore notre calcul ne le prends pas en compte. Une rencontre entre deux étoiles de masses différentes ne produit pas la même variation de vitesse. L'effet net de cette ségrégation est de ralentir les étoiles les plus lourdes et donc de les faire tomber dans le puits de potentiel formé par le système. Sur l'échelle de temps de la relaxation on devrait observer une organisation des objets dans le système : les plus lourds au centre les plus léger à l'extérieur.

Chapitre 2

Equilibre des systèmes autogravitants

2.1 Le théorème de Jeans

Si l'on considère qu'un système autogravitant est décrit par le système de Vlasov-Poisson, toute l'information le concernant est contenue dans la fonction de distribution dans l'espace des phases $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ d'une particule test évoluant en son sein. Si l'on fait l'hypothèse que ce système est à l'équilibre, cette fonction ne dépendra plus du temps et s'écrira $f = f_o(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. L'équation de Vlasov permet de dire plus de choses encore. Elle s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

en introduisant l'énergie de la particule test

$$E = \frac{p^2}{2m} + m\psi \quad (2.1)$$

il vient immédiatement

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dE}{d\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{dE}{d\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

en introduisant les équations de Hamilton pour la particule test, cette équation devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

soit

$$\frac{df}{dt} = 0$$

Considérons un ensemble de fonctions scalaires de la position et de la vitesse

$$A_i = A_i(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R} \quad \text{telles que} \quad \frac{dA_i}{dt} = 0 \quad \text{pour chaque } i = 1, \dots, n$$

On dit alors que A_i est une intégrale première du mouvement. Un simple calcul de dérivée de fonctions composées montre que si $f = f_o(A_1, \dots, A_n)$ alors

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f_o}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_o}{\partial A_i} \frac{dA_i}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce résultat assez simple constitue le théorème de Jeans

Théorème 1 (*dit de Jeans*) Toute fonction positive et normalisable ne dépendant que des intégrales premières du mouvement est une fonction de distribution d'équilibre d'un système autogravitant.

Quelles peuvent être les intégrales premières du mouvement pour une particule test évoluant dans un système autogravitant ?

Sous l'hypothèse non collisionnelle, l'énergie E de la particule test est toujours conservée, il s'agit donc toujours d'une intégrale première. Ainsi toute fonction positive et normalisable de l'énergie

$$f_o = f_o(E) \quad (2.2)$$

est une fonction de distribution décrivant un état d'équilibre pour un système autogravitant. Nous étudierons en détail les propriétés d'un tel système.

Si le système possède des propriétés particulières, il peut arriver que $L^2 = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}|^2$ ou $L_z = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ soient aussi des intégrales premières lors du mouvement de la particule test. On peut donc former des fonctions de distributions d'équilibres plus riches que (2.2) la situation se complique alors singulièrement !

2.2 Propriétés des équilibres

2.2.1 La fonction de distribution ne dépend que de $E = \frac{p^2}{2m} + m\psi$.

Nous considérons une particule test liée au système $E < 0$. Pour que ceci soit possible, il faut que le système puisse la retenir, le potentiel est donc attractif $\psi < 0$.

Par définition, la densité de masse du système s'écrit

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\mathbf{p}$$

Si $f = f(E)$ la dépendance de f en \mathbf{p} ne se fait qu'à travers son module p . En coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses, on peut donc intégrer les angles. Ainsi

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi m \int f(E) p^2 dp$$

Etudions précisément les bornes de cette intégrale : la relation

$$p = \sqrt{2m(E - m\psi)}$$

permet de voir que p varie entre $p = 0$ pour une particule ne possédant que de l'énergie potentielle et $p = \sqrt{2m|\psi|}$ pour une particule d'énergie nulle, ainsi

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi m \int_0^{\sqrt{2m|\psi|}} f(E) p^2 dp$$

Attendu que $\psi = \psi(\mathbf{r})$, pour \mathbf{r} fixé, un calcul immédiat donne $dE = pdp/m$ ainsi

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= 4\pi m^2 \int_{m\psi}^0 f(E) p dE \\ &= 4\pi m^2 \int_{m\psi}^0 f(E) \sqrt{2m(E - m\psi)} dE \end{aligned} \quad (2.3)$$

La masse m étant un paramètre fixé, ceci permet de montrer que la dépendance de ρ en \mathbf{r} ne se fait qu'à travers le potentiel ψ , soit

$$\rho = \rho(\psi(\mathbf{r}))$$

Dans le cas $f = f(E)$, l'équation de Poisson s'écrit donc

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho(\psi)$$

Le théorème de Gidas-Nirenberg([1]), est alors précieux

Théorème 2 Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_-)$ telle que

$$\exists m > 0 / u \underset{\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^m}\right)$$

et solution de

$$\Delta u = h(u)$$

avec $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ décroissante de vérifiant

$$\exists \alpha > \frac{4}{m} / h(u) \underset{0}{\sim} O(u^\alpha)$$

alors pour un choix convenable de l'origine, u est une fonction radiale croissante.

Dans le cadre de notre théorie de champ moyen, la densité est une fonction continue et nous considérons des particules test liées au système ($\psi < 0$, $E < 0$), ce théorème nous permet donc d'affirmer que

$$f = f(E) \Rightarrow \psi = \psi(r) \Rightarrow \rho = \rho(r) \quad \text{où } r = |\mathbf{r}|$$

Un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie possède la symétrie sphérique dans l'espace des positions.

2.2.2 La fonction de distribution dépend de E et de $L^2 = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p})^2$

Nous avons toujours

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d\mathbf{p}$$

mais maintenant $f = f(E, L^2)$ avec

$$E = \frac{p^2}{2m} + m\psi \quad \text{et} \quad L = rp\sqrt{1 - \mu^2} \tag{2.4}$$

où $\mu = \cos \eta$ et η l'angle entre les directions de \mathbf{r} et \mathbf{p} . En coordonnées sphériques pour les impulsions, on peut toujours intégrer sur l'angle azimutal, mais l'angle polaire identifié à η (ce qui est toujours possible en choisissant un axe Oz dirigé par \mathbf{r} qui est fixe dans le calcul de la densité), reste dans l'intégrale qui devient

$$\rho(\mathbf{r}) = 2\pi m \int f(r, p, \mu) p^2 dp d\mu$$

Les coordonnées p et \mathbf{r} étant fixées un rapide calcul donne

$$p^2 d\mu = \frac{LdL}{r^2\mu}$$

ainsi

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{2\pi m}{r^2} \int dp \int f(E, L^2) \frac{LdL}{\mu}$$

par ailleurs toujours à \mathbf{r} fixé,

$$dp = m \frac{dE}{p}$$

ainsi

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{2\pi m^2}{r^2} \int dE \int f(E, L^2) \frac{LdL}{p\mu} = \frac{2\pi m^2}{r} \int dE \int f(E, L^2) \frac{LdL}{\sqrt{r^2 p^2 - L^2}}$$

en utilisant finalement la relation $p^2 = 2m(E - m\psi)$ on obtient

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \frac{2\pi m^2}{r} \int dE \int f(E, L^2) \frac{LdL}{\sqrt{2mr^2(E - m\psi) - L^2}} \\ &= \frac{\pi m^2}{r} \int dE \int f(E, L^2) \frac{dL^2}{\sqrt{2mr^2(E - m\psi) - L^2}} \end{aligned}$$

en étudiant les bornes d'intégration, on constate que pour \mathbf{r} fixé, $E \in [m\psi(\mathbf{r}), 0]$ et $L^2 \in [0, 2r^2(E - m\psi(\mathbf{r}))]$ on a donc finalement

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \frac{\pi m^2}{r} \int_{m\psi}^0 dE \int_0^{2r^2(E - m\psi)} f(E, L^2) \frac{dL^2}{\sqrt{2mr^2(E - m\psi) - L^2}} \\ &= \rho(r, \psi) \end{aligned} \tag{2.5}$$

L'équation de Poisson s'écrit donc maintenant

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho(r, \psi)$$

Nous ne sommes plus exactement dans le cadre d'application du théorème 2, heureusement, dans le même article [1], nous trouvons un autre théorème

Théorème 3 Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_-)$ telle que

$$\exists m > 0 / u \infty O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^m}\right)$$

et solution de

$$\Delta u = h(u, |\mathbf{x}|)$$

avec $h \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ décroissante en u et strictement décroissante en r vérifiant

$$\exists \alpha > \frac{4}{m} / h(u) \stackrel{0}{=} O(u^\alpha)$$

alors u est une fonction croissante de la variable $|\mathbf{x}|$.

Au prix de quelques hypothèses raisonnables, ce théorème permet donc de conserver la symétrie sphérique dans l'espace des positions pour les systèmes autogravitants dont la fonction de distribution dépend de E et L^2 :

$$f = f(E, L^2) \Rightarrow \psi = \psi(r) \Rightarrow \rho = \rho(r) \quad \text{avec } r = |\mathbf{r}|$$

dans les conditions du théorème 3.

Un tel système peut présenter une anisotropie dans l'espace des vitesses : la dépendance en $L^2 = mr^2 (v_\theta^2 + v_\varphi^2)$ brise l'isotropie des vitesses que véhiculait $E = \frac{1}{2}mr (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) + \psi(r)$, ainsi d'une manière générale

$$\sigma_r^2 \neq \sigma_\theta^2 = \sigma_\varphi^2$$

2.3 Orbite d'une particule test dans un potentiel radial

2.3.1 Théorie générale

L'orbite d'une particule test dans un potentiel radial $\psi = \psi(r)$ est facilement caractérisable. La force $\mathbf{F} = m\nabla\psi$ subie par une telle particule est elle aussi radiale, ce qui assure la conservation du moment cinétique $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ de cette particule. Le mouvement s'effectue donc dans le plan orthogonal à \mathbf{L} . On se place en coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, le module L du moment cinétique vérifie

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L = ctse \quad (2.6)$$

En écrivant l'équation du mouvement, dans ce plan, d'une particule test d'énergie E et de moment cinétique \mathbf{L} , on obtient très vite

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi(r) = cste$$

Si le système est isolé et sous les hypothèses des théorèmes 2 et 3, le potentiel $\psi(r)$ est une fonction négative, croissante qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow +\infty$, son comportement en 0 n'est pas aussi clairement déterminé. Pour éviter tout problème on convient généralement de considérer que le potentiel est fini au centre

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi(r) = \psi_o < \infty \quad (2.7)$$

Si ce n'est pas le cas étudions ce qu'il est permis de considérer.

En supposant que

$$\psi(r) \propto \frac{1}{r^\alpha} \quad \text{pour } r \rightarrow 0$$

l'équation de poisson donne une densité

$$\rho \propto \Delta\psi \propto \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^\alpha} \right) \right) \propto \frac{1}{r^{\alpha+2}}$$

La masse du système se déduit de la densité par intégration sur les positions, dans le cas sphérique qui nous occupe

$$M \propto \int_0^{r_{\max}} r^2 \rho(r) dr \propto \int_0^{r_{\max}} \frac{dr}{r^\alpha}$$

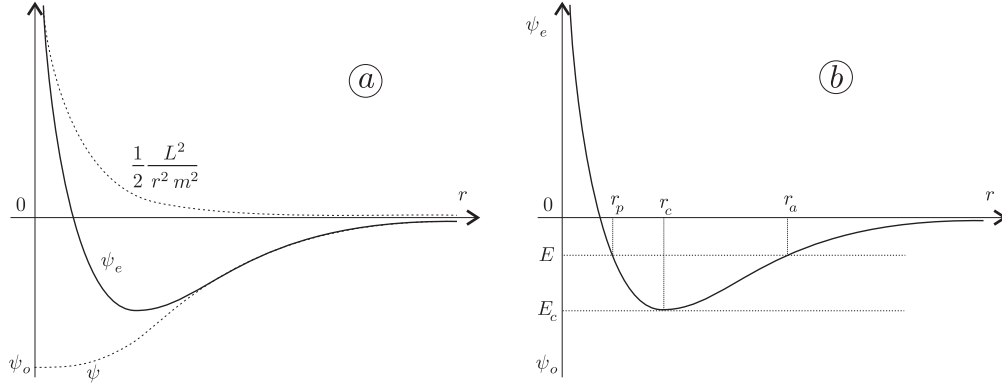


FIG. 2.1 – Potentiel effectif, apocentre, péricentre

qui ne converge en $r = 0$ que si $\alpha < 1$, c'est la limite que nous accepterons pour le comportement du potentiel en 0. Sous cette hypothèse, le potentiel effectif $\psi_e(r) := \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} + \psi(r)$ est toujours dominé par le terme $\frac{L^2}{m^2 r^2}$ lorsque $r \rightarrow 0$, il admet donc une représentation graphique du type de celle de la figure 2.1–a.

Le fait que nous considérons une particule liée ($E < 0$) et l'équation

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{E}{m} - \psi_e(r)$$

indique (voir figure 2.1–b) que l'énergie de la particule test est bornée $E \in [E_c, 0]$.

Une particule test d'énergie $E = E_c$ est telle que $\frac{dr}{dt} \equiv 0$ à chaque instant. Cette particule est donc en orbite circulaire de rayon r_c , unique solution de l'équation

$$\frac{E_c}{m} - \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r_c^2} - \psi(r_c) = 0$$

Une particule test d'énergie $E \in]E_c, 0]$ présente deux points caractéristiques sur son orbite situés en $r = r_p$ (péricentre) et $r = r_a$ (apocentre), solutions de l'équation

$$\frac{E}{m} - \psi(r) - \frac{1}{2} \frac{L^2}{m^2 r^2} = 0$$

Il est alors clair qu'à chaque instant t

$$r_p \leq r(t) \leq r_a$$

On peut alors se poser la question de la périodicité éventuelle de la fonction $r(t)$. La relation donnant le temps $\tau/2$ mis par la particule pour rallier l'apocentre en partant du péricentre s'écrit directement

$$\frac{\tau}{2} = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dt}{dr} dr = \int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - \psi(r) \right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \quad (2.8)$$

pour peu que celle-ci ait un sens, c'est-à-dire $\frac{\tau}{2} < \infty$, le parcours en sens inverse prendra la même durée. En conséquence,

$$r(t) = r_p \Rightarrow r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) = r_a \Rightarrow r(t + \tau) = r_p = r(t)$$

Il existe donc un temps τ fini tel que $r(t + \tau) = r(t)$. Les fonctions $f(t) = r(t)$ et $g(t) = r(t + \tau)$ vérifient la même équation différentielle (2.3.1), avec la même condition initiale. Sous la seule hypothèse que la condition d'unicité de Cauchy-Lipschitz soit vérifiée pour (2.3.1), on peut conclure que la fonction $r(t)$ est τ -périodique. Le temps τ est généralement appelé période radiale, son calcul dans divers cas de ψ montre que

$$\tau \approx T_{dyn}$$

Pendant cette période, il est possible de déterminer l'angle Φ correspondant au mouvement du péricentre (voir figure 2.2-a). C'est un calcul similaire à celui de τ qui donne

$$\Phi = 2 \int_{r_p}^{r_a} \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr$$

en utilisant la relation (2.6), il vient

$$\Phi = \frac{2}{m} \int_{r_p}^{r_a} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\left(\frac{E}{m} - \psi(r)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \quad (2.9)$$

Dans le cas général, cet angle n'est pas une fraction rationnelle de 2π . L'orbite d'une particule test liée dans un potentiel radial n'est donc généralement pas fermée et remplit tout l'anneau compris entre les deux cercles de rayons r_p et r_a (voir figure 2.2-b). On montre qu'il n'existe que deux types de potentiels pour lesquels *toutes* les trajectoires de particules liées ($E < 0$) sont fermées. Il s'agit du potentiel képlérien (voir 2.5.1) et du potentiel régnant à l'intérieur d'un boule homogène (voir 2.5.2).

Comme on peut le voir sur leurs définitions, la période radiale τ et l'angle Φ sont des fonctions des paramètres E et L de l'orbite de la particule. Il existe cependant une famille de modèles appelés isochrones (voir 2.5.4) pour lesquels la période radiale ne dépend que de E et Φ ne dépend que de L . Ces modèles inventés par le biais de cette propriété par Michel Hénon à la fin des années 50, sont homogènes au centre et képlériens au bord, bien que l'idée de leur conception soit géniale, il ne correspondent qu'assez imprécisément avec les systèmes autogravitants que l'on observe.

Il est important de remarquer que la vitesse $\dot{\omega}$ de rotation du péricentre de l'orbite s'obtient directement par le rapport

$$\dot{\omega} = \frac{\Phi}{\tau} = \frac{1}{m} \frac{\int_{r_p}^{r_a} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\left(\frac{E}{m} - \psi(r)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}}{\int_{r_p}^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - \psi(r)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}}}$$

2.3.2 Orbites radiales

Le cas des orbites telles que $L \rightarrow 0$ est particulièrement intéressant. Dans ce cas, le potentiel effectif devient le potentiel tout court ainsi $r_p \rightarrow 0$ alors que r_a n'est pratiquement pas affecté.

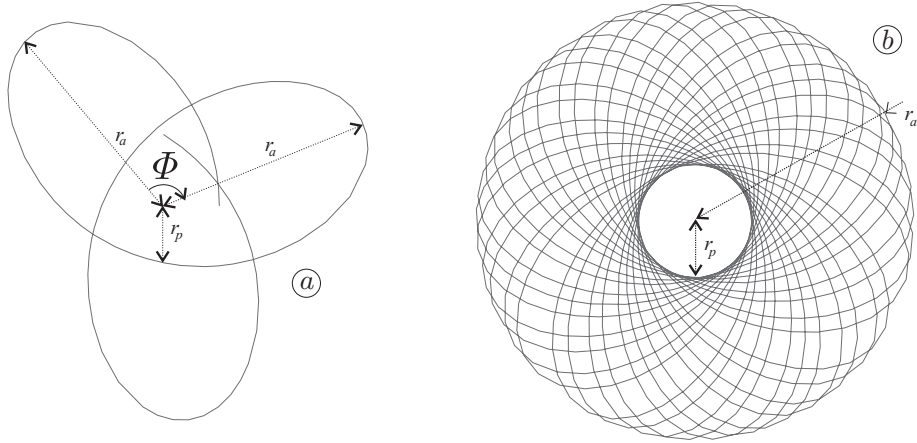


FIG. 2.2 – Trajectoire d’une particule test dans un potentiel radial : pendant environ 2 périodes radiales (a), puis une cinquantaine (b).

Il s’ensuit que

$$\Phi \rightarrow 0 \text{ alors que } \tau \rightarrow \int_0^{r_a} \frac{dr}{\sqrt{2 \left(\frac{E}{m} - \psi(r) \right)}}$$

Une telle orbite est une ellipse très excentrique, dont le périhélie ne bouge presque pas et dont le demi grand axe est uniquement fonction de l’énergie. Plus cette énergie est petite (grande en valeur absolue), plus le demi grand axe est faible. On a représenté ce type d’orbites dans un même plan sur la figure 2.3.

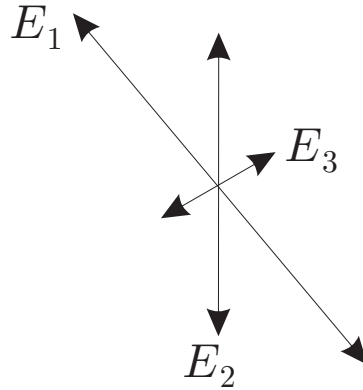


FIG. 2.3 – Orbites de 3 particules test telles que $L \approx 0$ dans un potentiel radial correspondant à un système $f = f(E)$. Sur ce schéma $0 > E_1 > E_2 > E_3$.

De telles orbites sont dites radiales on comprend bien pourquoi !

