Les problèmes des 2 corps

Équations du mouvement

2 corps $A\,(m_A)$ et $B\,(m_B)$,
R_O : Référentiel galiléen d'origine fixe O

$$m_A \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = -G m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3}$$

$$m_B \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = -G m_B m_A \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3}$$

Ainsi

$$m_A \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} + m_B \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt^2} = \overrightarrow{0}$$

Équations du mouvement

Le centre de gravité C du système repéré par le vecteur

$$\overrightarrow{R} = \frac{m_A \overrightarrow{OA} + m_B \overrightarrow{OB}}{m_A + m_B} \Longrightarrow \frac{d^2 \overrightarrow{R}}{dt^2} = \overrightarrow{0}$$

$\Rightarrow R_C$ galiléen, mais peu pratique (car ?C)

$$m_A \frac{d^2 \overrightarrow{CA}}{dt^2} = -G m_A m_B \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|^3} \quad (1)$$

$$m_B \frac{d^2 \overrightarrow{CB}}{dt^2} = -G m_B m_A \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^3} \quad (2)$$

$\Rightarrow R_A$ non galiléen, mais pratique (car A fixe)

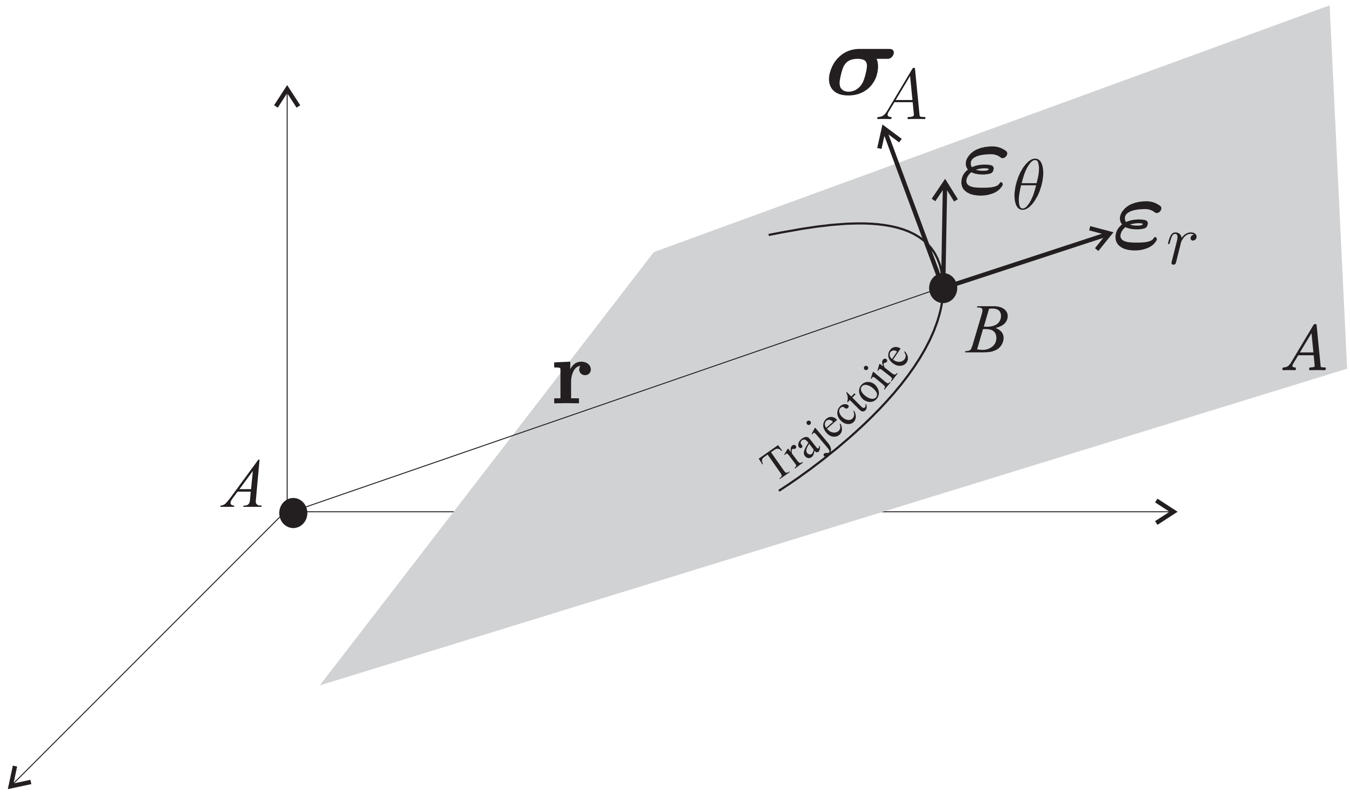
$$(1) - (2) : \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad avec \;\; \mu = G\left(m_A + m_B\right) \;,\; \mathbf{r} = \overrightarrow{AB} \quad (3)$$

