Quelques éléments à propos du trou noir de Schwarzchild

Jérôme Perez

28 août 2015

Table des matières

1 Métrique du champ central stationnaire à symétrie sphérique

Cas général

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right)\, dx^\alpha dx^\beta$$

$g_{\alpha\beta}\left(x\right) = g_{\beta\alpha}\left(x\right)$: 10 composantes indépendantes ....

→Métrique stationnaire

Il existe un champ de déplacement de genre temps qui laisse la métrique invariante.

$$\begin{array}{rl} & g_{44} = g_{44}\left(x^1, x^2, x^3\right) \\ k = 1, 2, 3 & g_{4k} = 0 \end{array}$$

→Métrique stationnaire à symétrie sphérique

$$\begin{array}{l} g_{44} = g_{44}\left(r\right) = A\left(r\right) \\ ds^2 = A\left(r\right)\, dt^2 - B\left(r\right) dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \end{array}$$

les fonctions $A\left(r\right)$ et $B\left(r\right)$ sont positives on pose donc

$$A\left(r\right) = e^{\nu(r)} \qquad \text{et} \qquad B\left(r\right) = e^{\lambda(r)}$$

et la métrique du champ central stationnaire devient

$$ds^2 = e^{\nu(r)}\, dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

il ne reste plus qu'à écrire les équations d'Einstein associées à cette métrique ...

2 Ecriture des équations de la dynamique

Dynamique : Equations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique sont

$$\begin{array}{l||l} g_{tt} = e^{\nu(r)} & g_{rr} = -e^{\lambda(r)} \\ g_{\theta\theta} = -r^2 & g_{\varphi\varphi} = -r^2\sin^2\theta \end{array}$$

les composantes contravariantes s'en déduisent directement

$$\begin{array}{l||l} g^{tt} = e^{-\nu(r)} & g^{rr} = -e^{-\lambda(r)} \\ g^{\theta\theta} = -\dfrac{1}{r^2} & g^{\varphi\varphi} = -\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{array}$$

de ces relations on peut calculer les christoffel de première espèce

$$a, b, c = t, r, \theta, \varphi$$

$$[bc, a] = \frac{1}{2}\left(-g_{bc,a} + g_{ab,c} + g_{ac,b}\right)$$

sachant que $[bc, a] = [cb, a]$ il doit y avoir 32 exemplaires de cet animal ....

On remarque très vite que si $a \neq b \neq c$ alors $[bc, a] = 0$

Il faut ensuite calculer les christoffel de seconde espèce

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ bc \end{array} \right\} = g^{am}[bc, m] = \sum_{m=t,r,\theta,\varphi} g^{am}[bc, m]$$

qui se ramène ici à

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ bc \end{array} \right\} = g^{aa}[bc, a]$$

Ces préambules étant effectués, il convient alors de calculer les composantes du Ricci

$$R_{ij} = R^{\mu}{}_{ij\mu} = \partial_\mu \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ ij \end{array} \right\} - \partial_j \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ i\mu \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \mu\nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ ij \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mu \\ j\nu \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \nu \\ i\mu \end{array} \right\}$$

où il y a bien sur sommation sur les indices μ et ν.

Pour finir, il ne restera plus qu'à calculer le scalaire de courbure de cette métrique

$$R = R^i{}_i = g^{ji}R_{ij}$$

qui se réduit ici à

$$R = \sum_{i=r,t,\theta,\varphi} g^{ii}R_{ii}$$

Indiquons sans les détailler quelques intermédiaires de calcul.

Les seuls christoffels de seconde espèce non nuls sont (plus leurs symétriques)

$$\left\{ {r \atop rr} \right\} = \frac{1}{2}\lambda' \qquad \left\{ {r \atop \theta\theta} \right\} = -re^{-\lambda}$$

$$\left\{ {r \atop \varphi\varphi} \right\} = -r\sin^2\theta\, e^{-\lambda} \qquad \left\{ {r \atop tt} \right\} = \frac{1}{2}v' e^{\nu-\lambda}$$

$$\left\{ {\theta \atop r\theta} \right\} = \left\{ {\varphi \atop r\varphi} \right\} = \frac{1}{r} \qquad \left\{ {\theta \atop \varphi\varphi} \right\} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\left\{ {\varphi \atop \theta\varphi} \right\} = \cot\theta \qquad \left\{ {t \atop rt} \right\} = \frac{1}{2}\nu'$$