Notons qu’il n’est pas possible de former un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l’énergie $f_o = f_o(E)$ avec uniquement un ensemble de particules test sur des orbites radiales. Pour indiquer la forte excentricité des orbites il est nécessaire de sélectionner de

faibles valeurs de L^2 . Seule la fonction de distribution peut jouer ce rôle, ainsi on doit forcément avoir $f_o = f_o(E, L^2)$.

Pour un système constitué uniquement de particules sur des orbites radiales nous aurons à la limite

$$f(E, L^2) = \phi(E) \delta(L^2)$$

La fonction ϕ gère la répartition des énergies sur les différentes particules test que l'on peut choisir dans le système. Une fonction de distribution de système isotrope peut convenir! En utilisant la relation (2.5) donnant la densité avec une fonction de distribution radiale on trouve

$$\rho(r, \psi) = \frac{\pi m^2}{r} \int_{m\psi}^0 dE \int_0^{2r^2(E-m\psi)} \phi(E) \delta(L^2) \frac{dL^2}{\sqrt{2mr^2(E-m\psi) - L^2}}$$

ce qui devrait pouvoir se simplifier en

$$\begin{aligned} \rho(r, \psi) &= \frac{\pi m^2}{r} \int_{m\psi}^0 \frac{dE \phi(E)}{\sqrt{2mr^2(E-m\psi)}} \\ &= \frac{\pi m}{\sqrt{2} r^2} \int_{m\psi}^0 \frac{dE \phi(E)}{\sqrt{\frac{E}{m} - \psi}} \end{aligned}$$

Faisons l'hypothèse que $\phi(E)$ est la fonction de distribution d'un système isotrope de densité ρ_{iso} associée au potentiel ψ_{iso} la relation (2.3) donne

$$\rho_{\text{iso}}(\psi_{\text{iso}}) = 4\pi m^2 \int_{m\psi_{\text{iso}}}^0 \phi(E) \sqrt{2m(E-m\psi_{\text{iso}})} dE$$

en dérivant sous le signe somme il vient

$$\frac{d\rho_{\text{iso}}}{d\psi_{\text{iso}}} = -\sqrt{2}\pi m^2 \int_{m\psi_{\text{iso}}}^0 \frac{\phi(E) dE}{\sqrt{\frac{E}{m} - \psi_{\text{iso}}}}$$

d'où l'on tire

$$\rho_{\text{ani}} = \rho(r, \psi) = -\frac{\pi}{2m^2} \frac{1}{r^2} \frac{d\rho_{\text{iso}}}{d\psi_{\text{iso}}},$$

On retrouve comme prévu que la densité ne dépend plus seulement du potentiel. On note que dans ce cas radial, cette densité semble plus singulière en $r = 0$ que dans le cas isotrope.

2.4 Inversions et applications

Cette section est entièrement consacrée à une technique très utilisée en dynamique stellaire, l'inversion intégrale d'Abel connue en astronomie sous le nom de formule d'Eddington (selon [4]).

2.4.1 Les formules d'inversion

La première formule s'exprime ainsi, soit

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\alpha} dt \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \quad (2.10)$$

on peut alors obtenir g en fonction de f sous la forme

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_0^t \frac{df}{dx} \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} \right] \end{aligned}$$

C'est un calcul direct qui utilise au passage le résultat

$$\int_0^1 \frac{du}{u^\alpha (1-u)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} .$$

La deuxième formule est une sorte de complémentaire de la première : si maintenant

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{g(t)}{(t-x)^\alpha} dt \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

alors

$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dx \\ &= -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left[\int_t^\infty \frac{df}{dx} \frac{dx}{(x-t)^{1-\alpha}} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{(x-t)^{1-\alpha}} \right] \end{aligned}$$

ceci est bien aride!

2.4.2 Comment inventer la troisième dimension ...

Bien souvent les observations astronomiques se résument à des images, et donc des cartes bi-dimensionnelles d'intensité lumineuse. Peut-on obtenir la répartition spatiale tridimensionnelle de la masse qui produit cette lumière? La réponse est oui, au prix de quelques hypothèses ...

Notons R la variable radiale dans le plan de l'image et r la variable radiale tridimensionnelle (voir figure 2.4). Supposons avant toute chose que l'objet observé est invariant par rotation dans l'espace (symétrie sphérique). Appelons $I(R)$ le profil de luminosité projetée, $\lambda(r)$ et $\rho(r)$ les densités respectives de lumière et de masse dans l'espace. Au point où nous en sommes il paraît raisonnable de considérer que pour un type d'objet donné, ces deux fonctions sont proportionnelles. Il existe donc une fonction $\Upsilon(r)$ – le profil masse-luminosité – telle que

$$\rho(r) = \Upsilon(r) \lambda(r)$$

Chose extraordinaire, ce profil est à peu près constant pour un objet donné : typiquement on trouve $\Upsilon \approx 3 \Upsilon_{\odot}$ pour un amas globulaire [par exemple $3,4 \pm 1.0$ pour NGC 1835 (voir [14])], $\Upsilon \approx 10 \Upsilon_{\odot}$ pour une galaxie elliptique (voir [18] pour une longue liste ...) et $\Upsilon \approx 100 \Upsilon_{\odot}$ pour les amas de galaxies. Pour un objet donné nous prendrons donc

$$\rho(r) = \Upsilon \lambda(r) \quad \text{avec } \Upsilon = cste$$

La luminosité radiale projetée $I(R)$ dans le plan orthogonal à une ligne de visée Or_1 s'obtient par intégration.

$$I = 2 \int_0^{\infty} \lambda(r) dr_1$$

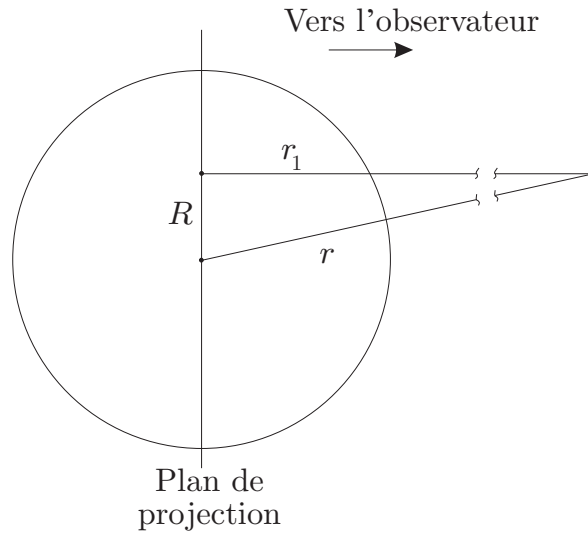


FIG. 2.4 – Ligne de visée, plan de projection.

La figure 2.4 montre que $r^2 = R^2 + r_1^2$, ce qui, sous nos hypothèses, permet d'avoir

$$I(R) = 2 \int_R^{\infty} \frac{\lambda(r) r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr = \frac{1}{\Upsilon} \int_x^{\infty} \frac{\rho(t)}{(t-x)^{1/2}} dt \quad \text{avec } x = R^2 \text{ et } t = r^2$$

que l'on inverse grâce à la deuxième formule d'Abel en

$$\rho(r) = -\frac{\Upsilon}{\pi} \int_{r^2}^{\infty} \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (2.11)$$

et le tour est joué ...

2.4.3 La fonction de distribution à partir de la densité

La logique implacable des mathématiques voudrait que l'on déduise la fonction de distribution d'un système de considérations physiques très générales. L'observation permet le contraire ...

Commençons par quelques changements de variables :

- Le potentiel gravitationnel ψ est une fonction généralement négative et qui ne s'annule pas forcément sur le bord du système (si celui-ci n'est pas isolé ou si l'on a pris une référence baroque), il est donc commode d'introduire

$$\varphi = \psi_\infty - \psi \quad \text{avec} \quad \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow +\infty} \psi(\mathbf{r}) = \psi_\infty$$

- L'énergie d'une particule test

$$E = \frac{p^2}{2m} + m\psi$$

dans un système autogravitant est elle aussi souvent négative, sans quoi elle ne fait pas réellement partie du système : elle n'est là qu'en transit ... Il est souvent commode d'introduire

$$\begin{aligned} \varepsilon &= m\psi_\infty - E \\ &= m\varphi - \frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

Dans le cas sphérique isotrope, la fonction de distribution d'équilibre est donc une fonction de la forme

$$f = \begin{cases} f(\varepsilon) & \text{si } \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon \leq 0 \end{cases} \quad \text{on a } \varepsilon = 0 \text{ pour } p = m\sqrt{2\varphi}$$

la densité volumique de masse s'obtient en intégrant cette fonction dans l'espace des impulsions, avec les nouvelles variables et dans le cas sphérique isotrope, elle s'écrit

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int f(\varepsilon) d\mathbf{p}$$

utiliser des coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses permet l'intégration sur les angles, il vient donc

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\pi m \int_0^{m\sqrt{2\varphi}} f(\varepsilon) p^2 dp$$

pour une valeur donnée du rayon, on peut écrire

$$p = \sqrt{2m} (m\varphi - \varepsilon)^{1/2} \quad \text{et} \quad pdp = -m d\varepsilon$$

ainsi

$$\rho(\mathbf{r}) = 4\sqrt{2}\pi m^{5/2} \int_0^{m\varphi} f(\varepsilon) (m\varphi - \varepsilon)^{1/2} d\varepsilon$$

on retrouve que la densité est une fonction de la variable φ ce qui nous avait permis de prouver que le système est sphérique (voir section 2.2.1). Intéressons-nous à présent à la dérivée de cette fonction. Il est clair que

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi m^{7/2}} \frac{d\rho}{d\varphi} = \int_0^{m\varphi} \frac{f(\varepsilon)}{(m\varphi - \varepsilon)^{1/2}} d\varepsilon$$

Nous sommes donc en mesure d'appliquer la première formule d'Abel (2.10) qui donne ici ($x = m\varphi$, $t = \varepsilon$ et $\alpha = 1/2$)

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2 m^{7/2}} \left[\int_0^\varepsilon \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{(\varepsilon - m\varphi)^{1/2}} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{d\rho}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} \right] \quad (2.12)$$

Pour un système sphérique, connaissant la répartition de masse ρ , on calcule le potentiel φ en utilisant l'équation de Poisson. On injecte tout ce joli monde dans l'équation (2.12) et on obtient la fonction de distribution du système. Il faut toutefois modérer notre enthousiasme car mis à part les polytropes, tout ceci ne fournit pas beaucoup de modèles complètement explicites.

2.5 Couples potentiel-densité célèbres

2.5.1 Le potentiel képlérien

Il s'agit à la fois du plus simple et du plus célèbre potentiel gravitationnel ...

$$\psi(r) = -\frac{GM}{r}$$

Il correspond à la densité d'une masse ponctuelle située en l'origine $r = 0$, et donc de la forme

$$\rho(r) = M\delta(r)$$

C'est le potentiel du problème des deux corps!

2.5.2 Le potentiel homogène

Un système sphérique homogène possède une densité de masse constante dans une boule et nulle ailleurs, soit

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_o & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Pour obtenir le potentiel associé, il suffit d'écrire l'équation de Poisson et de la résoudre d'une manière ou d'une autre ... Détaillons la méthode reposant sur le moins d'hypothèses!

L'équation de Poisson s'écrit en coordonnées sphériques

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G\rho = \begin{cases} 4\pi G\rho_o & \text{si } r \leq R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire du second ordre avec coefficients variables et second membre à l'intérieur de la boule. La solution s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète. La solution générale de l'équation sans second membre est un espace vectoriel de dimension 2 ayant pour base les fonctions $\psi_0^1(r) = 1$ et $\psi_0^2(r) = 1/r$. Un peu d'expérience (ou d'astuce) permet de voir que la fonction $\tilde{\psi}(r) = 2\pi G\rho_o r^2$ est une solution particulière à l'intérieur de la boule. Le potentiel s'écrit donc dans le cas le plus général

$$\psi = \begin{cases} A\psi_0^1 + B\psi_0^2 + \tilde{\psi} & \text{si } r \leq R \\ C\psi_0^1 + D\psi_0^2 & \text{si } r > R \end{cases}$$

Les constantes A , B , C et D sont fixées par les conditions aux limites du problèmes :

- le potentiel $\psi(r)$ et sa dérivée $\psi'(r)$ sont continues en $r = R$, pour pouvoir les mettre dans un laplacien ;
- $\psi'(0) = 0$ car le système est symétrique, donc la force qu'il crée en son centre est nulle ;

– enfin, si l'on suppose que le système est isolé

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \psi(r) = 0.$$

Cette dernière condition impose $C = 0$ et les trois précédentes permettent d'obtenir

$$\psi(r) = \begin{cases} -2\pi G \rho_o (R^2 - \frac{1}{3}r^2) & \text{si } r \leq R \\ -\frac{4\pi G \rho_o R^3}{3r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

On généralise aisément ce genre de raisonnement à d'autres profils de densité dès que l'on peut trouver une solution particulière du problème ce qui est rarement le cas ...

2.5.3 Lois de puissances : Modèles (α, β, γ)

Même si certains de ces modèles trouvent des justifications physiques (théoriques ou observationnelles), les profils (α, β, γ) proviennent généralement de l'ajustement des nombreux résultats de simulations numériques effectués dans ce contexte. La densité spatiale s'écrit

$$\rho(r) = \frac{\rho_s 2^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^\gamma \left(1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^\alpha\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}}$$

le paramètre positif ρ_s correspond à la valeur de la densité en $r = r_s$ qui correspond lui-même à la valeur du rayon de transition entre la région centrale (loi de puissance en $r^{-\gamma}$) et la région externe (loi de puissance en $r^{-\beta}$), α étant le paramètre de contrôle de la transition entre ces deux régions. La masse d'un tel système s'écrit

$$M(r) = 4\pi \rho_s 2^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}} \int_0^r x^2 \left(\frac{x}{r_s}\right)^{-\gamma} \left(1 + \left(\frac{x}{r_s}\right)^\alpha\right)^{\frac{\gamma-\beta}{\alpha}} dx$$

Pour que cette intégrale ait un sens, le critère de Riemann conduit à

$$\begin{cases} \gamma < 3 & \text{pour la convergence en } r = 0 \\ \beta > 3 & \text{pour la convergence en } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

La condition sur β peut être levée, mais il faut dans ce cas introduire à la main un rayon de coupure r_c tel que $\rho(r) = 0$ si $r \geq r_c$. Pour certaines valeurs de (α, β, γ) on obtient certaines densités classiques dont certaines permettent un calcul explicite du potentiel et constituent donc de merveilleux jouets d'investigation des systèmes autogravitants!

Le modèle d'Hernquist : $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 1)$

Le potentiel d'Hernquist [2] de masse totale M est caractérisé par sa simplicité et le fait que tout ou presque est analytique!

$$\psi(r) = -\frac{GM}{a} \frac{1}{1 + \frac{r}{a}}$$

la densité correspondante

$$\rho(r) = \frac{M}{2\pi a^2} \frac{1}{r \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3}$$

en fait un modèle $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 1)$ avec

$$r_s = a \text{ et } \rho_s = \frac{M}{16\pi a^3}$$

d'extension infinie de masse totale M finie et dont la masse contenue dans une sphère de rayon r s'écrit

$$M(r) = M \frac{r^2}{(r+a)^2} \quad \text{notons que } M(a) = \frac{M}{4}$$

On remarque aisément que pour un modèle de Hernquist en notant $\psi_o = \psi(0) < 0$,

$$\rho(r) = \rho(\psi) = -\frac{M}{2\pi a^3} \frac{\left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^4}{1 - \frac{\psi}{\psi_o}}$$

Ce modèle correspond ainsi à la description d'un système dont la fonction de distribution ne dépend que de l'énergie. L'expression de cette fonction est le fruit d'un calcul basé sur l'inversion d'Abel pratiquée sur la relation (2.3). Le résultat est tellement sordide que nous laissons le lecteur consulter l'article original [2]...

Le modèle de Jaffe $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 2)$

Ce modèle très simple est lui aussi quasiment analytique en totalité, il est caractérisé par deux paramètres : sa masse totale M et le rayon r_j . Le potentiel est donné par la relation

$$\psi_j(r) = \frac{GM}{r_j} \ln\left(\frac{r}{r+r_j}\right)$$

et l'équation de Poisson permet d'obtenir la densité

$$\rho_j(r) = \frac{M}{4\pi r_j^3} \frac{r_j^2}{r^2 \left(1 + \frac{r}{r_j}\right)^2}$$

Le modèle de Jaffe est donc modèle $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 4, 2)$ avec comme le modèle de Hernquist

$$r_s = r_j \text{ et } \rho_s = \frac{M}{16\pi r_j^3}$$

La masse $M(r)$ contenue dans la sphère de rayon r concentrique à ce modèle se calcule aisément

$$M(r) = M \times \frac{r}{r+r_j}$$

Ce modèle a été introduit empiriquement par son auteur pour représenter simplement du mieux possible les observations de galaxies. Sa simplicité ne lui permet de remplir cette fonction que modestement, le prix à payer pour un tel exploit est plus compliqué, voire impossible exactement ...

Le modèle de Plummer $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 5, 0)$ et les polytropes

Le potentiel de Plummer correspond à une solution exceptionnelle $n = 5$ de l'équation de Poisson dans le cas d'une équation d'état polytropique $\rho = \rho_o \times \left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^n$.

$$\psi(r) = -\frac{GM}{b} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}}}$$

la densité correspondante

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)^{5/2}}$$

en fait un modèle $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 5, 0)$ avec

$$r_s = b \text{ et } \rho_s = \frac{3M}{16\sqrt{2}\pi b^3}$$

d'extension infinie de masse totale M finie et dont la masse contenue dans une sphère de rayon r s'écrit

$$M(r) = M \frac{r^3}{(b^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{notons que } M(b) = \frac{M}{2\sqrt{2}}$$

Comme prévu par sa définition, le modèle de Plummer est tel que

$$\rho(r) = \rho(\psi) = \rho_o \left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^5$$

Cette relation est donc un cas particulier de la relation

$$\rho(\psi) = \rho_o \left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^n \tag{2.13}$$

Dans le cadre de la symétrie sphérique, c'est-à-dire pour une pression P et un potentiel ψ radial, l'équation d'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}.$$

Les fonctions P , ρ et ψ ne dépendant que de r , on peut facilement intégrer cette équation dans le cas (2.13) pour trouver

$$P = P_o + \frac{|\psi_o| \rho_o}{n+1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\Gamma - 1 \right] \quad \text{avec } \Gamma = \frac{n+1}{n}$$

qui est ce que l'on appelle généralement en thermodynamique une équation d'état polytropique¹. L'équation de Poisson correspondante s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G \rho_o \left(\frac{\psi}{\psi_o}\right)^n$$

¹C'est-à-dire une relation entre la pression et la densité à travers une loi de puissance.

en posant

$$\phi = \frac{\psi}{\psi_o} \quad \text{et} \quad x = \frac{r}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt{\frac{\psi_o}{4\pi G \rho_o}}$$

on obtient l'équation de Lane-Emden

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) - \phi^n = 0$$

que l'on sait intégrer analytiquement pour $n = 1 \dots$, et pour $n = 5$ qui correspond au modèle de Plummer. Les solutions de cette équation sont abondamment étudiées dans la littérature, les modèles correspondants ont une taille finie (la densité s'annule pour une valeur de r finie) si $n < 5$, et une masse finie si $n \leq 5$, le modèle de Plummer est donc un cas limite. La relation simple existant entre ρ et ψ permet d'inverser la relation (2.13) grâce à la formule d'Abel on obtient une relation de la forme

$$f(\varepsilon) \propto (\varepsilon)^{n-\frac{3}{2}} \times 1_{\varepsilon>0}$$

Le modèle de Plummer est un excellent modèle pour certains amas globulaires. Les polytropes d'indices plus faibles (de l'ordre de 3) sont de leurs cotés de bons modèles d'équilibres sphériques pour les étoiles.