Solution des équations du mouvement

σ_A : moment cinétique de B dans R_A est conservé :

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_B}\frac{d\sigma_{\mathrm{A}}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\wedge\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\wedge\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mu r\wedge\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

$\looparrowright$ mvt$(B) \in \Pi_A \perp \sigma_A$



Solution des équations du mouvement

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\varepsilon_r + r\frac{d\theta}{dt}\varepsilon_\theta$$

donc

$$\frac{\sigma_A}{m_B} = \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \left(\frac{dr}{dt}\varepsilon_r + r\frac{d\theta}{dt}\varepsilon_\theta\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sigma_A}{m_B} = r^2\frac{d\theta}{dt}\varepsilon_r \wedge \varepsilon_\theta$$

$$\boxed{\text{Constante des aires : } C = r^2\frac{d\theta}{dt}}$$

Le segment AB tourne donc avec une vitesse angulaire non constante

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

Relation entre r et θ

Equation du mouvement :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{... intégration ...}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{r} = cte = \xi = \text{Energie Totale} \tag{4}$$

or

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 &= \ldots \left(dt = r^2 d\theta/C\right) \ldots \\ &= \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\frac{C^2}{r^4}\end{aligned}$$

ainsi (4) devient

$$\left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\frac{C^2}{2r^4} - \left(\frac{\mu}{r} + \xi\right) = 0$$

Relation entre r et θ

Chgt de variable $u = \frac{1}{r} - \frac{\mu}{C^2}$ ...

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \alpha^2 - u^2 \;\;, \;\; \alpha = \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{2\xi}{C^2}} \;\; \text{i.e.} \;\; \frac{du}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} = \pm d\theta \qquad (5)$$

soit, en choisissant le sens direct $-$

$$\arccos\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \theta - \omega \,, \;\; \omega = \text{cste}$$

en revenant en variable r :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(f)}{p} \qquad (6)$$

avec $e = \sqrt{1 + \frac{2C^2\xi}{\mu^2}}$ $\qquad p = \frac{C^2}{\mu}$ $\qquad f = \theta - \omega$

Conique de foyer A, paramètre focal p, excentricité e
f : anomalie vraie

Nature de la conique

Nature de la conique $\Longleftrightarrow$ Mouvement

$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2\xi}{\mu^2}} \Leftrightarrow \xi = \frac{\mu^2\left(e^2 - 1\right)}{2C^2}$$

- Système lié, $\xi < 0 \Leftrightarrow 0 \leq e < 1$: Trajectoire bornée
  - Cercle : $e = 0$
  - Ellipse : $0 < e < 1$
- Système libre, $\xi \geq 0 \Leftrightarrow e \geq 1$: Trajectoire non bornée
  - Parabole : $e = 1$
  - Hyperbole : $e > 1$

$Isaac\ Newton$, 1666

Trajectoire elliptique

Sphérique, ellipitique : Planètes, comètes, satellites ...
$e \geq 1$: Collision gravitationnelle (rare)

Caractéristiques de l'ellipse

- Périastre : B est au plus proche de A $f = 0$ et $r = r_{\text{min}} = \dfrac{p}{(1+e)}$
- Apoastre : B est au plus loin de A $f = \pi$ et $r = r_{\text{max}} = \dfrac{p}{(1-e)}$
- Demi grand axe a, petit axe b $a = \dfrac{(r_{\text{max}} + r_{\text{min}})}{2} = \dfrac{p}{1-e^2}, \quad b = a\sqrt{1-e^2}$

Relations utiles :

$$\xi = -\frac{\mu}{2a} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\right|_{\text{min}} = r_{\text{max}} \qquad \text{et} \qquad \left.\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\right|_{\text{max}} = r_{\text{min}}$$