Calculons à présent et par exemple, la composante rr du Ricci, nous avons vu que

$$\begin{aligned} R_{rr} = \quad & \sum_{\mu} \partial_\mu \left\{ {\mu \atop rr} \right\} - \sum_{\mu} \partial_r \left\{ {\mu \atop r\mu} \right\} \\ + \quad & \sum_{\mu,\nu} \left\{ {\mu \atop \mu\nu} \right\} \left\{ {\nu \atop rr} \right\} - \sum_{\mu,\nu} \left\{ {\mu \atop r\nu} \right\} \left\{ {\nu \atop r\mu} \right\} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$R_{rr} =$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \partial_r \left\{ {r \atop rr} \right\} & + & \partial_\theta \left\{ {\theta \atop rr} \right\} & + & \partial_\varphi \left\{ {\varphi \atop rr} \right\} & + & \partial_t \left\{ {t \atop rr} \right\} \\
- & \partial_r \left\{ {r \atop rr} \right\} & - & \partial_r \left\{ {\theta \atop r\theta} \right\} & - & \partial_r \left\{ {\varphi \atop r\varphi} \right\} & - & \partial_r \left\{ {t \atop rt} \right\} \\
+ & \left\{ {r \atop rr} \right\}\left\{ {r \atop rr} \right\} & + & \left\{ {r \atop r\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop rr} \right\} & + & \left\{ {r \atop r\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop rr} \right\} & + & \left\{ {r \atop rt} \right\}\left\{ {t \atop rr} \right\} \\
+ & \left\{ {\theta \atop \theta r} \right\}\left\{ {r \atop rr} \right\} & + & \left\{ {\theta \atop \theta\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop rr} \right\} & + & \left\{ {\theta \atop \theta\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop rr} \right\} & + & \left\{ {\theta \atop \theta t} \right\}\left\{ {t \atop rr} \right\} \\
+ & \left\{ {\varphi \atop \varphi r} \right\}\left\{ {r \atop rr} \right\} & + & \left\{ {\varphi \atop \varphi\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop rr} \right\} & + & \left\{ {\varphi \atop \varphi\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop rr} \right\} & + & \left\{ {\varphi \atop \varphi t} \right\}\left\{ {t \atop rr} \right\} \\
- & \left\{ {r \atop rr} \right\}\left\{ {r \atop rr} \right\} & - & \left\{ {r \atop r\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop rr} \right\} & - & \left\{ {r \atop r\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop rr} \right\} & - & \left\{ {r \atop rt} \right\}\left\{ {t \atop rr} \right\} \\
- & \left\{ {\theta \atop rr} \right\}\left\{ {r \atop \theta r} \right\} & - & \left\{ {\theta \atop r\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop \theta r} \right\} & - & \left\{ {\theta \atop r\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop \theta r} \right\} & - & \left\{ {\theta \atop rt} \right\}\left\{ {t \atop \theta r} \right\} \\
- & \left\{ {\varphi \atop rr} \right\}\left\{ {r \atop \varphi r} \right\} & - & \left\{ {\varphi \atop r\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop \varphi r} \right\} & - & \left\{ {\varphi \atop r\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop \varphi r} \right\} & - & \left\{ {\varphi \atop rt} \right\}\left\{ {t \atop \varphi r} \right\} \\
- & \left\{ {t \atop rr} \right\}\left\{ {r \atop tr} \right\} & - & \left\{ {t \atop r\theta} \right\}\left\{ {\theta \atop tr} \right\} & - & \left\{ {t \atop r\varphi} \right\}\left\{ {\varphi \atop tr} \right\} & - & \left\{ {t \atop rt} \right\}\left\{ {t \atop tr} \right\}
\end{array}$$

une fois les simplifications et les calculs effectués il reste

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\left(\lambda' - \nu'\right) + \frac{\lambda'}{r}$$

on obtient de la même façon (si le coeur vous en dit) les autres composantes du Ricci, qui s'avère ici être diagonnal

$$\left\{ \begin{aligned} R_{rr} = \quad & (-1)\left[\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu' - \lambda'\right) - \frac{\lambda'}{r}\right] \\ R_{tt} = \quad & (+1)\left[\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\left(\nu' - \lambda'\right) - \frac{\lambda'}{r}\right] e^{\nu-\lambda} \\ R_{\theta\theta} = \quad & \left[\left(1 - e^{-\lambda}\right) + \frac{r}{2}e^{-\lambda}\left(\lambda' - \nu'\right)\right] \\ R_{\varphi\varphi} = \quad & \left[\left(1 - e^{-\lambda}\right) + \frac{r}{2}e^{-\lambda}\left(\lambda' - \nu'\right)\right]\sin^2\theta \end{aligned} \right.$$

on calcule enfin le scalaire de courbure

$$\begin{aligned} R &= -e^{-\lambda}\, R_{rr} - \frac{1}{r^2}\, R_{\theta\theta} + -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} R_{\varphi\varphi} + e^{\nu}\, R_{tt} \\ &= 2e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\,(\nu'-\lambda')}{4} - \frac{\nu'-\lambda'}{r}\right] - \frac{2}{r^2}\left[1-e^{-\lambda}\right] \end{aligned}$$