Le profil Navarro-Frenk & White (NFW) $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 1)$

Ce modèle a connu son heure de gloire au tournant du millénaire. Il est entièrement basé sur l'ajustement de nombreuses simulations de formation de structures dans le cadre d'un Univers Λ CDM. D'un point de vue théorique il pose un gros problème avec sa densité centrale infinie, due au fait que $\gamma = 3$, et donc sa masse totale infinie ! Des études plus récentes lui font préférer des modèles exponentiels (voir §2.5.5) tels que Einasto-Sersic ou Prugniel-Simien qui permettent de meilleurs ajustements pour une classe de modèle plus large ...

2.5.4 L'amas isochrone

Le modèle isochrone est entièrement issu de considérations physiques proposées par M. Hénon à la fin des années 1950 [6]. Tant sa motivation est pure, s'il avait été confirmé par les observations, il aurait, sans aucun doute, été sélectionné comme LE modèle des systèmes autogravitants sphériques. Même s'il ne permet pas de rendre compte de l'ensemble des systèmes observés. Il en est tout de même une approximation honnête. Sa justification est quant à elle tout simplement magique (lire absolument à ce sujet l'article original) !

Le modèle isochrone est caractérisé par le potentiel

$$\psi_i(r) = - \frac{GM}{b \left(1 + \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \right)} \quad (2.14)$$

la densité d'un tel système est donnée par la relation

$$\rho_i(r) = \frac{M}{4\pi} \left[\frac{3ab(a+b) - br^2}{a^3(b+a)^3} \right] \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{r^2 + h^2}$$

cette relation est anecdotique car ce modèle est fondé sur les propriétés de son potentiel. Pour trouver son expression, il suffit de résoudre le problème suivant : quel est le potentiel radial

le plus général dans lequel chaque orbite possède une période radiale (2.8) ne dépendant que de l'énergie. Ce que fit Michel Hénon ... L'expression de cette période est de plus relativement simple

$$\tau = \frac{2\pi GM}{(-2E)^{3/2}}$$

Il s'avère de plus que dans un potentiel isochrone, les orbites ont un mouvement du périégée ne dépendant que du moment cinétique

$$\Phi = \pi \left(1 + \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4GMh}} \right)$$

Notons que l'amas isochrone est homogène au centre et képlérien au bord, en effet :

$$\psi_i(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{2h^3} (h^2 - r^2) + o(r^3) & \text{Si } r \rightarrow 0 \\ -\frac{GM}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) & \text{Si } r \rightarrow +\infty \end{cases}$$

2.5.5 Modèles exponentiels

Les modèles exponentiels sont des généralisations à la densité spatiale de la fameuse loi dite en $R^{1/4}$ de Gérard De Vaucouleurs. Cette loi empirique provient d'un ajustement des premiers profils de luminosité projetée obtenus après la seconde guerre mondiale pour les galaxies elliptiques.

Le modèle purement exponentiel (dit d'Einasto-Sersic)

Ce modèle est issu des observations de profils de luminosité des galaxies elliptiques. Dès 1948, de Vaucouleurs remarque que ces profils suivent une loi devenue fameuse en $I(R) \propto R^{1/4}$ où R représente le rayon projeté et I l'intensité lumineuse projetés sur le plan d'une plaque photographique. Dans les années 60, Sersic généralise ce modèle en introduisant un profil de luminosité projetée de la forme

$$I(R) = I_e \exp \left[-b_n \left\{ \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right\} \right] \quad (2.15)$$

le paramètre I_e représente l'intensité projetée au rayon projeté R_e et n est le paramètre d'ajustement. Le terme b_n n'est pas un paramètre mais une fonction de n de telle manière que R_e renferme la moitié de la lumière projetée de la galaxie. Pour des valeur de n suffisamment positives, Prugniel et Simien proposent une expression approchée analytique pour b_n de la forme

$$b_n \approx 2n - \frac{1}{3} + \frac{9,88 \cdot 10^{-3}}{n} \quad \text{valable dès que } n \gtrsim \frac{1}{2}$$

En faisant des hypothèses sur la rapport masse/luminosité de la galaxie et en appliquant le théorème du viriel, il est possible de reconstruire la densité correspondant à ce type de modèles purement heuristique. C'est d'ailleurs l'idée sous-jacente dans les modèles dits de Prugniel-Simien, présentés au paragraphe suivant. En simplifiant l'approche, il est cependant aussi toujours possible de se servir directement la loi projetée (2.15) pour décrire la densité spatiale de

masse $\rho(r)$ à 3 dimensions... C'est ce qui fit Einasto toujours dans les années 60 en proposant une loi de la forme

$$\rho(r) = \rho_e \exp \left[-d_n \left\{ \left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right\} \right]$$

où ρ_e est la densité en $r = r_e$ qui correspond au rayon de la sphère contenant la moitié de la masse totale du système, cette condition détermine la valeur de d_n pour chaque valeur de n . De simples calculs montrent que

$$M(r) = \frac{4\pi n \rho_o r_e^3}{d_n^3} \int_0^{d_n \left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n}} u^{3n-1} e^{-u} du$$

en notant M la masse du système, obtenue en passant à la limite $r \rightarrow +\infty$ dans l'expression précédente on trouve

$$M = \frac{4\Gamma(3n) \pi n \rho_o r_e^3}{d_n^3}$$

où

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} u^{t-1} e^{-u} du \quad (2.16)$$

est la fonction gamma d'Euler. Par définition de r_e , nous avons $M(r_e) = M/2$ soit

$$\frac{M}{2} = \frac{4\pi n \rho_o r_e^3}{d_n^3} \int_0^{d_n} u^{3n-1} e^{-u} du$$

ainsi le paramètre d_n est fixé par la relation

$$\Gamma(3n) = \int_0^{+\infty} u^{3n-1} e^{-u} du = 2 \int_0^{d_n} u^{3n-1} e^{-u} du$$

La résolution, même si elle est numérique, de cette équation est délicate et nécessite un grand soin, une expression approchée circule dans les couloirs initiée par G. Mamon

$$d_n \approx 3n - \frac{1}{3} + \frac{7,9 \cdot 10^{-3}}{n} \quad \text{valable dès que } n \gtrsim \frac{1}{2}$$

Le modèle poly-exponentiel (dit de Prugniel-Simien)

En prenant un profil de luminosité de Sersic (2.15), en posant successivement

$$x = b_n \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/n} \quad \text{puis } u = x - x_n(r) \quad \text{avec } x_n(r) = b_n \left(\frac{r}{R_e} \right)^{1/n}$$

et en invoquant l'inversion d'Abel numéro (2.11), on trouve assez vite

$$\rho(r) = \frac{\Upsilon I_e}{\pi r} \exp [b_n - x_n(r)] \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\left(\frac{u}{x_n(r)} + 1 \right)^{2n} - 1}} du$$

l'idée consiste alors à développer en série la racine en utilisant la relation

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon)^{2n} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left[\varepsilon^{-1/2} + \frac{(1-2n)}{4} \varepsilon^{1/2} + o(\varepsilon^{1/2}) \right]$$

en faisant l'hypothèse que $\frac{u}{x_n(r)} \ll 1$ (c'est un peu hardi alors que u est une variable d'intégration qui s'étend à l'infini ...), on obtient

$$\rho(r) = \frac{\Upsilon I_e}{\sqrt{2n\pi r}} \exp[b_n - x_n(r)] \int_0^\infty e^{-u} \left[\left(\frac{u}{x_n(r)} \right)^{-1/2} + \frac{(1-2n)}{4} \left(\frac{u}{x_n(r)} \right)^{1/2} + o\left(\left(\frac{u}{x_n(r)} \right)^{1/2} \right) \right] du$$

que l'on peut intégrer en se souvenant que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = 2\Gamma(3/2)$, il vient

$$\rho(r) = \frac{\Upsilon I_e}{\sqrt{2n\pi r}} \sqrt{\pi x_n(r)} \exp[b_n - x_n(r)] \left(1 + \frac{(1-2n)}{8x_n(r)} + o(x_n(r)^{-1}) \right)$$

ou de manière plus explicite

$$\rho(r) = \frac{I_e}{R_e} \sqrt{\frac{\pi b_n}{2\pi n}} \left(\frac{r}{R_e} \right)^{\frac{1}{2n}-1} \exp \left[-b_n \left(\left(\frac{r}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right) \right] \left(1 + \frac{(1-2n)}{8b_n \left(\frac{r}{R_e} \right)^{1/n}} + o(r^{-1/n}) \right) \quad (2.17)$$

Cette relation est exacte (si l'on peut procéder au développement en série). L'idée est donc venue d'utiliser le profil dit de Prugniel-Simien

$$\rho(r) = \rho_o \left(\frac{r}{R_e} \right)^{-p_n} \exp \left[-b_n \left\{ \left(\frac{r}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right\} \right] \quad (2.18)$$

qui peut donc passer pour une approximation de la déprojection d'un profil de luminosité de Sersic ($R^{1/n}$). Les différents paramètres de cette loi et leurs origines sont détaillées dans [5]. Si l'on choisit la normalisation

$$\rho_o = \Upsilon I_e b_n^{n(1-p_n)} \frac{\Gamma(2n)}{2R_e \Gamma(3n - np_n)}$$

les paramètres R_e , n et b_n correspondent à ceux du profil de Sersic à l'ordre d'approximation qui permet d'obtenir la relation (2.18) à partir de (2.17). Le paramètre p_n n'est alors plus libre, [5] proposent une approximation efficace de cette quantité de la forme

$$p_n \approx 1 - \frac{0,6097}{n} + \frac{5,46 \cdot 10^{-2}}{n^2} \quad \text{correcte pour } \begin{cases} 0,6 \leq n \leq 10 \\ 10^{-2} \leq r/R_e \leq 10^{3,5} \end{cases}$$

Ces profils provenant de l'observation les potentiels associés sont peu accessibles analytiquement, ils s'expriment en terme de fonctions spéciales. Les profils de masses et de vitesse ont été plus étudiés.

2.5.6 La sphère isotherme

Le modèle et son problème

Le modèle de la sphère isotherme est purement d'origine thermodynamique. Il s'agit de chercher la fonction de distribution d'équilibre correspondant à un extremum de l'entropie.

Considérons un système autogravitant décrit par sa fonction de distribution f dans l'espace des phases, elle même solution du système de Vlasov-Poisson. Supposons que l'état d'équilibre

soit celui de plus grande entropie, tout en ayant une masse finie et constante, M , et une énergie totale finie et constante H . Soit $d\Gamma = d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ l'élément de volume de l'espace des phases du système, et

$$\mathcal{E}_{M,H} = \left\{ f, M = m \int f d\Gamma < \infty, H = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f(\Gamma) d\Gamma - mG \int \int \frac{f(\Gamma) f(\Gamma')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma' d\Gamma < \infty \right\}$$

l'ensemble des fonctions de distributions décrivant des systèmes de masse et énergie finie dans lesquels évolue une particule test de masse m et d'énergie

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\psi(\mathbf{r}) \quad \text{avec } \psi(\mathbf{r}) = -mG \int \frac{f(\Gamma')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Gamma'$$

L'équilibre sera atteint pour

$$f^{eq} = \max_{f \in \mathcal{E}_{M,H}} \left[S(f) = -k \int f \ln f d\Gamma \right]$$

où k désigne la constante de Boltzmann. La solution de ce problème est classique en physique statistique, il s'agit d'une distribution de Maxwell-Boltzmann²

$$f^{eq} = f^{eq}(E) = \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta E}$$

où β et α sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de conservation, respectivement dimensionnées comme l'inverse d'une énergie et une longueur. La fonction de distribution ne dépendant que de l'énergie le système est donc sphérique isotrope (cf. théorème 2). La densité de masse associée à cette fonction de distribution est une simple loi marginale de f on a (en coordonnées sphériques dans l'espace des impulsions)

$$\rho = \rho(\psi(r)) = m \int f d\mathbf{p} = 4\pi m \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta m\psi} \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dp$$

attendu que

$$\int_0^\infty p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} dp = \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

on trouve donc

$$\rho = \rho(\psi(r)) = \frac{m}{\alpha^3} e^{-\beta m\psi}$$

Cette relation définit le couple potentiel densité pour une sphère isotherme (de température T telle que $\beta = (kT)^{-1}$). L'équation de Poisson de la sphère isotherme fût l'objet de longues études initiées par Emden au début vingtième siècle et poursuivies par Chandrasekhar [8] peu avant la seconde guerre mondiale. Elle s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi G\rho = \frac{4\pi Gm}{\alpha^3} e^{-\beta m\psi}$$

²En toute rigueur, la présence du potentiel gravitationnel interdit la présence de 2 particules au même endroit (singularité du potentiel). Il convient donc de rajouter un principe d'exclusion gravitationnel conduisant à une distribution de Fermi-Dirac. Dans le cas classique des systèmes dilués cette distribution admet très vite pour limite la distribution de Maxwell-Boltzmann.

qu'il est facile d'adimensionner en posant

$$x = \frac{r}{r_o} \text{ avec } r_o^2 = \frac{\alpha^3}{4\pi G m^2 \beta} \text{ puis } y = \beta m \psi$$

il vient

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = e^{-y}$$

Une étude asymptotique du comportement de la solution de cette équation pour $x \rightarrow +\infty$ (c'est-à-dire aussi pour $r \rightarrow +\infty$) permet de comprendre que la sphère isotherme pose un problème à la thermodynamique. En effet, quelques minutes de patience permettent de montrer que la fonction

$$\tilde{y}(x) = -\ln\left(\frac{2}{x^2}\right)$$

est une solution particulière de l'équation de Poisson de la sphère isotherme. Cependant la densité associée

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{2mr_o^2}{\alpha^3 r^2}$$

n'est pas acceptable car de masse infinie : le support du système n'est pas limité car la densité ne s'annule jamais et la masse du système contenue dans la sphère $B(r)$ de rayon r s'écrit

$$\tilde{M}(r) = \int_{B(r)} \rho d\mathbf{r} = \frac{8\pi m r_o^2}{\alpha^3} \int_0^r ds = 8\pi m \left(\frac{r_o}{\alpha}\right)^3 \frac{r}{r_o}$$

Ce modèle est connu sous le nom de sphère isotherme singulière, on comprend bien pourquoi !

Il y a même plus grave : en faisant le changement de fonction

$$\zeta(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$$

l'équation de Poisson de la sphère isotherme s'écrit

$$\frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\zeta}{dx} \right) = 2(e^{-\zeta} - 1)$$

et en utilisant l'inconnue

$$t = \ln(x)$$

il vient

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt} = 2(e^{-\zeta} - 1) \quad (2.19)$$

Pour étudier le comportement de la solution de cette équation il convient de passer dans le plan de phase. Posons $X = [u, v]^\top = [\zeta, \frac{d\zeta}{dt}]^\top$ on a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = F(X) = \begin{bmatrix} v \\ -v + 2(e^{-u} - 1) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Le seul point d'équilibre est l'origine. Au voisinage de l'équilibre le système s'écrit

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \text{ avec } A = DF(X)(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice A est de trace négative et de déterminant positif, l'origine est donc asymptotiquement stable. Le champ est à divergence négative $\text{div}(F) = -1$, le critère de Bendixon indique donc qu'il n'existe pas de trajectoires périodiques et que toutes les solutions bornées convergent vers l'équilibre : il n'existe donc pas de cycle limite. Il ne reste donc plus qu'à montrer que les trajectoires sont bornées.

Le diagramme de phase de l'équation (2.20), présenté sur la figure 2.5, est dans ce contexte très instructif,

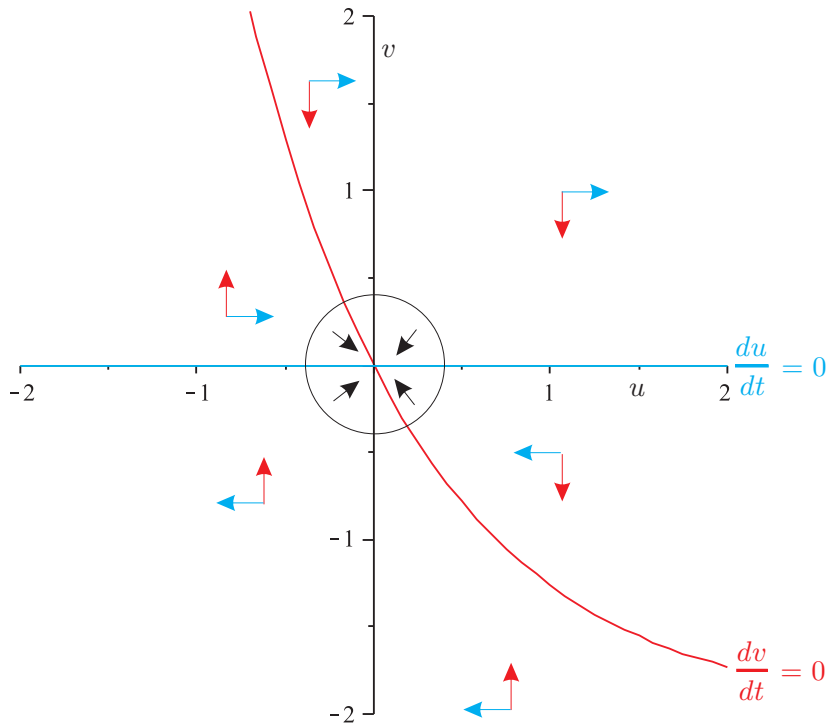


FIG. 2.5 – Diagramme de phase du flot associé à l'équation différentielle de la sphère isotherme.

on remarque que les trajectoires tournent autour de l'équilibre. En considérant l'application de premier retour de Poincaré ϕ_n sur l'axe $v = 0$ par exemple, on note que $\phi_n(X) - X < 0$. À chaque tour on se rapproche donc de la zone d'attraction linéaire dans laquelle on finira donc par tomber car il n'existe pas de cycle limite. Ainsi pour tout $X(0) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = 0$.

Le comportement asymptotique ($t \rightarrow +\infty$) de la solution $u = \zeta$ s'obtient en considérant une combinaison linéaire des exponentielles des valeurs propres de A , soit $(-1 \pm \sqrt{7})/2$, ainsi

$$\text{lorsque } x \rightarrow +\infty, \zeta(x) \rightarrow \frac{k_1 \cos \left[\ln \left(x^{\sqrt{7}/2} \right) \right] + k_2 \sin \left[\ln \left(x^{\sqrt{7}/2} \right) \right]}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

En majorant les fonctions trigonométriques, on a donc $\zeta(x) \sim k/x^{1/2}$ en $x \rightarrow +\infty$, soit $y(x) \sim k/x^{-1/2} - \ln(2/x^2)$ soit pour la densité en variable r

$$\rho(r) \sim \frac{2mr_o^2}{\alpha^3 r^2} \left(1 \pm \left(\frac{r_k}{r} \right)^{1/2} \right) \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

La longueur r_k se calcule en écrivant proprement la majoration, en revenant aux variables physiques et en calculant le laplacien, elle n'a que peu d'intérêt. Le signe \pm provient de l'encadrement des fonctions trigonométriques, peu importe ... Ce qu'il faut remarquer dans cette relation c'est que la masse d'une sphère isotherme est toujours infinie si celle est d'extension infinie ($r \rightarrow +\infty$).

La sphère isotherme est donc associée à une fonction de distribution $f \notin \mathcal{E}_{M,H}$, le problème de l'équilibre thermodynamique d'un système autogravitant est donc posé!