Loi des aires

Elément d'aire balayée par r

$$dS = \frac{1}{2} r^2 df \tag{7}$$

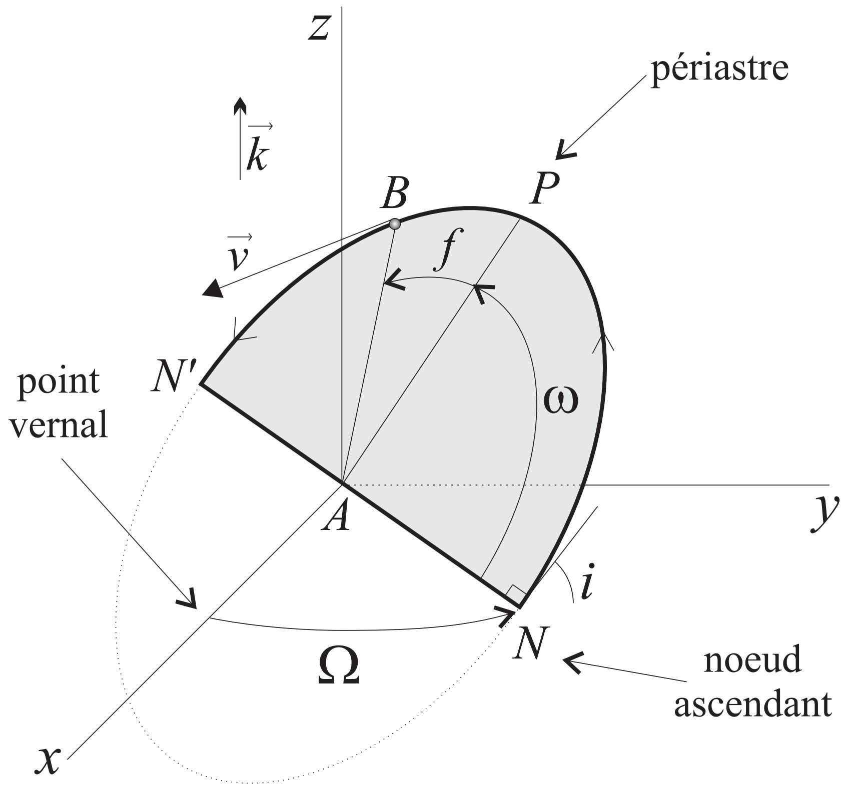
mais $f = \theta - \omega$ et $r^2 d\theta = C dt$, il vient donc

$$dS = \frac{1}{2} C dt$$

$\Longrightarrow$ $2^{ème}$ loi de Képler
Le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux ... or $S = \pi ab$ surface de l'ellipse, et T =période de l'orbite ...
$\Longrightarrow$ $3^{ème}$ loi de Képler:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2} \tag{8}$$

Caractérisation du plan orbital



- Inclinaison du plan orbital : i : comptée de 0 à $180°$. Si $0° < i \leq 90°$: mouvement direct, si $90° < i \leq 180°$: mouvement rétrograde.
- Longitude du noeud ascendant : Ω : angle (Ax, AN) entre les directions du point vernal et du noeud ascendant mesuré dans le plan A_{xy}
- Argument du périastre : ω : angle (AN, AP) entre la ligne des noeuds et la direction du périastre mesuré dans le plan de l'orbite

Caractérisation du plan orbital

Position de l'ellipse dans l'espace : 5 constantes $(a, e, i, \Omega, \omega)$
Position de B sur l'ellipse : $f\,(t)$?

Equation vérifiée par f :
(loi des aires)

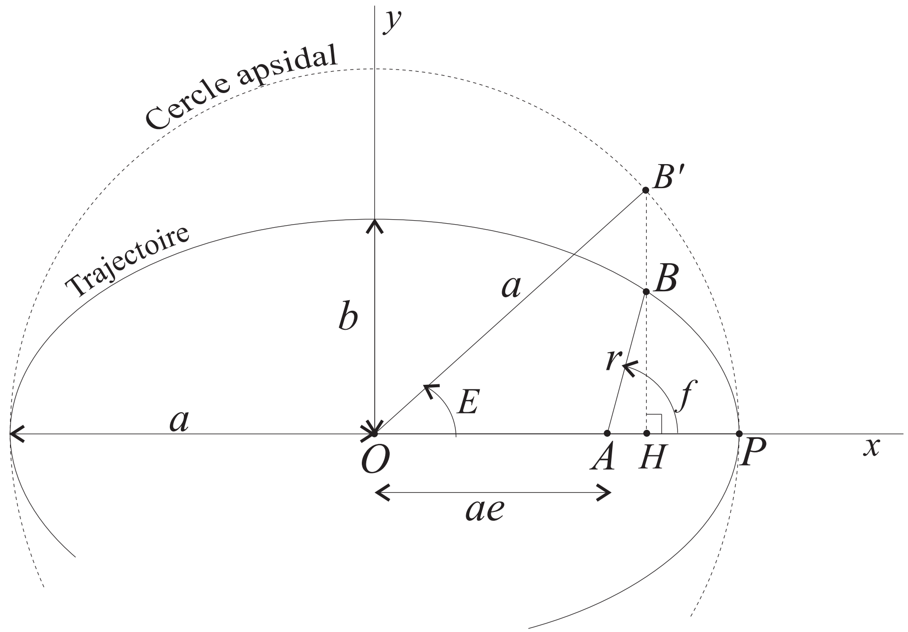
$$\frac{df}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

en explicitant la position r en fonction de f on a donc

$$\frac{df}{dt} - \frac{C}{p^2}\left(1 + e\cos f\right)^2 = 0 \tag{9}$$

EDO non linéaire !