nous en déduisons héroïquement les composantes du tenseur d'Einstein, lui aussi diagonal pour cette métrique

$$\begin{cases} G_{rr} = & \dfrac{\nu'}{r} + \dfrac{1}{r^2}\left(1-e^{\lambda}\right) \\ G_{tt} = & e^{\nu-\lambda}\left(\dfrac{\lambda'}{r} - \dfrac{1}{r^2}\right) + \dfrac{e^{\nu}}{r^2} \\ G_{\theta\theta} = & \dfrac{re^{-\lambda}}{2}\left(r\nu'' + (\nu'-\lambda')\left[1+\dfrac{r\nu'}{2}\right]\right) \\ G_{\varphi\varphi} = & G_{\theta\theta}\sin^2\theta \end{cases}$$

le tenseur énergie imulsion est beaucoup plus simple à obtenir, pour un fluide parfait de pression p et de densité d'énergie ε nous avons

$$\mathbb{T} = (\varepsilon + p)\,\frac{\mathbb{U}\otimes\mathbb{U}}{c^2} - p\check{g}$$

avec dans le référentiel de repos

$$\mathbb{U} = \frac{d\mathbb{M}}{d\tau} = (0,0,0,c)^T$$

il vient immédiatement

$$T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(pe^{-\lambda}, \frac{p}{r^2}, \frac{p}{r^2\sin^2\theta}, \varepsilon e^{-\nu}\right)$$

les équations d'Einstein distinctes sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} c^4 G_{rr} = 8\pi G\,(g_{rr})^2\, T^{rr} \\ c^4 G_{tt} = 8\pi G\,(g_{tt})^2\, T^{tt} \\ c^4 G_{\theta\theta} = 8\pi G\,(g_{\theta\theta})^2\, T^{\theta\theta} \end{cases}$$

en les remaniant quelque peu on obtient finalement

$$\begin{cases} e^{-\lambda}\left(\dfrac{\nu'}{r} + \dfrac{1}{r^2}\right) - \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{8\pi G}{c^4} p \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda'}{r} - \dfrac{1}{r^2}\right) + \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{8\pi G}{c^4}\varepsilon \\ e^{-\lambda}\left(\nu'' + [\nu'-\lambda']\left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{\nu'}{2}\right]\right) = \dfrac{16\pi G}{c^4} p \end{cases}$$

on peut en fait encore simplifier ces équations en écrivant que le tenseur énergie impulsion est à divergence covariante nulle

$$\nabla_a T^{\mu a} = 0 \Leftrightarrow \partial_a T^{\mu a} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ ab \end{matrix} \right\} T^{ab} + \left\{ \begin{matrix} a \\ ab \end{matrix} \right\} T^{\mu b}$$

qui fournit la relation (contenue mais non explicite dans les équations d'Eisntein)

$$p' + \frac{1}{2}\nu' (p+\varepsilon) = 0$$

qui permet de trouver la formulation définitive de notre système

$$\begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \dfrac{8\pi G}{c^4}(p+\varepsilon) \\ \\ \nu' = \dfrac{-2p'}{p+\varepsilon} \\ \\ e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda'}{r} - \dfrac{1}{r^2}\right) + \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{8\pi G}{c^4}\varepsilon \end{cases}$$

3 Solution à l'exterieur de la source

Dans ce cas $\varepsilon = p = 0$,
la dernière équation s'écrit

$$e^{-\lambda} - r\lambda' e^{-\lambda} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(re^{-\lambda}\right) = 1$$

et s'intègre en

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{\kappa_1}{r}$$

la première équation s'écrit

$$\nu' + \lambda' = 0$$

et s'intègre en

$$\lambda = -\nu + cste \quad \rightarrow \quad e^{\nu} = \kappa_2 e^{-\lambda} = \kappa_2\left(1 + \frac{\kappa_1}{r}\right)$$

la métrique s'écrit donc à l'extérieur de la source

$$ds^2 = \kappa_2\left(1 + \frac{\kappa_1}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1+\frac{\kappa_1}{r}} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

le choix des constantes se fait par "contact" avec la métrique en champ faible, et donc pour $r \to \infty$, nous devons avoir

$$\kappa_2\left(1 + \frac{\kappa_1}{r}\right) = g_{44} = \left(1 + \frac{2\psi}{c^2}\right)$$

en symétrie sphérique euclidienne le potentiel loin d'une source M est donné par

$$\psi = -\frac{GM}{r}$$

en identifiant, il vient

$$\begin{cases} \kappa_2 = 1 & \text{(convention)} \\ \kappa_1 = -\dfrac{2GM}{c^2} \end{cases}$$

et nous obtenons la métrique dite de Schwarzschild (1916) crée à l'extérieur d'un corps à symétrie sphérique par lui-même

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right)$$

ce n'est pas la métrique la plus générale au voisinage d'un corps grave, ...