Pour remédier à ce « léger » problème, I. King introduisit son fameux modèle!

Le remède de King

Comment concilier une masse qui diverge et un modèle gaussien assez universel dans ce contexte? L'idée vint à I. King [9], d'imaginer une coupure ... Si une étoile d'un système autogravitant possède une vitesse trop grande elle ne sera plus liée à ce système, il décida donc d'introduire une borne supérieure dans l'intégration de la fonction de distribution qui donne la densité de masse! Cette borne en vitesse en introduit mécaniquement une nouvelle en rayon, qui est interprétée comme une sorte de rayon de marée au delà duquel toute étoile serait perdue pour l'amas ... C'est une excellente idée physique, mais le problème est que la fonction de distribution associée à un tel modèle n'est pas une solution du problème de Vlasov-Poisson dans lequel le nombre de particules est conservé. Elle entre dans le cadre de l'équation de Fokker-Planck qui permet cette variation.

Il n'en demeure pas moins qu'avec sa justification heuristique et surtout le fait qu'il permette grâce à ses 3 paramètres de parfaitement pouvoir ajuster les profils observés pour un grand nombre d'amas globulaires, le modèle de King revêt un intérêt tout particulier.

La fonction de distribution d'un modèle de King s'écrit

$$f_k(E) = \begin{cases} \rho_o (2\pi\sigma^2)^{-3/2} [\exp(\frac{E_\ell - E}{\sigma^2}) - 1] & \text{si } E < E_\ell \\ 0 & \text{si } E > E_\ell \end{cases}$$

Le paramètre E_ℓ est l'énergie de libération au delà de laquelle l'étoile ne fait plus partie du système. La densité de masse associée au modèle de King s'écrit en intégrant sur les vitesses

$$\rho(\Psi) = \rho_o \left[e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right]$$

avec

$$\Psi(r) = E_\ell - m\psi(r) \quad \text{et} \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

En remarquant que $\Delta(\Psi) = -m\Delta(\psi) = -4\pi G\rho$, on a donc en coordonnées sphériques

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G\rho_o r^2 \left[e^{\Psi/\sigma^2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Psi}}{\sigma}\right) - \sqrt{\frac{4\Psi}{\pi\sigma^2}} \left(1 + \frac{2\Psi}{3\sigma^2}\right) \right]$$

qu'il n'est pas question de résoudre autrement que numériquement. Une des conditions aux limites est imposée par le fait que le centre du système est en équilibre, la somme des forces qui lui sont appliquées est nulle ainsi

$$\left. \frac{d\Psi}{dr} \right|_{r=0} = -m \left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = \overrightarrow{F(0)} \cdot \hat{e}_r = 0$$

l'autre condition initiale est l'un des 3 paramètres du modèle : $\Psi(0) = E_\ell - m\psi(0)$. Il est clair que $\Psi(0) > 0$, en effet $E_o = m\psi(0)$ représente l'énergie d'une particule au repos au centre du système, il s'agit donc de l'énergie de liaison la plus négative que peut avoir une particule dans le système, son module est donc forcément supérieur à celui de l'énergie de libération E_ℓ . En lieu et place de $\Psi(0)$ on utilise souvent un paramètre sans dimension

$$W_o = \frac{\Psi(0)}{m\sigma^2} = \frac{E_\ell - m\psi(0)}{\sigma^2}$$

Nous avons représenté sur la figure 2.6, plusieurs profils de densité correspondants à des modèles de King.

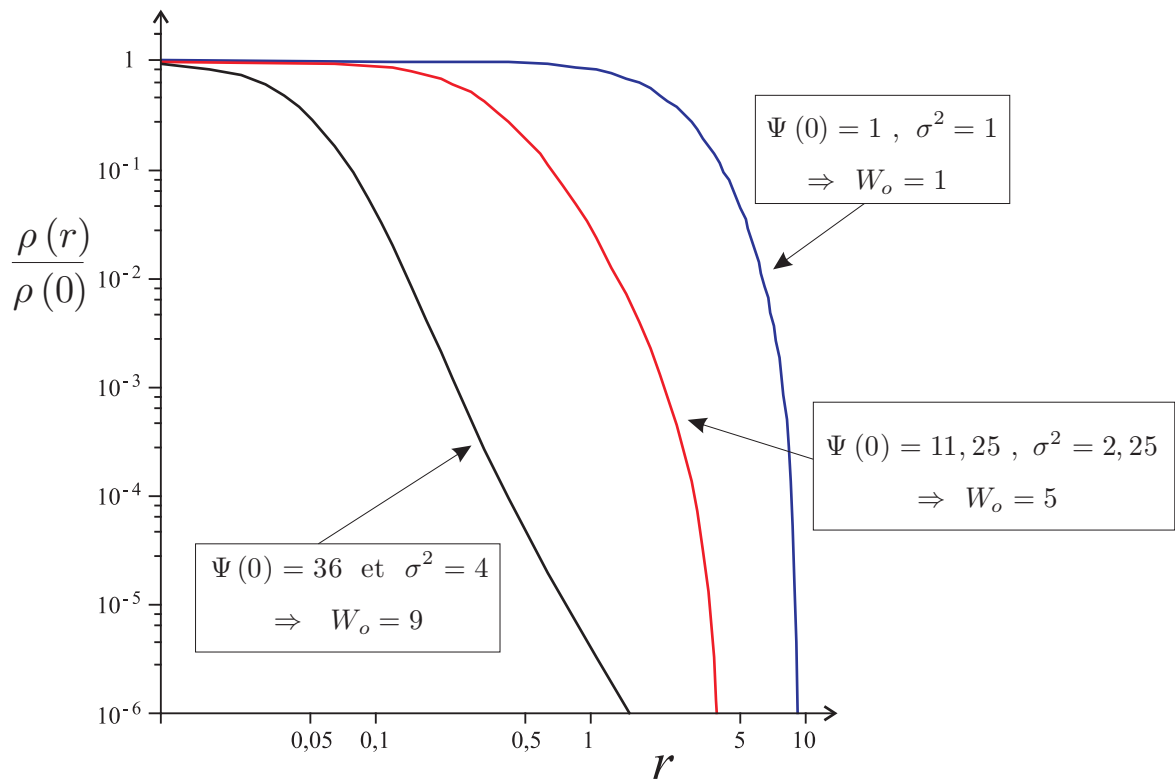


FIG. 2.6 – Variations sur le modèle de King avec $4\pi G\rho_o = 1$. La résolution numérique donne $R_{W_o = 9} = 8,765$; $R_{W_o = 5} = 4,109$ et $R_{W_o = 1} = 9,25$

On peut constater que les modèles de King possèdent une structure Cœur - Halo. Le rayon du cœur est d'ailleurs bien souvent utilisé comme un paramètre de ces modèles en le définissant comme

$$r_c = \sqrt{\frac{3\sigma^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho_o}}$$

L'hypothèse sous-jacente dans ce modèle est qu'il existe une valeur R telle que

$$\Psi(R) = E_\ell - m\psi(R) = 0$$

on a donc $\rho(R) = 0$ et R correspond au rayon du système qui est donc fini, comme sa masse totale

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr.$$

Un autre paramètre important des modèles de King est leur paramètre de concentration, que l'on peut définir comme

$$c = \log_{10}(R/r_c)$$

Lorsque c ou W_o tendent vers l'infini, le rayon du modèle de King augmente et le profil de densité se rapproche de celui d'une sphère isotherme.

Même si leur origine physique est discutable, les modèles de King ont une capacité d'ajustement qui les rend redoutables lorsqu'on les applique aux profils d'objets tels que les amas globulaires dont ils sont devenus la pierre angulaire de la représentation.

2.5.7 Bilan : quel profil pour quel objet ?

Le profil de densité des galaxies

Les observations de galaxies elliptiques témoignent d'un profil de densité en loi de puissance avec plusieurs pentes. Les valeurs de ces pentes sont compatibles avec celle d'une sphère isotherme (-2) selon l'analyse de [12]. Le profil de luminosité de ces galaxies est assez bien reproduit par la loi de de Vaucouleurs (Einasto-Sersic $n = 4$). Le bulbe des galaxies spirale possède le même type de profil de luminosité. Le profil du halo de matière noire fait toujours l'objet d'un débat. Dans ce domaine, les simulations numériques sont le plus sûr guide ... L'analyse exhaustive de Merritt [3] s'est penchée sur la compilation d'une grande famille de simulations de formation d'amas de galaxies, de galaxies au sein d'un amas ou de galaxies isolées. Leur analyse consiste en un ajustement statistique du profil de densité lissé issu des simulation par divers modèles théoriques. Une partie de leurs conclusions peuvent être lues dans leur table 1 reproduite ci dessous

TABLE 1
EMPIRICAL THREE-PARAMETER MODELS

HALO ID (1)	(1, 3, γ)				EINASTO $r^{1/n}$				PRUGNIEL-SIMION			
	r_s (kpc) (2)	$\log \rho_s$ ($M_\odot \text{pc}^{-3}$) (3)	γ (4)	Δ (dex) (5)	r_s (kpc) (6)	$\log \rho_s$ ($M_\odot \text{pc}^{-3}$) (7)	n_{Ein} (8)	Δ (dex) (9)	R_s (kpc) (10)	$\log \rho_s^f$ ($M_\odot \text{pc}^{-3}$) (11)	n_{PS} (12)	Δ (dex) (13)
Cluster-sized Halos												
A09.....	626.9	-3.87	1.174	0.025	5962	-6.29	6.007	(0.015)	2329	-2.73	3.015	0.021
B09.....	1164	-4.75	1.304	(0.037)	17389	-7.66	7.394	0.041	4730	-3.34	3.473	0.038
C09.....	241.8	-3.27	0.896	0.040	1247	-4.95	3.870	0.030	738.9	-2.55	2.192	(0.016)
D12.....	356.1	-3.82	1.251	0.026	2663	-6.02	5.939	0.020	1232	-2.52	3.147	(0.019)
E09.....	382.5	-3.96	1.265	0.033	2611	-6.06	5.801	0.032	1231	-2.62	3.096	(0.030)
F09.....	333.9	-3.51	1.012	0.030	1255	-5.26	4.283	0.025	697.3	-2.63	2.400	(0.017)
Galaxy-sized Halos												
G09.....	27.96	-3.16	1.163	(0.020)	189.0	-5.22	5.284	0.023	114.4	-4.02	3.135	0.028
G01.....	35.34	-3.36	1.275	0.029	252.6	-5.51	5.873	(0.028)	146.0	-2.01	3.425	0.032
G02.....	53.82	-3.59	1.229	0.034	391.4	-5.74	5.725	(0.031)	214.9	-2.34	3.243	0.036
G03.....	54.11	-3.70	1.593	0.028	405.6	-5.98	7.791	(0.023)	229.1	-1.47	4.551	0.034
Spherical-Collapse Halos												
M11.....	0.0175	2.66	0.006	0.223	0.244	0.27	3.426	(0.043)	0.187	2.57	2.445	0.051
M35.....	0.0180	1.62	0.039	0.249	0.240	-0.70	3.214	(0.059)	0.185	1.47	2.301	0.061

NOTES.— Col. (1): Object identification. Cols. (2)–(5): (1, 3, γ) model (eqs. [13] and [14]) scale radius r_s , scale density ρ_s , inner profile slope γ , and rms scatter of the fit. Cols. (6)–(9): Einasto $r^{1/n}$ model half-mass radius r_s , associated density ρ_s , profile shape n_{Ein} , and rms scatter of the fit. Cols. (10)–(13): Prugniel-Simion model scale radius R_s , scale density ρ_s^f (the spatial density ρ_s at $r = R_s$ is such that $\rho_s = \rho_s^f e^{-\gamma}$), profile shape n_{PS} , and rms scatter of the fit. Note that the radius and density units do not apply to M11 and M35. For each halo, of the three models shown here, the model having the lowest residual scatter is placed in parentheses.

On retiendra que le meilleur des profils (α, β, γ) est obtenu avec $\alpha = 1$ et $\beta = 3$ mais que ce type de profil permet généralement un ajustement de moins bonne qualité que les profils exponentiels. Il n'existe pas de profil universel mais la loi de Prugniel-Simien est relativement efficace pour l'ensemble des simulations étudiées. L'indice correspondant est de l'ordre $n_{PS} \approx 3$.

Le profil de densité des amas Globulaires.

Notre galaxie compte 143 amas globulaires confirmés. Ils se caractérisent par deux types de profils de densité : 80% sont des structures Cœur-Halo et 20% ont un profil de cœur effondré (voir notamment [14])

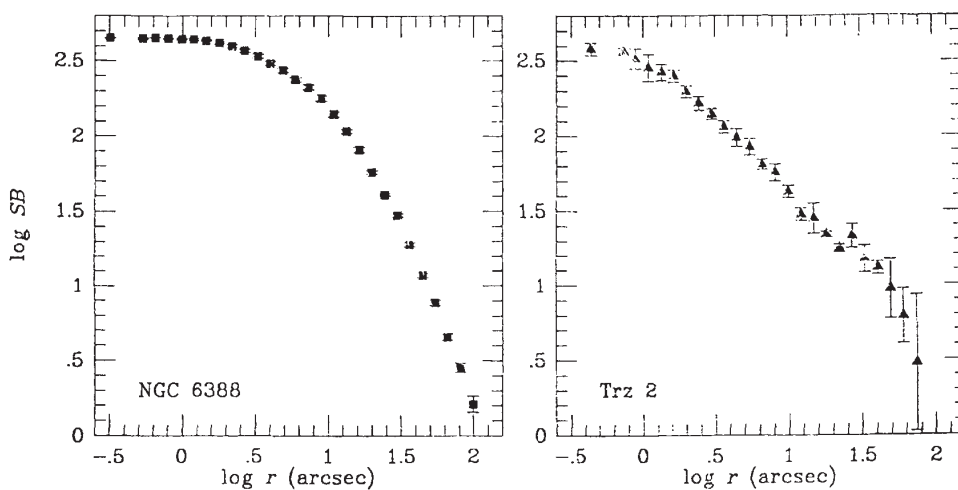


FIG. 2.7 – Profil de luminosité de deux amas globulaires typiques : Cœur halo à droite, cœur effondré à gauche

Les structures cœur-halo sont très bien représentées par un modèle de King avec $c \approx 2$, comme on peut le voir sur la figure 2.8 issue de l'excellente revue [13].

Les cœurs effondrés sont caractérisés par une loi de puissance du type R^{-1} pour la lumière projetée soit r^{-1} pour la densité de masse en utilisant l'inversion d'Abel.

L'explication de cette ségrégation est fort simple ... Les amas naissent isothermes tronqués et leur évolution au sein de la galaxie exerce un harcèlement qui contribue à concentrer leur cœur jusqu'à ce que l'instabilité d'Antonov (ou gravothermale) (voir 3.3) conduise à l'effondrement de leur cœur. Cette affirmation se trouve parfaitement illustrée par la figure 2.9 où seuls les amas les plus dynamiquement vieux ont un cœur effondré.

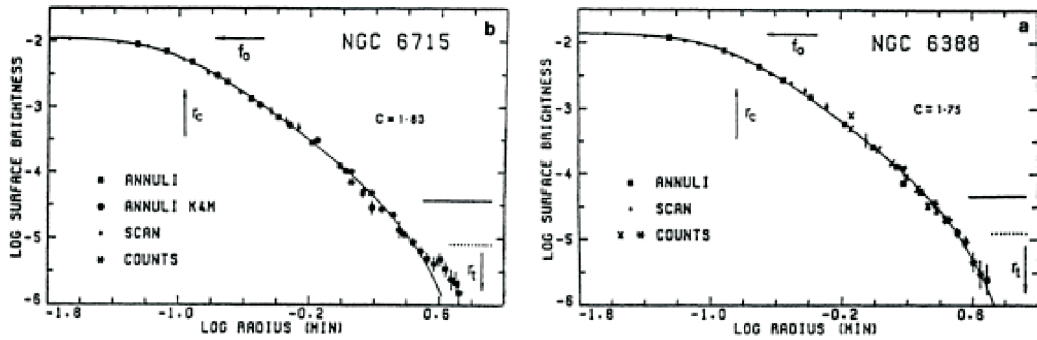


FIG. 2.8 – Ajustement du profil de luminosité de deux amas globulaires typiques par des modèles de King.

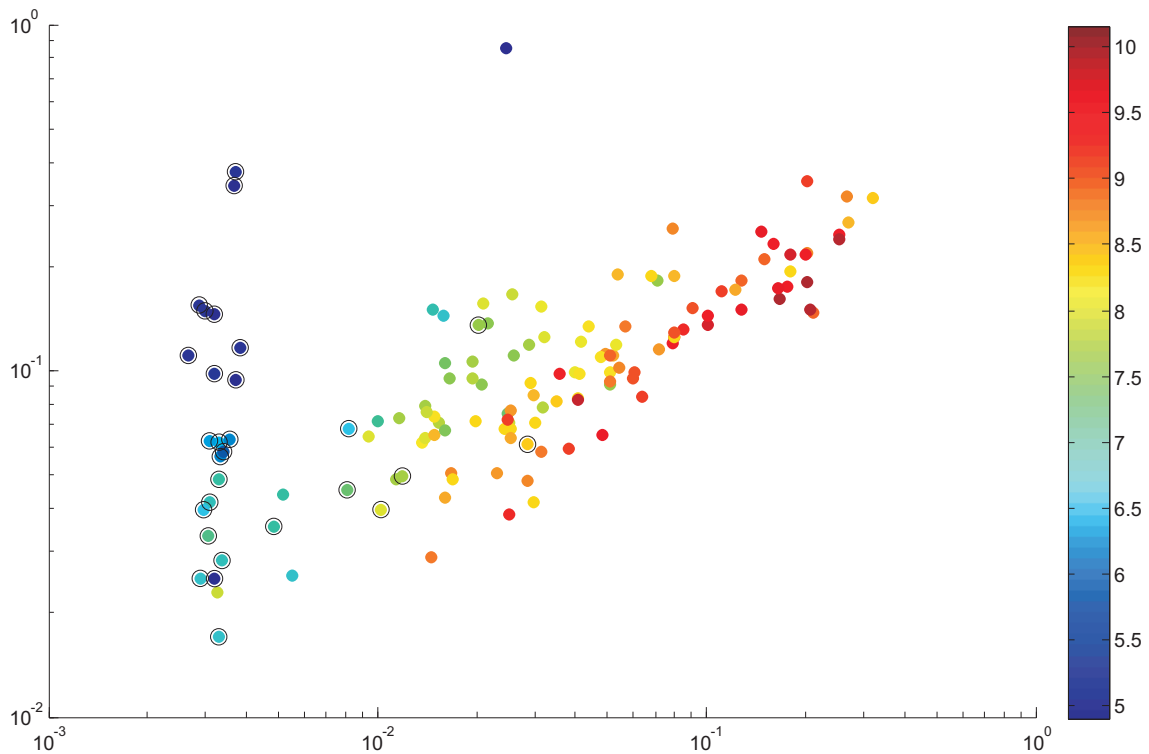


FIG. 2.9 – Rayon de moitié de masse en fonction du rayon de cœur (en unités de rayon de marée) pour tous les amas globulaires du catalogue de Harris [15]. La couleur représente le logarithme du temps de relaxation à 2 corps et les amas entourés ont un cœur effondré.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes autogravitants

3.1 L'instabilité de Jeans

Cette instabilité est un mécanisme fondamental en astrophysique. Il convient de connaître tous les éléments qui la constitue que ce soit sur le plan physique ou mathématique. Elle est invoquée dans le contexte d'un système homogène (dans l'espace des positions) et repose comme nous allons le voir sur de nombreuses approximations. Nous traiterons le cas sphérique mais de nombreuses autres géométries sont abordées de façon plus ou moins heureuses (voir [10]).