Anomalie excentrique



Relation entre f et E

$$\begin{aligned} r\cos f &= AH \qquad & a\cos E &= OH \\ r\sin f &= HB \qquad & a\sin E &= HB' \end{aligned} \tag{10}$$

pour une valeur de x donnée nous avons

$$\frac{y_{ell}}{y_{aps}} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \tag{11}$$

en $x = H$ nous obtenons donc $HB = \sqrt{1-e^2}HB'$

Anomalie excentrique

en utilisant (10) on obtient donc

$$\begin{aligned} r\cos f &= a\cos E - ae \\ r\sin f &= a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{aligned} \tag{12}$$

la somme du carré de ces deux dernières relations donne alors

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{13}$$

en substituant (13) dans (12) on trouve facilement

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \qquad \text{et} \qquad \sin f = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin E}{1 - e\cos E}$$

un dernier calcul donne alors

$$\tan^2\left(\frac{f}{2}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\left(\frac{1-\cos E}{1+\cos E}\right) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)\tan^2\left(\frac{E}{2}\right)$$

qui permet d'obtenir la relation entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\left(\frac{E}{2}\right) \tag{14}$$

Anomalie moyenne

De la même façon

$$\frac{\text{Aire}\,(APB)}{\text{Aire}\,(APB')} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \tag{15}$$

or

$$\text{Aire}\,(APB) = \int_\tau^t dS = \frac{1}{2}\int_\tau^t C dt = \frac{C}{2}\,(t-\tau)$$

τ : instant du passage au périastre

la 3ème loi de Képler donne alors

$$\text{Aire}\,(APB) = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}\,\frac{2\pi}{T}\,(t-\tau) \tag{16}$$

anomalie moyenne

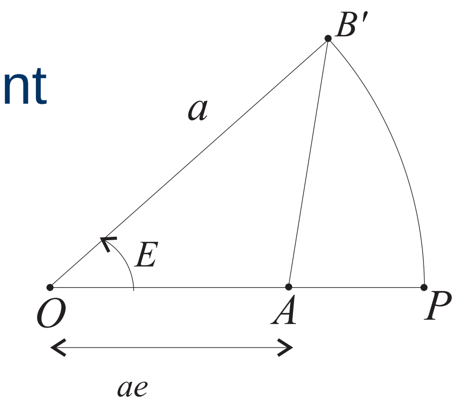
$$M = \frac{2\pi}{T}\,(t-\tau) \tag{17}$$

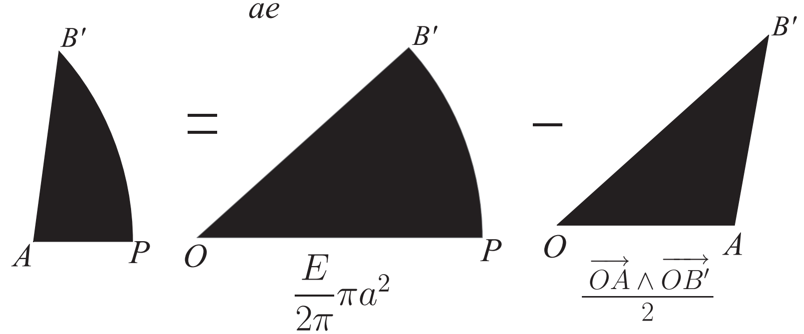
(16)+(17)+ (15) :

$$\text{Aire}\,(APB') = \frac{1}{2}a^2 M \tag{18}$$

Equation de Képler

D'autre part, plus géométriquement





$$\text{Aire}\,(APB') = \frac{1}{2}a^2\,(E - e\sin E)$$

L'égalité des deux relations donnant l'Aire(APB') permet d'écrire l'équation de Képler

$$E - e\sin E = M = \frac{2\pi}{T}\,(t-\tau) := n\,(t-\tau) \qquad (19)$$

n moyen mouvement, M : anomalie moyenne, E : anomalie excentrique

Eléments orbitaux

Caractérisation de l'orbite : $a, e, i, \Omega, \omega, \tau$.

Système solaire

- A : Soleil
- Plan de référence : Eclipitque
- Direction du point vernal planétaire : Intersection de l'équateur avec l'écliptique le jour de l'équinoxe de printemps

Autres coordonnées utilisées :

- longitude vraie $L = \Omega + \omega + f$
- longitude moyenne $l = \Omega + \omega + M$
- longitude du périgée $\tilde{\omega} = \Omega + \omega$

Ephémérides $\mapsto$ $l, \tilde{\omega}, \Omega, e, i, a$, Pol$(t)$, $[t]$ =siècles juliens (36 525 jours moyens), référence : 31 décembre 1999 à midi à Greenwich.