Considérons le système de Vlasov-Poisson

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \Delta \psi = 4\pi G m \int f d\mathbf{p} \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité linéaire d'un état d'équilibre homogène $f_o = f_o(\mathbf{p})$, nous écrivons la fonction de distribution et le potentiel sous la forme

$$\begin{cases} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_o(\mathbf{p}) + \varepsilon f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + o(\varepsilon) \\ \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_o(\mathbf{r}) + \varepsilon \psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad \text{avec } |\varepsilon| \ll 1$$

En ne conservant que les termes du premier ordre, le système de Vlasov-Poisson devient

$$\begin{cases} m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} - \varepsilon \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} - m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \right] = 0 \\ \Delta \psi_o - 4\pi G m \int f_o d\mathbf{p} = \varepsilon [4\pi G m \int f_1 d\mathbf{p} - \Delta \psi_1] \end{cases}$$

On fait alors l'hypothèse que le couple (f_o, ψ_o) est une solution d'équilibre du système, ce qui revient à imposer que

$$m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = \Delta \psi_o - 4\pi G m \int f_o d\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Arrive alors l'hypothèse connue sous le nom d'arnaque de Jeans (Jeans' Swindle pour les puristes...) qui consiste à supposer que

$$-m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = o(\varepsilon)$$

Notons que cette arnaque n'en est peut-être pas une si l'on en croit [11]. Dans ces conditions, du système de Vlasov-Poisson linéarisé, il ne reste plus que

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \Delta \psi_1 = 4\pi G m \int f_1 d\mathbf{p} \end{cases}$$

On écrit alors la décomposition

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_a(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_a(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

qui revient à faire une transformation de Fourier sans le dire... On obtient alors

$$\begin{cases} -\omega f_a(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{k} f_a(\mathbf{p}) - m \psi_a(\mathbf{r}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ -k^2 \psi_a(\mathbf{r}) = 4\pi G m \int f_a(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \end{cases}$$

la première équation permet d'avoir

$$f_a(\mathbf{p}) = \frac{m \psi_a(\mathbf{r}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}}}{\left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m} - \omega \right]}$$

que l'on injecte dans la deuxième pour avoir

$$-k^2 = 4\pi G m^2 \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}}}{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m} - \omega} d\mathbf{p} \quad (3.1)$$

qui constitue une relation de dispersion générale. Si l'équilibre est supposé isotherme¹

$$f_o(\mathbf{p}) = \frac{\nu_o}{(2\pi m^2 \sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m^2 \sigma^2}\right) \cdot 1_{|\mathbf{r}| < R}$$

la relation (3.1) s'écrit

$$-k^2 = 1_{|\mathbf{r}| < R} \frac{4\pi G m^2 \nu_o}{(2\pi m^2 \sigma^2)^{3/2}} \int \frac{-\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{m^2 \sigma^2} \exp\left(-\frac{p^2}{2m^2 \sigma^2}\right)}{\left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m} - \omega \right]} d\mathbf{p}$$

En choisissant l'axe Ox tel que $\mathbf{k} = k \hat{e}_x$ avec $k \in \mathbb{R}^+$, l'intégration dans l'espace des vitesses en coordonnées cartésiennes se poursuit

$$k^2 = \frac{4\pi G m^2 \nu_o}{(2\pi m^2 \sigma^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{k p_x}{m^2 \sigma^2} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2m^2 \sigma^2}\right)}{\left[\frac{k p_x}{m} - \omega \right]} dp_x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2m^2 \sigma^2}\right) dt \right]^2 \quad \text{pour } r < R$$

¹La limitation du rayon provient de l'analyse présentée en section 2.5.6.

attendu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2m^2\sigma^2}\right) dt = \sqrt{2\pi m^2\sigma^2}$$

en posant $u = \frac{px}{m\sigma}$ et $\omega_o^2 = 4\pi Gm\nu_o$ on obtient finalement la relation de dispersion

$$1 = \left(\frac{\omega_o}{k\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{u - \frac{\omega}{k\sigma}} du \quad \text{pour } r < R$$

Lorsque $\omega = 0$, cette relation dégénère en

$$k^2 = k_o^2 := \left(\frac{\omega_o}{\sigma}\right)^2 = \frac{4\pi Gm\nu_o}{\sigma^2} \quad (3.2)$$

dans le cas général nous avons donc

$$1 - \left(\frac{k_o}{k}\right)^2 F(z) = 0 \quad \text{avec } z = \frac{\omega}{k\sigma} \text{ et } F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{u - z} du$$

Les paramètres k et σ sont des nombres réels positifs, il en va différemment de ω qui peut, quant à lui, être un nombre complexe. En écrivant $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient alors

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_a(\mathbf{p}) e^{ik(1-\sigma xt)} e^{k\sigma yt} \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_a(\mathbf{r}) e^{ik(1-\sigma xt)} e^{k\sigma yt} .$$

La stabilité des solutions (modes) dépend donc uniquement du signe de $y = \text{Re}(z)$. L'existence de ces modes est donnée par l'étude des solutions de l'équation de dispersion. En décomposant les parties réelle et imaginaires de celle-ci on obtient

$$\left[1 - \left(\frac{k_o}{k}\right)^2 \text{Re}(F(z)) \right] + i \left[\left(\frac{k_o}{k}\right)^2 \text{Im}(F(z)) \right] = 0$$

L'existence d'un mode est donc subordonnée à l'existence de solutions pour le système

$$\begin{cases} \text{Im}(F(z)) = 0 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)^2 + y^2} du = 0 \\ 1 - \left(\frac{k_o}{k}\right)^2 \text{Re}(F(z)) = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{k_o}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(u-x)e^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)^2 + y^2} du \end{cases}$$

La première de ces équations n'admet de solution en y que pour $x = 0$. Pour chaque valeur de y , la fonction

$$\varphi_y(x) = \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)^2 + y^2} du$$

est telle que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_y(x) = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \text{signe}[\varphi_y(x)] = \text{signe}[x] & \text{si } y > 0 \\ \text{signe}[\varphi_y(x)] = -\text{signe}[x] & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Comme on peut le voir par exemple, sur quelques représentations graphiques (voir figure 3.1) de cette fonction.

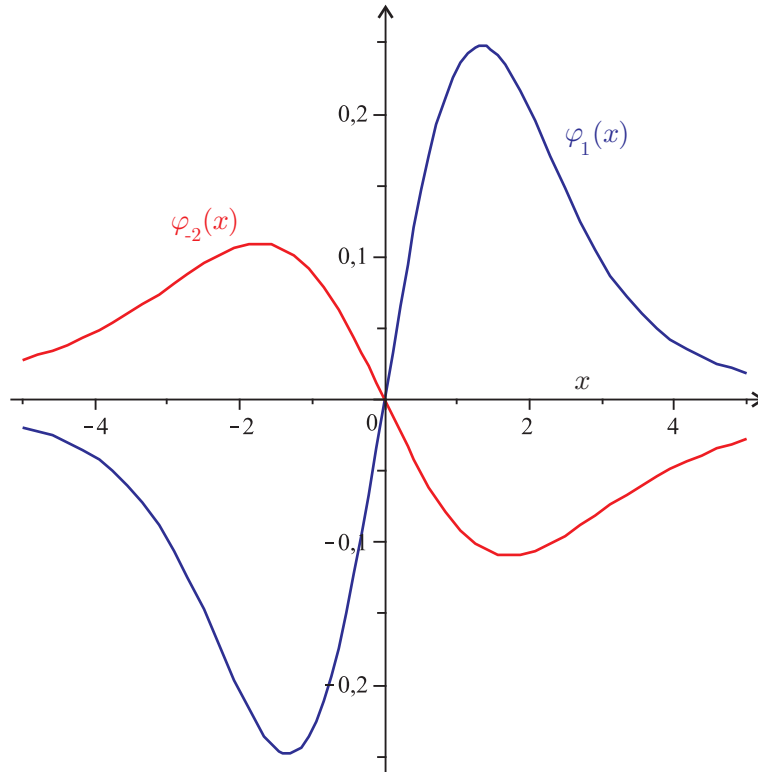


FIG. 3.1 – Représentation graphique de la fonction $\varphi_y(x)$ pour $y = 1$ (en bleu) et $y = -2$ (en rouge)

Pour chaque valeur de y , la première équation du système de dispersion impose donc $x = 0$. En reportant cette condition dans la deuxième équation nous obtenons

$$\left(\frac{k}{k_o}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}}{u^2 + y^2} du$$

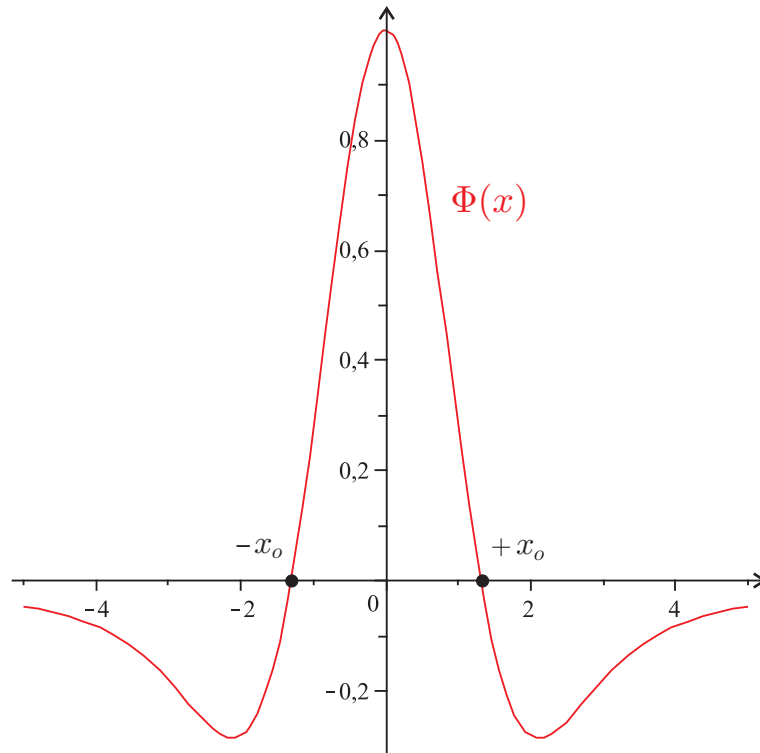
Il est clair que cette équation admet une solution positive pour chaque valeur de y .

Un dernier cas reste en suspens, il s'agit du cas ω réel, pour lequel $y = 0$ assure $\text{Im}(F(z)) = 0$. En ce qui concerne la partie réelle nous avons ici

$$\left(\frac{k}{k_o}\right)^2 = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{u - x} du$$

la représentation graphique de la fonction $\Phi(x)$ sur la figure ci-dessous, montre qu'il existe un

mode (k, ω) pourvu que $\frac{\omega}{k\sigma} \in [-x_o, +x_o]$.



En résumé, nous pouvons donc conclure :

– Si $\text{Im}(\omega) = 0$, les solutions linéaires sont oscillantes et donc **stables**. On a de plus

$$\begin{cases} k = k_o & \text{si } \omega = 0 \\ k = \left| \frac{x_o \sigma}{\omega} \right| > k_o & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

– Si $\text{Im}(\omega) < 0$, les solutions linéaires sont des oscillations d’amplitude croissante et donc **instables**, cette situation correspond à $k < k_o$.

– Si $\text{Im}(\omega) > 0$, les solutions linéaires sont des oscillations d’amplitude décroissante et donc **stables**, cette situation correspond à $k > k_o$.

L’instabilité de Jeans est supposée être à l’origine d’un grand nombre de processus astrophysique dans le domaine de la formation des étoiles, amas d’étoiles, galaxies etc...

De nombreuses études numériques de cette instabilité ont été effectuées, on retiendra que l’effondrement d’une sphère homogène de rayon supérieur à son rayon de Jeans produit en quelques temps dynamiques un profil de densité de type cœur-halo, le halo est en r^{-4} (voir par exemple [16] ou [17] dont est tirée la figure 3.2).

3.2 La stabilité par des méthodes énergétiques

3.2.1 Structure hamiltonienne de l’équation de Vlasov

Il est souvent mentionné que le système de Vlasov-Poisson est hamiltonien. C’est vrai, mais cela mérite quelques précisions, car ce n’est pas aussi simple que ce que l’on pourrait croire !

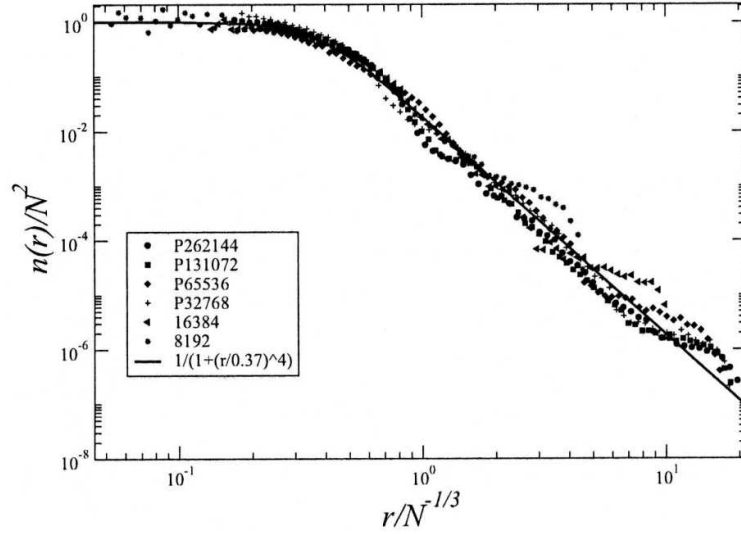


FIG. 3.2 – Densité normalisée en fonction du rayon normalisé après une instabilité de Jeans pour des systèmes sphériques homogènes. La légende indique le nombre de particules constituant le système. Figure tirée de l'article [17]

La définition du crochet de Poisson standard pour deux champs scalaires $A(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ et $B(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ donne

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial B}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.3)$$

L'équation de Vlasov s'écrit donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, E\} = 0 \quad (3.4)$$

Comme d'habitude

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\psi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - Gm^2 \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{\Gamma}' \quad \text{avec} \begin{cases} \mathbf{\Gamma} = (\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ d\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{r}d\mathbf{p} \end{cases} \quad (3.5)$$

est l'énergie d'une particule test évoluant dans le système. Si l'on considère un système discret composé d'un grand nombre de particules, E peut s'interpréter comme l'énergie moyenne détenue par chaque particule. La relation (3.4) n'est pas sous forme hamiltonienne pour plusieurs raisons dont la principale est la présence d'une dérivée partielle et non totale par rapport au temps. On peut toutefois remédier à ce problème en suivant la technique introduite par Morrisson ([27], [30], [28], [22], [29]).

Considérons une fonctionnelle de la fonction de distribution du système, c'est-à-dire une quantité F telle que

$$F[f] = \int \varphi(f, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma} \quad (3.6)$$

où φ est ce que l'on veut d'acceptable... Si par exemple φ ne dépend pas de $\mathbf{\Gamma}$, $F[f]$ s'appelle un casimir et l'on peut montrer qu'il s'agit d'une quantité conservée. Par définition, nous avons

$$\frac{dF}{dt} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial f} d\mathbf{\Gamma} \quad (3.7)$$

et nous remarquons au passage que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f} = \frac{\delta F}{\delta f} \quad (3.8)$$

où $\delta/\delta f$ est appelée dérivée fonctionnelle. Dans le cas (3.6), la dérivée fonctionnelle $\frac{\delta F}{\delta f}$ de F s'obtient par identification dans la relation

$$F[f + \delta f] - F[f] = \int \left[\frac{\delta F}{\delta f} \delta f + \mathcal{O}(\delta f) \right] d\mathbf{\Gamma} \quad (3.9)$$

En utilisant (3.7), (3.8) et (3.4), on peut écrire

$$\frac{dF}{dt} = \int \{E, f\} \frac{\delta F}{\delta f} d\mathbf{\Gamma} \quad (3.10)$$

En utilisant la définition (3.9), L'énergie totale contenue dans le système est une fonctionnelle qui s'écrit

$$H[f] := \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f(\mathbf{\Gamma}, t) d\mathbf{\Gamma} - \frac{Gm^2}{2} \int \frac{f(\mathbf{\Gamma}, t) f(\mathbf{\Gamma}', t)}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{\Gamma} d\mathbf{\Gamma}' \quad (3.11)$$

elle est de la forme (3.6), sa dérivée fonctionnelle est facile à calculer, on trouve

$$\frac{\delta H}{\delta f} = E \quad . \quad (3.12)$$

En intégrant par partie les deux dérivées de f dans le crochet de Poisson de l'intégrale de droite dans (3.10) et en utilisant (3.12) on obtient²

$$\frac{dF}{dt} = - \int \left\{ \frac{\delta H}{\delta f}, \frac{\delta F}{\delta f} \right\} f d\mathbf{\Gamma} = \int \left\{ \frac{\delta F}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f} \right\} f d\mathbf{\Gamma} \quad (3.13)$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{dF}{dt} = \langle F, H \rangle \quad (3.14)$$

où le crochet de Morrisson \langle , \rangle entre deux fonctionnelles $A[f]$ and $B[f]$ de la forme (3.6) est défini par

$$\langle A, B \rangle = \int \left\{ \frac{\delta A}{\delta f}, \frac{\delta B}{\delta f} \right\} f d\mathbf{\Gamma} \quad (3.15)$$

Quelques calculs simples montrent ce crochet est antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi

$$\langle A, \langle B, C \rangle \rangle + \langle B, \langle C, A \rangle \rangle + \langle C, \langle A, B \rangle \rangle = 0$$

ainsi l'équation (3.14) définit la structure hamiltonienne de l'équation de Vlasov. Il convient de remarquer que dans cette formulation, la variable canonique est la fonction de distribution qui est sa propre quantité conjuguée. À la différence de la mécanique habituelle où les quantité conjuguées \mathbf{r} et \mathbf{p} sont des vecteurs d'un espace de dimension finie, la structure hamiltonienne de la physique statistique non dissipative se déploie dans un espace de dimension infinie.

²Comme d'habitude, les termes de bord s'annulent avec la limite de f .

3.2.2 Application fondamentale à la stabilité

Dans sa formulation hamiltonienne (3.14), on peut toujours écrire l'équation de Vlasov sous la forme

$$\frac{dF}{dt} = \langle F, H \rangle = - \langle H, \cdot \rangle F := \mathcal{T}(F) \quad . \quad (3.16)$$

Il paraît clair que l'opérateur fonctionnel \mathcal{T} ne dépend pas explicitement du temps t : tout simplement parce que $H[f]$ est une quantité conservée dans la théorie de Vlasov ou la dissipation est négligée. Dans ce cas précis, la théorie des équations différentielles nous donne la solution générale de l'équation (3.16) sous la forme d'une série

$$F[f] = \exp[-(t - t_o) \langle H, \cdot \rangle] F[f_o] \quad (3.17)$$

$$= F[f_o] - \frac{(t-t_o)}{1!} \langle H, F \rangle_{f=f_o} + \frac{(t-t_o)^2}{2!} \langle H, \langle H, F \rangle \rangle_{f=f_o} + \dots \quad (3.18)$$

où nous avons noté $f_o = f(\mathbf{\Gamma}, t_o)$. Ce développement est obtenu simplement grâce au fait que H est conservé dans l'évolution selon t . On dit que (H, t) forme une paire de Noether. Le même raisonnement est applicable pour une paire de Noether (Λ, λ) quelconque (on pourra consulter à ce sujet [31]) : l'équation d'évolution s'écrira

$$\frac{dF}{d\lambda} = \langle F, \Lambda \rangle$$

et sa solution

$$F[f] = \exp[-(\lambda - \lambda_o) \langle \Lambda, \cdot \rangle] F[f_o]$$

$$= F[f_o] - \frac{(\lambda-\lambda_o)}{1!} \langle \Lambda, F \rangle_{f=f_o} + \frac{(\lambda-\lambda_o)^2}{2!} \langle \Lambda, \langle \Lambda, F \rangle \rangle_{f=f_o} + \dots$$

Lorsqu'il est soumis à une perturbation linéaire un système voit sa fonction de distribution évoluer de f_o à $f_o + \varepsilon f_1$. Si ε est un petit paramètre contrôlant la linéarité de la transformation, la fonction f_1 s'écrit généralement

$$f_1 = \{f_o, g\}$$

où g est appelé générateur de la perturbation. Cette équation permet d'assurer que l'état perturbé est bien une déformation de l'état antérieur ... il s'agit même d'une transformation canonique ! L'affaire est dans le sac : on introduit une fonctionnelle G telle que

$$\frac{\delta G}{\delta f} = g$$

et l'on montre facilement que pour toute fonctionnelle F de la fonction de distribution du système, on a

$$F[f] = F[f_o] - \frac{1}{1!} \langle G, F \rangle_{f=f_o} \varepsilon + \frac{1}{2!} \langle G, \langle G, F \rangle \rangle_{f=f_o} \varepsilon^2 + \dots$$

Il ne reste plus qu'à prendre $F = H$ et l'on obtient le développement en perturbation de l'énergie associé à une perturbation engendrée par g

$$\begin{aligned} H[f] &= H_o + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= H[f_o] - \varepsilon \langle G, H \rangle_{f=f_o} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \langle G, \langle G, H \rangle \rangle_{f=f_o} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le terme d'ordre 1 de ce développement s'écrit

$$H_1 = -\langle G, H \rangle_{f=f_o} = -\int \left\{ \frac{\delta G}{\delta f}, \frac{\delta H}{\delta f} \right\} f_o d\Gamma = \int \{E, g\} f_o d\Gamma \quad (3.20)$$

une intégration par partie donne alors

$$H_1 = \int \{f_o, E\} g d\Gamma \quad (3.21)$$

La forme poissonienne (3.4) de l'équation de Vlasov permet enfin d'écrire

$$H_1 = \int \frac{\partial f_o}{\partial t} g d\Gamma$$

Cette écriture permet de voir très simplement que la variation linéaire de l'énergie est nulle si l'on perturbe un état d'équilibre ... Un calcul juste un peu plus long donne

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} \langle G, \langle G, H \rangle \rangle_{f=f_o} - \frac{1}{2} \int \{g, f_o\} \{g, E\} d\Gamma - \frac{Gm^2}{2} \int \int \frac{\{g, f_o\} \{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' d\Gamma$$

L'étude du signe de cette quantité permet généralement de statuer sur la stabilité de l'équilibre décrit par f_o . Cette méthode puissante permet d'obtenir directement de nombreux résultats (voir [20])

Stabilité des systèmes sphériques isotropes

L'étude de section 2.2 nous indique qu'un système sphérique isotrope ou anisotrope est décrit par une fonction de distribution de la forme $f_o = f_o(E, L^2)$, le cas isotrope étant le cas particulier dans lequel $f_o = f_o(E)$. Un rapide calcul montre que dans ce cas

$$\{g, f_o\} = \frac{\partial f_o}{\partial E} \{g, E\} + \frac{\partial f_o}{\partial L^2} \{g, L^2\} := f_{o,E} \{g, E\} + f_{o,L^2} \{g, L^2\}$$

Nous ne considérerons dans cette partie que le cas des perturbations *préservantes* (voir [20]), c'est-à-dire celle dont le générateur vérifie la propriété

$$\{g, f_o\} = f_{o,E} \{g, E\}$$

Ces perturbations représentent la totalité de celles affectant les systèmes sphériques isotropes, dans ce cas en effet $f_{o,L^2} \equiv 0$. On montre assez facilement que les perturbations radiales (invariantes par rotation) d'un système sphérique anisotrope sont telles que $\{g, L^2\} = 0$ et sont aussi des perturbations préservantes. La condition $\{g, L^2\} = 0$ permet aussi d'envisager certaines perturbations non radiales assez particulières comme on peut le vérifier ...

Pour ce type de perturbation on a donc

$$H^{(2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{\{g, f_o\}^2}{f_{o,E}} d\Gamma - \frac{Gm^2}{2} \int \int \frac{\{g, f_o\} \{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' d\Gamma$$

Si la fonction de distribution est monotone décroissante $f_{o,E} < 0$, on peut toujours écrire

$$H^{(2)} = +\frac{1}{2} \int \frac{\{g, f_o\}^2}{|f_{o,E}|} d\Gamma - \frac{Gm}{2} \int \{g, f_o\} d\Gamma \int \frac{m \{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma'$$

en posant

$$\rho_1 := m \int \{g, f_o\} d\mathbf{p} \quad \text{et} \quad \psi_1 := -G \int \frac{\rho_1'}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\mathbf{q}' \Leftrightarrow \Delta\psi_1 = 4\pi G\rho_1$$

on trouve assez vite que

$$H^{(2)} = +\frac{1}{2} \int \frac{\{g, f_o\}^2}{|f_{o,E}|} d\Gamma + \frac{1}{2} \int \rho_1 \psi_1 d\mathbf{r}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si a et b sont deux fonctions sur Ω et si les intégrales ont un sens

$$\left(\int_{\Omega} a \times b \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} a^2 \right) \times \left(\int_{\Omega} b^2 \right)$$

on en déduit que

$$\left(\int \frac{\{g, f_o\}}{|f_{o,E}|^{1/2}} \times |f_{o,E}|^{1/2} d\mathbf{p} \right)^2 \leq \left(\int \left[\frac{\{g, f_o\}}{|f_{o,E}|^{1/2}} \right]^2 d\mathbf{p} \right) \times \left(\int \left[|f_{o,E}|^{1/2} \right]^2 d\mathbf{p} \right)$$

soit

$$\rho_1^2 \leq \left(\int \frac{\{g, f_o\}^2}{|f_{o,E}|} d\mathbf{p} \right) \times \left(\int |f_{o,E}| d\mathbf{p} \right)$$

en intégrant le premier terme sur les positions, on a donc la majoration

$$H^{(2)} \geq +\frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\int |f_{o,E}| d\mathbf{p}} d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \rho_1 \psi_1 d\mathbf{r}$$

le second terme est négatif car $\rho_1 = (4\pi G)^{-1} \text{div}(\text{grad}(\psi_1))$, en intégrant une fois par partie

$$\frac{1}{2} \int \rho_1 \psi_1 d\mathbf{r} = 0 - \frac{1}{8\pi G} \int |\text{grad}(\psi_1)|^2 d\mathbf{r}$$

On obtient finalement

$$H^{(2)} \geq W^{(2)} := +\frac{1}{2} \int \frac{\rho_1^2}{\int |f_{o,E}| d\mathbf{p}} d\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi G} \int |\text{grad}(\psi_1)|^2 d\mathbf{r}$$

La quantité $W^{(2)}$ s'interprète comme le premier ordre non nul de la variation d'énergie lors d'une perturbation d'une sphère autogravitante gazeuse. Elle intervient dans l'étude de la stabilité d'une étoile. La quantité $H^{(2)}$ est l'équivalent pour un système sphérique d'étoiles possédant la même répartition de masse. La majoration présentée ici constitue la première loi d'Antonov : si l'étoile est stable, ce qui correspond à $W^{(2)} > 0$, alors le système d'étoile possédant la même répartition de masse l'est aussi ! Notons que cette loi d'Antonov est présentée ici dans le contexte d'un système sphérique anisotrope, ce qui constitue une généralisation du résultat classique présenté par exemple dans [4]. Cette généralisation, due à [20], est le fruit l'utilisation de la formulation hamiltonnienne de l'équation de Vlasov qui permet de s'affranchir d'hypothèses pour écrire la variation d'énergie.

L'étude du signe de $H^{(2)}$ à occupé la communauté des dynamiciens stellaires pendant une trentaine d'année de 1960 au milieu des années 90. Les premières preuves très techniques ont

été raffinées par diverses méthodes pour aboutir à des versions simples et générales. Le résultat final [20], montre que

$$W^{(2)} > 0 .$$

L'idée de la preuve repose sur différentes majorations et factorisations du terme négatif possibles uniquement en géométrie sphérique. La conclusion est donc la suivante :

Un système autogravitant sphérique tel que $f_{o,E} < 0$ est stable contre toutes les perturbations préservantes. Ce résultat englobe en une seule formulation les résultats indépendants de stabilité :

- la stabilité contre tout type de perturbation des systèmes autogravitants sphériques et isotropes dont la fonction de distribution est décroissante (voir [4] pour les références et l'histoire de cette preuve) ;
- la stabilité contre les perturbations radiales des systèmes autogravitants sphériques et anisotropes dont la fonction de distribution est décroissante (voir [33] pour la première preuve simple).

Il s'applique aussi aux perturbations non radiales mais telles que $\{g, L^2\} = 0$ qui sont moins facilement interprétables d'un point de vue physique.

Reste donc le cas de la stabilité des systèmes sphériques contre les perturbations non préservantes, et le douloureux problème des systèmes non sphériques. La fameuse instabilité d'orbite radiale entre dans la première catégorie ...

L'instabilité d'orbites radiales

Dès 1971, utilisant les méthodes de water-bag³ l'équipe française de Feix, obtenait la stabilité des systèmes sphériques isotropes décroissants contre tout type de perturbation. Cinq ans plus tard, dans un article d'une incroyable technicité ils récidivaient en affirmant, toujours en utilisant le water-bag, que ce résultat se généralise aux systèmes anisotropes. Ce résultat était en contradiction avec ceux de l'école russe qui sous l'impulsion d'Antonov depuis le début des années 1970, avait « démontré⁴ » qu'un système anisotrope principalement constitué d'étoiles en orbite radiales doit être instable. Avec le développement des premières véritables simulations numériques dans le milieu des années 1980, l'affaire fut tranchée : Merritt et Aguilar , puis Barnes montrèrent que ce type de système sphérique fortement anisotrope dans l'espace des vitesses se déformait en quelques temps dynamiques pour former une barre, le rendant plus ou moins elliptique suivant la proportion d'énergie cinétique radiale contenue dans le système. L'idée d'utiliser ce mécanisme pour produire des galaxies elliptiques primordiales était lancée ! On pourra trouver dans l'article de revue [39], tous les détails de cette histoire. Les premières preuves de cette instabilité sont très techniques et basées sur une décomposition de la fonction de distribution sur une base de fonction de l'espace des phases. C'est justement ce genre de décomposition qui rendait la preuve du water-bag de 1976 inopérante (voir [20]) : pour un système sphérique composé de particules en orbites purement radiales la fonction de distribution est très singulière et s'écrit

$$f_o(E, L^2) = \varphi(E) \delta(L^2)$$

³Ces méthodes reviennent à approximer la fonction de distribution par une fonction constante par morceau. On injecte ensuite cette approximation dans le système de Vlasov-Poisson et on étudie le spectre des perturbations.

⁴Tout comme celle des français d'Orléans, les preuves russes sont assez incompréhensibles de part leur technicité ou leur contexte.

Si φ est une fonction positive quelconque, la distribution de Dirac en $L^2 = 0$ assure le caractère radial des orbites sélectionnées. Pour décrire une éventuelle instabilité d'orbites radiales il faut donc choisir une base qui engendre des fonctions aussi singulières, ce qui n'est pas le cas de l'hypothèse water-bag ... La seule preuve énergétique de cette instabilité est l'œuvre récente de [40]. Ce résultat est basé sur une théorie physiquement très ancienne, puisque dès la fin du XIX^{ème} siècle Lord Thomson montrait que certains systèmes pouvaient être déstabilisés lorsqu'on leur permettait de dissiper une partie de leur énergie. Ces travaux ont trouvé leur confirmation théorique dans toute une série d'articles publiés de 1994 à 2009 par l'équipe de Marsden sur le thème des instabilités induites par la dissipation. L'idée de ces résultats est la suivante : un système hamiltonien à l'équilibre possédant des modes d'énergie négative⁵ peut être stable ou instable. Si par contre, on introduit dans ce système des facteurs de dissipation, le système n'est alors plus hamiltonien et les modes d'énergie négative deviennent instables. L'idée développée dans [40] est entièrement basée sur ce résultat. En prenant une fonction de distribution de la forme

$$f_o(E, L^2) = \varphi(E) d_a(L^2)$$

avec $d_a(L^2) \rightarrow \delta(L^2)$ lorsque $a \rightarrow 0$. Dans cette limite, la variation d'énergie engendrée par le générateur g s'écrit à sous la forme

$$\begin{aligned} H_a^{(2)} &= o(a) - \frac{Gm^2}{2} \int \int \frac{\{g, f_o\} \{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' d\Gamma \\ &= o(a) - \frac{1}{8\pi G} \int |\text{grad}(\psi_1)|^2 d\mathbf{r} < 0 \end{aligned}$$

pour une large classe de perturbations. En conclusion, les systèmes sphériques anisotropes possèdent des modes d'énergie négatives lorsque leur espace des phases devient surpeuplé du côté des orbites radiales. Nous avons vu en introduction de cette partie que le système de Vlasov-Poisson est hamiltonien. Les résultats de Marsden impliquent donc l'instabilité si le système peut dissiper son énergie.

Il est clair que théoriquement le système de Vlasov-Poisson est strictement non-dissipatif, cependant dans la réalité de la dynamique stellaire, ou dans sa simulation numérique, la présence d'un minimum de dissipation est inéluctable (gaz, collisions, rayonnement gravitationnel ...) ou même le schéma numérique dans le cas des simulations). Si la plupart des systèmes sphériques sont insensibles à ces fluctuations, cela n'est pas le cas des systèmes principalement constitués d'orbites radiales, pour lesquels il existe de nombreux modes d'énergie négative. Le mécanisme physique de cette instabilité est relativement simple : considérons un système de deux particules test en orbite purement radiale dans un système donné. L'analyse de ce type d'orbite effectuée au paragraphe 2.3.2 montre que ces orbites ne tournent pas ($\Phi/\tau = 0$), d'un point de vue énergétique il est clair que ces deux particules minimiseraient leur énergie en se rapprochant. Sans dissipation, ce gain d'énergie reste utopique car les particules ne peuvent pas se déplacer ailleurs que sur leur segment fixe. L'introduction d'un minimum de dissipation permet la migration ... Il est clair que sans l'intervention d'un phénomène d'avalanche (les unes entraînant les autres) ce mécanisme serait bien trop long pour déformer le système en une barre dont la direction correspond à l'alignement de ces orbites. C'est donc bien cette capacité dissipative couplée à cette configuration d'énergie négative qui est à l'origine de ce processus ! Avec un système composé uniquement d'orbites radiale le mécanisme de cette instabilité est représenté sur la figure 3.3.

⁵Ce qui signifie en français des perturbations engendrant des variations d'énergie négative.

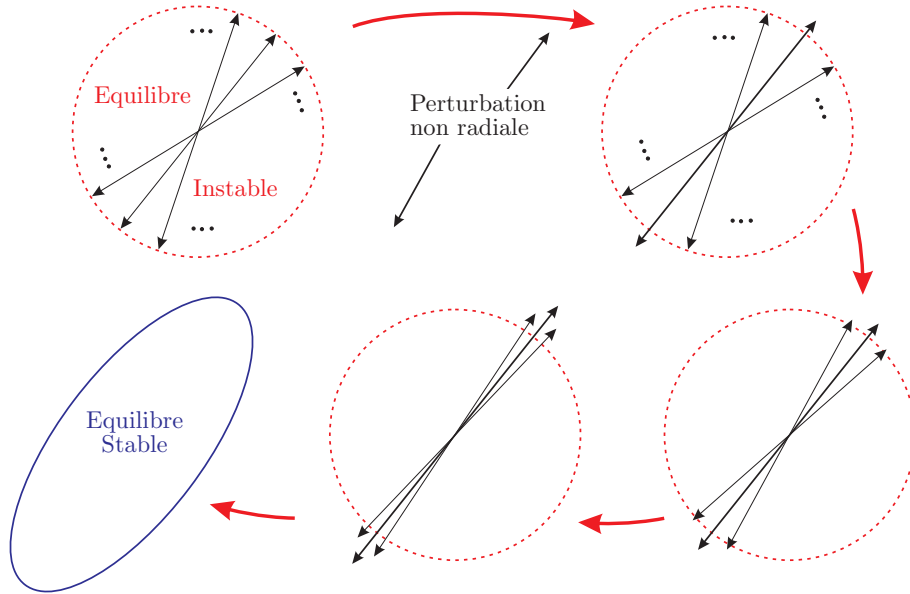


FIG. 3.3 – Mécanisme de l’instabilité d’orbites radiales

L’instabilité d’orbite radiale est un phénomène fondamental dans la formation des structures de l’Univers. Lors du processus d’effondrement en cascade que l’on pense présent dans ce cadre, on conçoit assez facilement qu’un gros objet s’effondrant sur un petit va lui communiquer beaucoup d’énergie cinétique radiale et donc peut-être déclencher l’instabilité qui va conduire à sa déformation. C’est le mécanisme qu’imaginait Merritt dans les années 80 pour former des galaxies elliptiques primordiales. L’ardeur fut calmée par les premières véritables simulations cosmologiques qui montrèrent que les traces de cette élongation pouvaient être gommées par le long processus de coalescence qui est à l’œuvre dans les scénarios hiérarchiques de formation des structures. Il n’en demeure pas moins que c’est la ségrégation introduite initialement dans l’espace des phases par cette instabilité qui reste présente et conduit à la formation du profil de densité si particulier que l’on observe pour ces structures (entre Prugniel-Simien, Einasto et NFW). C’est en tous cas le résultat de l’analyse de Mac Millan et al. [34].

3.3 Instabilités thermodynamiques

3.3.1 Une propriété fondamentale

Considérons le système autogravitant le plus simple que l’on connaisse constitué de deux objets ponctuels de masses m_A et m_B , et plaçons nous dans le référentiel (non galiléen) dans lequel m_A est fixe. Tout le monde sait alors que le mouvement de B s’effectue dans un plan avec une énergie

$$E = -\frac{\mu m_B}{2a} \quad (3.22)$$

avec $\mu = G(m_A + m_B)$ et a le demi-grand axe de l'orbite de B . Supposons pour simplifier que le mouvement de B est circulaire, de rayon a). On peut toujours écrire

$$\begin{aligned} E &= E_{cB} + E_{pB} = \frac{1}{2}m_B v_B^2 - \frac{Gm_A m_B}{a} \\ &= m_B \left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{Gm_A}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

En regroupant (3.22) et (3.23) on obtient

$$v_B = \left(\frac{G(m_A - m - B)}{a} \right)^{1/2}$$

Supposons finalement que $m_A \gg m_B$ et nous obtenons

$$E \approx -\frac{1}{2}m_B v_B^2$$

Si l'on prend de l'énergie à la particule B , de telle manière que $E \rightarrow E' = E - \delta E$ avec $\delta E > 0$. Supposons que ΔE est suffisamment petit pour que l'on puisse considérer que l'orbite de B est toujours circulaire de rayon a' à la vitesse v'_B , il est clair que

$$E' \approx -\frac{1}{2}m_B (v'_B)^2 = -\frac{1}{2}m_B v_B^2 - \delta E$$

soit

$$(v'_B)^2 - v_B^2 = \frac{2\delta E}{m_B} > 0$$

Ainsi lorsque l'on prend de l'énergie à B sa vitesse augmente. L'orbite sur laquelle se trouve le point B à chaque instant est un équilibre. La température cinétique T associée à cet équilibre peut s'écrire

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

où k est la constante de Boltzmann. Dans la transformation quasi-statique qui permet de passer de l'orbite circulaire de rayon a à l'orbite circulaire de rayon a' , et qui consiste à prélever l'énergie

$$\Delta E = E' - E = -\delta E < 0$$

la variation de température est donc

$$\Delta T = T' - T = \frac{m_B}{3k} \left((v'_B)^2 - v_B^2 \right) = \frac{2\delta E}{3k} > 0$$

Un tel système est donc tel que

$$C_v = \frac{\Delta E}{\Delta T} = -\frac{1}{k} < 0$$

Il s'agit d'un système à capacité calorifique négative : lorsqu'on lui prend de l'énergie il se réchauffe ...

Ce petit calcul est en fait généralisable à n'importe quel système autogravitant à l'équilibre. Pour ce type de système nous avons en effet

$$E = E_c + E_p$$

Le fait que l'on soit à l'équilibre permet d'écrire la relation du viriel,

$$E_p = -2E_c$$

et donc

$$E = -E_c$$

La température cinétique est toujours proportionnelle à l'énergie cinétique : $T \propto E_c$, ainsi

$$E \propto -T \Rightarrow C_v = \frac{dE}{dT} < 0.$$

Cette caractéristique des systèmes autogravitants est à la base d'une instabilité fondamentale qui les caractérise : la catastrophe gravothermale. Pour la comprendre il nous faut revenir sur le problème de la sphère isotherme.

3.3.2 La sphère isotherme dans une boîte

Ce thème est fondamental. Son étude a démarré avec l'ouvrage de Chandrasekhar [8] qui a posé le problème de la sphère isotherme et pratiquement tout compris dès 1948. Le travail de Lynden-Bell et Wood en 1968 [35] contient une partie de la physique de l'instabilité présente dans ces systèmes dès qu'on les place dans une boîte : la fameuse instabilité d'Antonov (ou gravothermale). Le travail de Padmanabhan reprend l'ensemble de ces travaux en les complétant par de judicieuses remarques qui permettent de mieux comprendre le problème. Enfin, l'article de Chavanis [37] résume ces différentes approches et les met en relation. Nous présentons ici une synthèse détaillée de cette longue histoire tirée de ces articles...

Nous avons vu que la recherche d'un extremum de l'entropie pour un système autogravitant n'a pas de solution dans un domaine non borné : la sphère isotherme, qui est le candidat naturel, viole la condition de masse finie. L'idée est donc venue de chercher la solution du problème restreint à une boule. Sa résolution s'est révélée très instructive...

Considérons un système dont le support de la fonction de distribution est contenu une boule de rayon R , et reprenons le problème thermodynamique entrepris lors de l'étude de la sphère isotherme (voir § 2.5.6). En notant B_R la boule de rayon R , il convient maintenant de chercher la fonction de distribution pour laquelle l'entropie

$$S[f] = -k \int f \ln f \, d\mathbf{\Gamma}$$

présente un extremum lorsque f est un élément de l'ensemble

$$\mathcal{E}_{R,M,H} = \left\{ f \text{ telle que } \begin{array}{l} \text{supp}(f) \subset B_R, \quad M = m \int f \, d\mathbf{\Gamma} < \infty \\ H = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f(\mathbf{\Gamma}) \, d\mathbf{\Gamma} - mG \int \int \frac{f(\mathbf{\Gamma})f(\mathbf{\Gamma}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{\Gamma}' d\mathbf{\Gamma} < \infty \end{array} \right\}$$

La solution de ce problème est toujours la sphère isotherme, maintenant restreinte à B_R

$$f^+ = f^+(E) = \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta E} \times 1_{B_R}$$

et donc

$$\rho = \rho(\psi) = \int f^+ d\mathbf{p} = \frac{m}{\alpha^3} e^{-\beta m \psi}$$

Bien sûr, hors de la sphère il n'y a plus rien et nous avons donc les conditions

$$\left. \begin{array}{l} \rho(r) = 0 \\ \text{et} \\ \psi(r) = -\frac{GM}{r} \end{array} \right\} \text{ si } r > R$$

À l'intérieur de la boule, on pose

$$x = \frac{r}{r_o} \text{ avec } r_o^2 = \frac{\alpha^3}{4\pi G m^2 \beta} e^{-\beta m \psi(0)} \quad \text{puis } h = \beta m (\psi - \psi(0))$$

et l'équation de Poisson correspondante à ce système⁶ s'écrit

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dh}{dx} \right) = e^{-h} \quad \text{avec } h(0) = h'(0) = 0 \quad (3.24)$$

On effectue alors une transformation dont l'idée fut introduite par Milne dans les années folles ... En notant $' = \frac{d}{dx}$ et en utilisant des notations personnelles, il vient

$$\begin{aligned} v(x) &= xh' \quad \Rightarrow \quad xv = x^2h' \\ \text{et} \\ u(x) &= \frac{e^{-h}x}{h'} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{e^{-h}x^2}{v} \end{aligned} \quad (3.25)$$

On remarque assez vite que l'équation de Poisson (3.24) s'écrit

$$(xv)' = uv \quad (3.26)$$

on en déduit que, d'une part

$$v + xv' = uv \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v(u-1)}{x}, \quad (3.27)$$

et, d'autre part

$$\begin{aligned} u' &= \left(\frac{e^{-h}x^2}{v} \right)' \\ &= \frac{-h'e^{-h}x^2}{v} + \frac{2e^{-h}x}{v} - e^{-h}x^2 \frac{v'}{v^2} \end{aligned}$$

on injecte alors les définitions (3.25) et (3.27) pour obtenir

$$\begin{aligned} u' &= -e^{-h}x + \frac{2u}{x} - \frac{e^{-h}x(u-1)}{v} \\ &= \frac{u(3-u-v)}{x} \end{aligned}$$

⁶L'œil aiguisé de nos lecteurs aura remarqué que la fonction h que nous utilisons ici n'est pas la même que le y utilisé en §2.5.6, l'une est nulle en $r = 0$ pas l'autre ...

le système en variables de Milne (u, v) s'écrit donc

$$\begin{cases} x \frac{u'}{u} = 3 - u - v \\ x \frac{v'}{v} = u - 1 \end{cases}$$

Si l'on peut considérer que v est une fonction de u (théorème d'inversion locale...) , le rapport de ces deux équations donne

$$\frac{v'}{u'} = \frac{dv}{du} = \frac{v(1-u)}{u(u+v-3)} \tag{3.28}$$

Pour trouver les conditions aux limites de cette équation, il faut redoubler d'astuce ...

Conditions à la limite $x = 0$ Au voisinage de $x = 0$, la fonction h s'écrit

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) + h'(0)x + ax^2 + bx^3 + o(x^3) \\ &= ax^2 + bx^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ainsi dans ce même voisinage

$$\begin{aligned} v(x) &= xh'(x) \\ &= 2ax^2 + 3bx^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} u &= x^2 \frac{\exp[-(2ax^2 + 3bx^3 + o(x^3))]}{2ax^2 + 3bx^3 + o(x^3)} = \frac{1 - 2ax^2 - 3bx^3 + o(x^3)}{2a + 3bx + o(x)} \\ &= \frac{1 - 2ax^2 - 3bx^3 + o(x^3)}{2a} \frac{1}{1 + \frac{3b}{2a}x + o(x)} \\ &= \frac{1}{2a} (1 - 2ax^2 - 3bx^3 + o(x^3)) \left(1 - \frac{3b}{2a}x + o(x)\right) \\ &= \frac{1}{2a} - \frac{3b}{4a^2}x + o(x) \end{aligned}$$

l'équation de Poisson en u et v permet d'identifier le terme β , en effet

$$\left. \begin{aligned} (xv)' &= 6ax^2 + 12bx^3 + o(x^3) \\ uv &= x^2 + o(x^3) \end{aligned} \right\} (xv)' = uv \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

ainsi au voisinage de $x = 0$ on peut écrire

$$v(x) = \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad u(x) = 3 + o(1)$$

finalement, les conditions aux limites de l'équation (3.28) sont donc

$$(u, v) = (0, 3) \quad \text{quand} \quad x \rightarrow 0$$

Pour obtenir la pente de la fonction $u(v)$ en $x = 0$, il ne faut pas croire que l'on peut se satisfaire d'un développement limité à l'ordre 3 pour $h(x)$, comme le montre le maître Chandrasekhar, il faut aller jusqu'à l'ordre 6 ... on trouve alors

$$u(x) = 3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{19}{1050}x^4 - \frac{823}{189000}x^6 + o(x^6)$$

$$v(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{315}x^6 + o(x^6)$$

d'où l'on peut enfin déduire que

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(1-u)}{u(u+v-3)} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{63}x^2 + o(x^2)$$

quel effort ...

Conditions à la limite $r = R$ Le calcul explicite de ces conditions aux limites est un peu pénible, il est entièrement fait dans l'article de Lynden-Bell et Wood [35]. Les ingrédients du calcul sont le théorème du viriel adapté à une système défini sur une boule de rayon R soit

$$2T + W = \frac{4}{3}\pi R^3 P_e$$

ou P_e est la pression à la surface de la boule, T et W sont respectivement l'énergie cinétique et potentielle totale contenue dans la boule. L'équation d'état d'une sphère isotherme

$$P = \frac{1}{m\beta}\rho$$

et le fait que l'énergie totale s'écrive

$$H = T + W \quad \text{avec} \quad T = \frac{3}{2} \frac{M}{m\beta}$$

dans laquelle on calcule l'énergie potentielle totale en prenant la trace du tenseur d'énergie potentielle, soit en symétrie sphérique et dans une boule

$$W = -4\pi \int_0^R r^3 \rho(r) \frac{d\psi}{dr} dr$$

On introduit alors les constantes sans dimensions

$$\lambda = -\frac{HR}{GM^2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{m\beta GM}{R}$$

et on montre tout d'abord que

$$\begin{cases} \mu = Rh'(X) \\ \lambda = \frac{3}{2} \frac{1}{Rh'(X)} - \frac{e^{-h(X)}}{(h'(X))^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad X = \frac{R}{r_0}$$

il est ensuite facile d'obtenir

$$\begin{cases} v_m := v(X) = \mu \\ u_m := u(X) = \frac{3}{2} - \lambda\mu \end{cases} \quad (3.29)$$

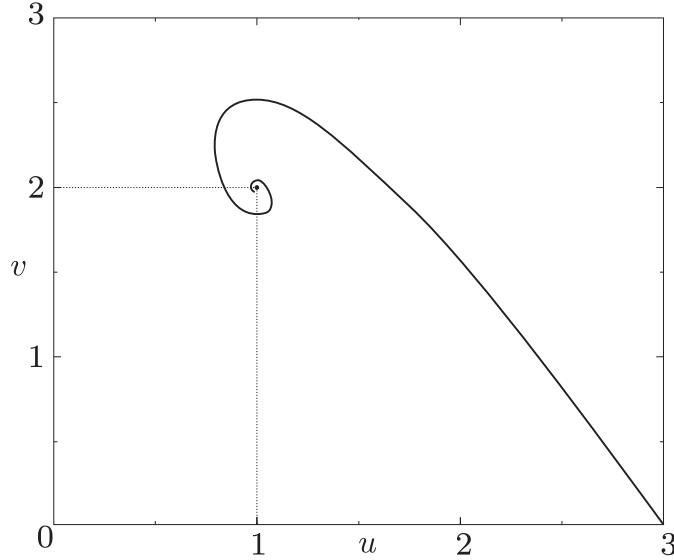


FIG. 3.4 – Représentation de la sphère isotherme dans le plan de Milne

Le cas de la sphère isotherme singulière Notons d'emblée que la sphère isotherme singulière $\tilde{h} = \ln\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ vérifie l'équation de Poisson (3.24) sans les conditions initiales puisqu'elle même et sa dérivée en $x = 0$ divergent.

Par contre, lorsqu'on utilise la représentation de Milne pour cette non solution singulière on trouve

$$\tilde{v}(x) = x\tilde{h}' = 2 \text{ et } \tilde{u}(x) = \frac{e^{-\tilde{h}x}}{\tilde{h}'} = 1$$

La sphère isotherme singulière est donc le point $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (1, 2)$ du plan de Milne.

Le diagramme de stabilité Pour une valeur de H , M et R la solution du problème isotherme en boîte est donc une courbe dans le plan (u, v) qui part du point $(0, 3)$ pour atteindre le point (u_m, v_m) . On peut obtenir numériquement la solution de l'équation différentielle (3.28) en partant du point $(u, v) = (0, 3)$ avec $\frac{dv}{du} = -5/3$ en ce point, c'est la spirale présentée sur la figure 3.4.

La longueur de la courbe est déterminée pas la valeur de R . Plus on augmente la taille de la boîte, plus la courbe devient longue et finit par s'enrouler autour du point limite que représente la sphère isotherme. Notons que cette limite est une courbe complète car comme nous l'avons vu $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (1, 2)$ pour toutes les valeurs de x .

Ainsi s'achève le travail de Chandrasekhar, et c'est alors que Padmanabhan[36] intervient avec la remarque suivante : la relation permettant d'exprimer u_m et v_m en fonction de λ et μ peut s'inverser et permet d'obtenir

$$\lambda = \frac{\left(u_m - \frac{3}{2}\right)}{v_m}$$

mais nous avons vu par ailleurs que

$$\lambda = -\frac{HR}{GM^2}$$

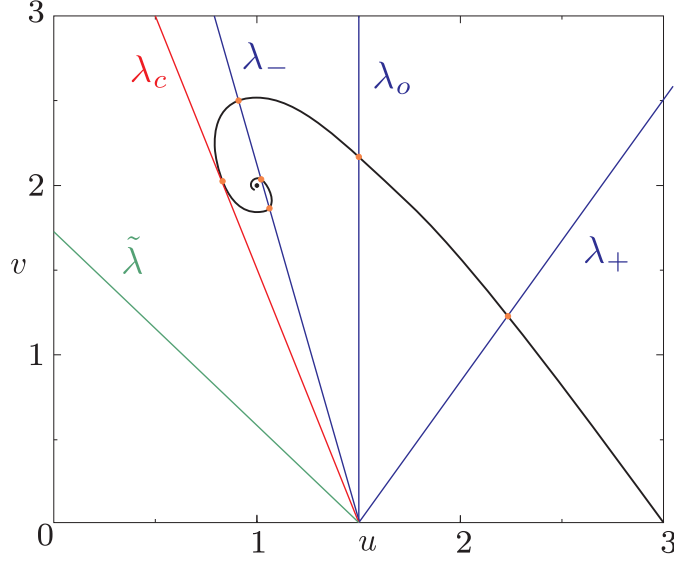


FIG. 3.5 – La spiralede Chandrasekhar et la droite de Padmanabhan.

on obtient donc

$$v_m = \frac{GM^2 \left(\frac{3}{2} - u_m\right)}{HR}$$

Dans le plan de Milne, le point (u_m, v_m) est donc à l'intersection de la spirale de la figure 3.4 et de la droite

$$v = -\frac{GM^2}{HR}u + \frac{3GM^2}{2HR}$$

Comme on peut le voir très facilement sur la figure 3.5, si $H < 0$ alors λ est positif et il existe toujours une intersection entre les deux courbes. Si $H > 0$ plusieurs cas peuvent se présenter :

- Si $\lambda \in [\lambda_o, \lambda_c]$ il existe une ou plusieurs intersections possible, la sphère isotherme correspondante est fixée par le choix adéquat H, R et M .
- Si $\lambda > \lambda_c$, c'est la cas représenté sur la figure par $\tilde{\lambda}$, il n'y a plus d'intersection entre les courbes. Le choix

$$\tilde{\lambda} = -\frac{\tilde{H}\tilde{R}}{G\tilde{M}^2}$$

n'est donc pas possible. Seul un système possédant une énergie totale positive entre dans cette catégorie.

La raison de cette impossibilité est très profonde. En fait, Antonov (le même que celui des lois et de l'instabilité d'orbites radiale ...) avait remarqué que le problème de recherche d'extremum de l'entropie nécessite d'être précisé ...

Pour avoir un extremum de l'entropie, il faut dans un premier temps déterminer les fonctions de distributions telles que $\delta S = 0$. Ce problème n'a en fait de solution que si $\lambda > \lambda_c$. Le critère d'intersection de Padmanabhan est donc une condition d'existence pour un extremum de l'entropie d'un système autogravitant dans une boule. Mais ce n'est pas tout, pour étudier la nature de cet extremum et donc la stabilité de l'équilibre correspondant il reste des surprises...

La densité de la sphère isotherme est une fonction décroissante : si l'on augmente le rayon

de la boule sur laquelle est défini le système, on augmente le contraste de densité

$$\mathcal{R} = \frac{\rho(0)}{\rho(R)}$$

entre le centre et le bord du système. Une sphère isotherme est un système cœur-halo. Le cœur est autogravitant et possède une chaleur spécifique négative comme nous l'avons vu en introduction de ce paragraphe. Les régions externes du halo peuvent quand à elles être considérées comme un gaz parfait avec assez peu d'autogravité et une énergie positive : en le séparant du reste du système son énergie cinétique sera $T_h \approx \frac{3}{2} \frac{M_h}{\beta}$ et son énergie potentielle peut s'improviser comme $W_h \approx -\frac{GM_h M_c}{R_h}$, la somme des deux peut devenir positive si l'on considère la partie externe du halo ($R_h \approx R$) et un cœur qui s'amenuise $M_h \gg M_c$.

Si on augmente R et donc \mathcal{R} , comme le montre Katz dans une analyse célèbre [38], le halo va finir par trop peser sur le cœur qui va s'effondrer. Le résultat d'Antonov est encore plus précis et indique :

Si $\lambda > \lambda_c$ l'entropie d'une sphère isotherme est un extremum, la nature de ce dernier est reliée au contraste de densité :

- si $\mathcal{R} > \mathcal{R}_c^H = 709$, l'extremum est un col instable ;
- Si $\mathcal{R} < \mathcal{R}_c^H = 709$, l'extremum est un maximum local ... ouf !

En prenant les variables thermodynamiques conjuguées H et β , au lieu des milniens u et v , Katz rend l'analyse de stabilité ludique ... En remarquant que

$$C_v = \frac{\partial H}{\partial T}$$

il montre que le changement de régime de stabilité d'une sphère isotherme confinée dépend de l'existence de tangentes verticales ou horizontales sur la courbe $\beta(H)$ dans le plan (H, β) :

- Si la sphère est isolée et confinée, son énergie H est fixée et sa température s'adapte à cette contrainte : on se trouve dans le cadre de l'ensemble microcanonique de Gibbs. Le passage d'un système stable à un système instable se produit lors d'un passage par un point de la courbe $\beta(H)$ présentant une tangente verticale. Imposer l'énergie revient à introduire la contrainte de la droite de Padmanabhan qui est verticale dans le plan (H, β) . Le système devient instable dès que $\mathcal{R} > \mathcal{R}_c^H \approx 709$.
- Si la sphère est confinée et en contact avec un bain thermique qui va imposer la température, elle même fixant la valeur de H : on se trouve alors dans le contexte de l'ensemble canonique de Gibbs. Le passage d'un système stable à un système instable se produit lors d'un passage par un point de la courbe $\beta(H)$ présentant une tangente horizontale. Imposer la température revient à fixer $v_m = \frac{\beta GM}{R}$ et donc faire apparaître une droite horizontale dans le plan (H, β) . Le système devient instable dès que $\mathcal{R} > \mathcal{R}_c^\beta \approx 32,1$.

Les ensembles statistiques ne sont donc pas équivalents dans le cadre de la thermodynamique gravitationnelle ...

Chapitre 4

Que s'est-il passé ?

4.1 Trois instabilités

La formation et l'évolution des systèmes autogravitants sont gouvernées par trois instabilités fondamentales.

L'instabilité de Jeans Elle ne concerne que les systèmes autogravitants homogènes, c'est-à-dire ceux dont la fonction de distribution ne dépend pas de la position. Dans la version standard, elle s'applique aux systèmes possédant une distribution des vitesses gaussienne, et donc une température constante. Cette température génère une pression cinétique qui peut supporter la pression de gravitation due au système. L'instabilité se produit lorsque la taille caractéristique du système dépasse sa longueur de Jeans (voir (3.2))

$$R > L_o = \frac{2\pi}{k_o}$$

Cette instabilité conduit à la formation d'un système cœur-halo à l'équilibre ([16], [17]). Le cœur possède une densité constante il s'étale jusqu'au rayon contenant 50% de la masse du système. Le halo entourant ce cœur est un profil de densité en r^{-4} . Le système initialement froid (faibles vitesses), s'effondre sous l'effet de son propre poids. Les particules acquièrent de la vitesse en se rapprochant du centre, le système se réchauffe jusqu'à ce qu'il atteigne un état d'équilibre dans lequel il sera au viriel. Le rapport des tailles caractéristiques des systèmes avant et après l'instabilité se situe entre 2 et 5 suivant le réchauffement subi. L'équilibre atteint est sphérique, c'est en effet la configuration gravitationnelle la plus stable ...

L'instabilité d'orbites radiales Elle ne concerne que les systèmes autogravitants sphériques possédant une large fraction de particules sur des orbites radiales. Pour qu'elle se produise il faut que des particules en orbite radiale puissent mutualiser leurs efforts pour s'aligner dans une direction. Il est donc nécessaire d'avoir une sorte de graine d'équilibre sur laquelle elle puisse germer ... On peut la déclencher de deux manières principales :

- On laisse faire la nature : on construit un système sphérique à l'équilibre. On fait s'effondrer (par instabilité de Jeans par exemple) sur cette graine, un système plus gros qui va communiquer de l'énergie cinétique radiale à la graine, en peuplant sa partie radiale dans l'espace des phase elle va peut-être déclencher l'instabilité ...
- On pousse le système vers l'instabilité : on construit directement un système sphérique à l'équilibre en sélectionnant les valeurs de L^2 que l'on attribue à chaque particule de ce

système de manière à ce que $L^2 \approx 0$. Ces orbites radiales se couplent pour minimiser leur énergie et le système se déforme en une barre.

Cette instabilité marque irrémédiablement l'espace des phases du système. La barre spatiale peut éventuellement être gommée par des phases de mélange successifs. Ce mécanisme permet toutefois d'obtenir des systèmes primordiaux possédant une structure ellipsoïdale de façon purement gravitationnelle.

L'instabilité d'Antonov Elle ne concerne que les systèmes confinés dans des boules isolées ou en contact avec un bain thermique. Lorsqu'ils présentent un contraste de densité trop important, ces systèmes confinés voient leur cœur s'effondrer. Le mécanisme est celui de la catastrophe gravothermale : un trop fort contraste de densité peut conduire à des flux d'énergie catastrophiques qui effondrent le cœur possédant une chaleur spécifique négative. Ce type de mécanisme est sans doute à l'origine de l'effondrement du cœur des amas globulaires ayant subi un harcèlement suffisant de la part de leur galaxie hôte : la perte d'une étoile réchauffe le cœur ($C_v < 0$), lorsque les pertes sont trop importantes il devient trop chaud et s'effondre ...

4.2 Un mécanisme global

Sur une échelle caractéristique de l'ordre de 100 pc l'univers est strictement homogène à grand z . L'effondrement potentiel d'un objet de cette taille se fait donc dans les conditions de l'instabilité de Jeans. Le résultat est un système cœur-halo, le halo ayant un profil r^{-4} . La présence autour de ces petits objets d'un hôte plus vaste (la future galaxie ?) joue le rôle de bain thermique et/ou de pilleur d'étoile. L'évolution de ce cœur-halo primordial au sein de son hôte va donc conduire à un réchauffement progressif du cœur jusqu'à son effondrement sur un temps caractéristique de l'ordre du temps de relaxation à deux corps de l'amas globulaire. Ceci est en excellent accord avec les 20% d'amas au cœur effondré sur la population galactique (voir figure 2.9). Deux autres particularités des amas globulaires plaident en faveur d'une formation par instabilité de Jeans (et donc à partir d'un système homogène) :

- ils sont généralement sphériques et les quelques faibles aplatissements observés sont imputables à de la rotation ;
- de façon générale, ils ne possèdent pas d'objet compact de très grande masse au centre. L'instabilité de Jeans n'est pas capable de fabriquer un tel monstre... Nous allons voir que d'autres le peuvent !

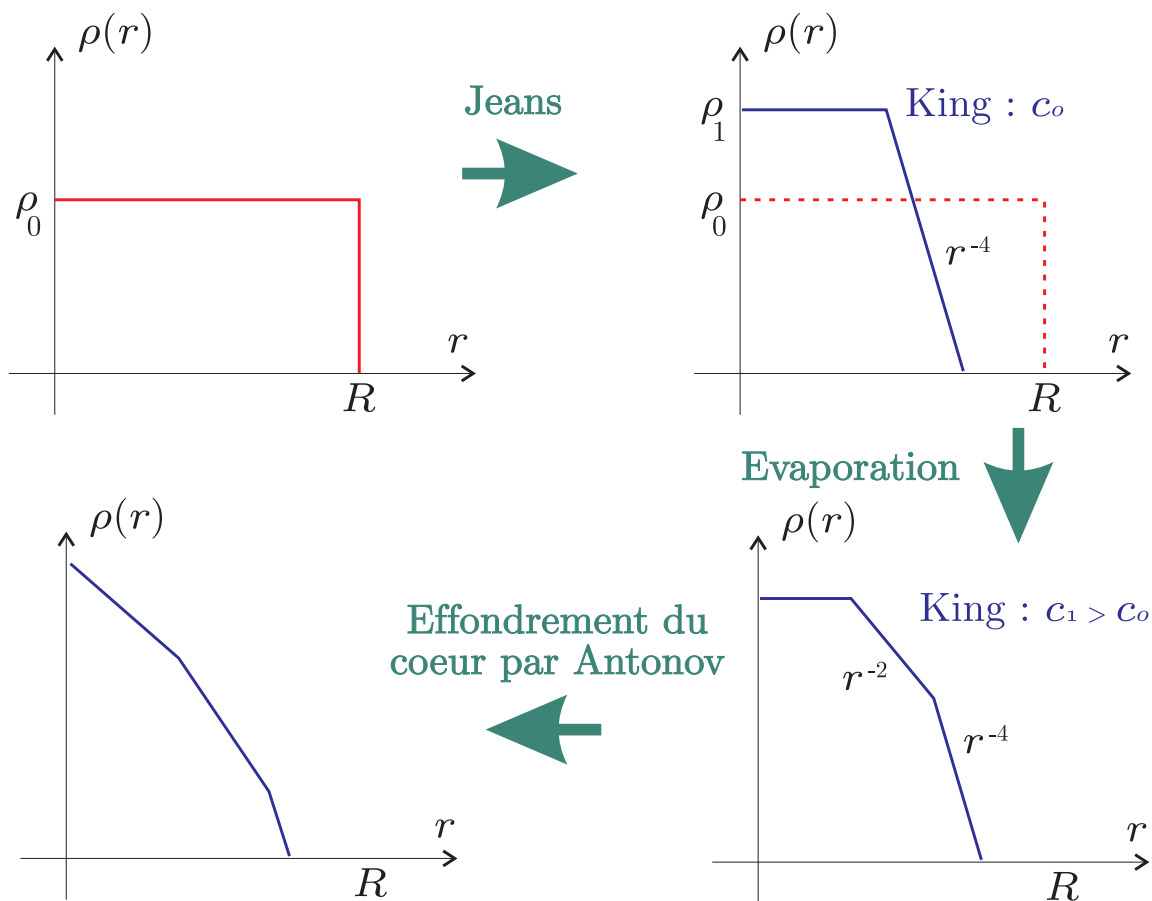
Sur une échelle plus globale, la formation des grandes structures s'envisage dans un scénario hiérarchique. Les objets autogravitants s'effondrent les uns sur les autres en se mélangeant. Pour bien comprendre ce qui peut se passer considérons le plus simple des scénarios hiérarchiques : l'effondrement d'un petit objet au sein de l'effondrement d'un plus grand. À la longueur de Jeans correspond un temps de Jeans dont on saisit bien que celui du petit peut être beaucoup plus faible que celui du plus grand. Si tout s'effondre, le petit va atteindre un état d'équilibre cœur-halo r^{-4} bien avant que le gros n'ait encore bougé. Le contraste de densité entre le cœur du petit et son bord, dont la densité est la même que celle du gros pas encore effondré, est phénoménale ! L'instabilité d'Antonov est donc inévitable ... Le cœur du petit s'effondre ! Compte-tenu de son temps de Jeans c'est maintenant le gros qui s'effondre et qui vient éventuellement apporter un flot d'énergie cinétique radiale à la graine que constitue le petit au cœur désormais effondré ... L'instabilité d'orbite radiale peut se produire si l'apport est suffisant ! Le résultat final de ces deux effondrements ne peut plus comporter de cœur car celui-ci s'est effondré dès le début,

les diverses reconnections conduisent à un halo à plusieurs pentes, un peu comme ce que l'on observe... Notons enfin que si l'on empêche l'instabilité d'orbites radiale de se produire[34], les simulations de formation de structures ne produisent plus des profils en accord avec les observations...

Si l'on ajuste un tant soit peu les diverses masses et rayons initiaux relatifs du gros et du petit, on trouvera certainement que la masse du cœur du petit qui est comprimée vers le centre de l'ensemble représente une fraction ajustable de la masse totale. Voici un mécanisme naïf certes, mais qui ne possède aucune contradiction avec les caractéristiques observées des trous noirs super massifs qui trônent au cœur des galaxies : formation initiale, masse proportionnelle à la masse totale, absence (générique) dans les amas globulaires...

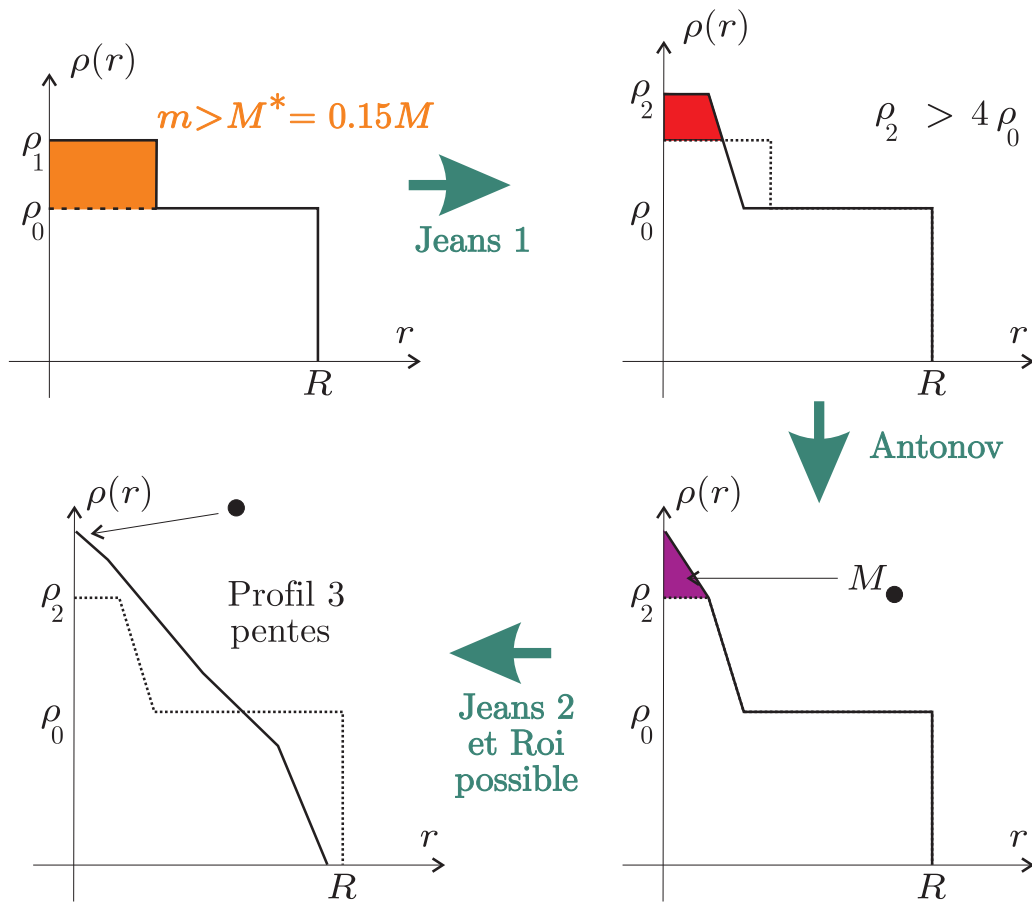
Le compte est bon et nous pouvons résumer l'affaire de façon schématique.

Scénario 1



Formation & Evolution des amas globulaires

Scénario 2



Formation & Evolution des halos de galaxies

La réalité est sans doute bien plus complexe dans le détail, mais grossièrement l'histoire pourrait bien être celle-ci ...

Bibliographie

- [1] B. Gidas, W.-M. Ni & L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in \mathbb{R}^n* , **Mathematical Analysis and Applications**, vol. 79, pp. 369-402, 1981.
- [2] L. Hernquist, *An analytical model for spherical galaxies and bulges*, **The Astrophysical Journal**, vol. 356, pp. 359-364, 1990.
- [3] D. Merritt, A. W. Graham, B. Moore, J. Diemand, B. Terzic, *Empirical models for dark matter halos I*, **The Astronomical Journal**, vol. 132, pp. 2685-2700, 2006.
- [4] J. Binney & S. Tremaine, *Galactic dynamics*, **Princeton university press**, 1987
- [5] G. B. Lima Neto, D. Gerbal & I. Marquez, *The specific entropy of elliptical galaxies : an explanation for profile-shape distance indicators?* , **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 309, pp. 481-495, 1999.
- [6] M. Hénon, *L'amas isochrone*, **Annales d'astrophysique**, vol. 22, p. 126, 1959
- [7] W. Jaffe, *A simple model for the distribution of light in spherical galaxies*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 202, pp. 995-999, 1983
- [8] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, **Dover Publications**, 509 pages, 1958
- [9] I. King, *The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models*, **Astronomical Journal**, Vol. 71, pp. 64-75, 1966
- [10] A.M Fridman & V.L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, Vols. 1 and 2, **Springer**, New York, 1984
- [11] M. K.-H. Kiessling, *The Jeans Swindle. A True Story : Mathematically Speaking*, **Advances in Applied Mathematics**, vol 31, pp. 132-149, 2003
- [12] G. van de Ven, R. Mandelbaum and C. R. Keeton, *Galaxy density profiles and shapes - I. Simulation pipeline for lensing by realistic galaxy models*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 398, pp. 607-634, 2009
- [13] R. Elson, P.Hut and S. Inagaki, *Dynamical evolution of globular clusters*, **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, Vol. 25, pp. 565-601, 1987
- [14] G. Meylan and D. C. Heggie, *Internal dynamics of globular clusters*, **The Astronomy and Astrophysics Review**, Vol. 8, pp. 1-143, 1997
- [15] W.E. Harris, *A Catalog of Parameters for Globular Clusters in the Milky Way*, **Astronomical Journal**, vol. 112, p. 1487, 1996, <http://www.physics.mcmaster.ca/Globular.html>

- [16] F. Roy & J. Perez, *Dissipationless collapse of a set of N massive particles*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 348, p. 62, 2004
- [17] M. Joyce, B. Marcos & F. Sylos Labini, *Energy ejection in the collapse of a cold spherical self-gravitating cloud*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol.397, p. 775, 2009
- [18] T.R. Lauer, *The cores of elliptical galaxies*, **The Astrophysical Journal**, vol. 292, pp 104-121,1985
- [19] D. Heggie and Piet Hut, *The gravitational Million-Body problem*, Cambridge University Press, 2003
- [20] J. Perez , J.-J. Aly, *Stability of spherical self-gravitating systems I : Analytical results*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 280, p. 689, 1996
- [21] Bloch A.M., Krishnaprasad P.S., Marsden J.E. and Ratiu T.S., *Dissipation induced instabilities*, **Annales de l'Institut Henri Poincaré - Analyse non linéaire**, vol. 11, pp.37-90, 1994
- [22] Huanchun Ye and P.J.Morrison, *Action principles for the Vlasov equation*, **Physics of Fluids B**, vol. 4, p. 771, 1992
- [23] Kandrup H.E. , *Geometric approach to secular and nonlinear stability for spherical star clusters*, **The Astrophysical Journal**, vol. 351, p. 104, 1990
- [24] Kandrup, H.E., *A stability criterion for any collisionless stellar equilibrium and some concrete applications thereof*, **The Astrophysical Journal**, vol. 370, 312, 1991
- [25] Kandrup, H.E., *The secular instability of axisymmetric collisionless star clusters*, **The Astrophysical Journal**, vol. 380, p. 511, 1991
- [26] Lynden-Bell D., *Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 136, p.101, 1967
- [27] Morrison P.J. , *The Maxwell-Vlasov equations as a continuous hamiltonian system*, **Physics Letters A**, vol. 80, pp 383-386, 1980
- [28] P.J.Morrison, and D.Pfirsch, *Free-energy expressions for Vlasov equilibria*, **Physical Review A**, vol. 40, p. 3898, 1989
- [29] P.J.Morrison and D. Pfirsch, *The free energy of Maxwell–Vlasov equilibria*, **Physics of Fluids B**, vol. 2, pp 1105-1113, 1990
- [30] P.J.Morrison, **Transport Theory and Statistical Physics**, *Hamiltonian description of Vlasov dynamics : Action-angle variables for the continuous spectrum* , vol. 29, pp 397-414, 2000
- [31] Perez J. and Lachieze-Rey M., *A symplectic approach to gravitational instability* , **The Astrophysical Journal**, vol. 465, p. 54, 1996
- [32] K. R. Yawn and B. N. Miller, *Incomplete relaxation in a two-mass one-dimensional self-gravitating system*, **Physical Review E**, 68, 56120 , 2003
- [33] H.E. Kandrup & J.-F. Sygnet, *A simple proof of dynamical stability for a class of spherical clusters*, **The Astrophysical Journal**, vol. 298, pp 27-33,1985

- [34] J. MacMillan, L.M. Widrow, R. N. Henriksen, 2006, *On universal halos and the radial orbit instability*, **The Astrophysical Journal**, vol. 653, 43
- [35] D.Lynden-Bell &R. Wood, *The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 138, p.495, 1968
- [36] T. Padmanabhan, *Statistical mechanics of gravitating systems*, **Physics Reports**, vol. 188, Issue 5, p. 285-362, 1990
- [37] P.H. Chavanis, *Gravitational instability of finite isothermal spheres*, **Astronomy & Astrophysics**, vol. 381, pp. 340-356, 2002
- [38] J. Katz, *On the number of unstable modes of an equilibrium*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 183, p. 765, 1978
- [39] L. Maréchal & J. Perez, *Radial Orbit Instability : Review and persepectives*, arXiv :0910.5177, to be published in Transport Theory and Statistical Physics
- [40] L. Marechal & J. Perez, *Radial Orbit Instability as dissipation induced phenomenon*, ARXIV, to be published in **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**.