En 1919, Reisner-Nordstrøm trouvent la métrique à l'extérieur d'un corps de charge Q dans un champ électromagnétique

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2GM}{c^2 r} + \dfrac{Q^2}{r^2}\right)} \\ & -r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) \end{aligned}$$

Enfin en 1963, Kerr et Kerr-Newman trouvent la métrique d'un corps de charge Q en rotation de moment cinétique par unité de masse a qui en coordonnées de Boyer-Lindquist

$$\begin{aligned} & \Delta = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + a^2 + Q^2 \\ & \text{et} \\ & \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta \end{aligned}$$

s'écrit

$$\begin{aligned} ds^2 = & \tfrac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 - \tfrac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2 + a^2 d\varphi) - a dt\right]^2 \\ & -\tfrac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

qui est à la base de l'étude des étoiles relativistes en rotation.

4 Structure interne des astres compacts

En retenant les leçons apprises à l'extérieur du corps nous effectuons le chagement de variable

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{m(r)}{r} \qquad \text{avec} \qquad m(r) = \frac{2GM(r)}{c^2}$$

la quantité $M(r)$ représentant la masse contenue dans la sphère de rayon r. La troisième équation s'écrit alors

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\varepsilon}{c^2}$$

analogue de la version Newtonienne bien connue

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

on peut aussi éliminer ν' entre les deux premières équations, il vient

$$\frac{dp}{dr} = -G\left[\frac{p+\varepsilon}{c^2}\right]\frac{\left[M(r) + \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{3p}{c^2}\right]}{r^2\left[1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right]}$$

qui généralise l'équation d'équilibre hydrostatique newtonienne chère aux étoiles classiques

$$\frac{dp}{dr} = -G\rho\frac{M(r)}{r^2}$$

5 Trous noirs de Schwarzschild

Dans la métrique de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

on constate que la composante

$$g_{rr} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

de la métrique devient singulière pour le rayon de Schwarzschild

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

pour la plupart des objets r_s est plus petit que leur taille, pour le soleil

$$r_s = \frac{2GM_\odot}{c^2} = 2,96\ \ km$$

alors que

$$R_\odot = 6,96\ \ 10^5\ \ km$$

pour que l'objet soit entièrement occlus dans son rayon de Schwarzschild, il faut que sa densité moyenne $\bar{\rho}$ soit telle que

$$\frac{4}{3}\pi\bar{\rho}r_s^3 > M$$

soit

$$\bar{\rho} = \frac{3}{32\pi}\frac{c^6}{G^3}\frac{1}{M^2} = 1.8 \quad 10^{16} \quad g.cm^{-3}\left[\frac{M}{M_\odot}\right]^{-2}$$

i.e. 10 fois supérieure à la densité du noyau atomique !

Un objet occlus dans son rayon de Schwarzschild est appelé trou noir de Schwarzschild.

Quid de la singularité ?

Un certain nombre de remarques :

1. r, θ, φ et t ne sont pas des quantités physiques mais uniquement des coordonnées destinées à repérer les évènements : Si r est la distance au centre et t le temps, ce n'est que dans notre vision classique, et lorsque $r \approx r_s$ leur interprétation peut changer et leur sens physique devenir obscur !
2. les composantes de la métrique ne sont d'après le principe d'équivalence que des potentiels, le fait qu'il deviennent singuliers peut ne pas être génant si les effets physiques associés ne le sont pas.

En ce qui concerne la singularité de Schwarzschild un rapide exament permet de voir qu'elle ne pose pas de problèmes, mis à part les aspects déroutants dûs à son caractère relativiste.

La singularité est essentiellement due à un mauvais choix de coordonnées, pour un mouvement radial ($\theta = cste$ et $\varphi = cste$) le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{l} u = e^{\frac{r}{2r_s}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_s}\right)\sqrt{\frac{r}{r_s}-1} \\ \\ v = e^{\frac{r}{2r_s}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s}\right)\sqrt{\frac{r}{r_s}-1} \end{array}\right. \qquad \text{si } r > r_s$$

$$\left\{\begin{array}{l} u = e^{\frac{r}{2r_s}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s}\right)\sqrt{1-\frac{r}{r_s}} \\ \\ v = e^{\frac{r}{2r_s}}\,\mathrm{ch}\left(\frac{t}{2r_s}\right)\sqrt{1-\frac{r}{r_s}} \end{array}\right. \qquad \text{si } r < r_s$$

permet d'obtenir une représentation *régulière* de l'espacetemps de Schwarzschild

$$ds^2 = \frac{4r_s^3}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}\left[dv^2 - du^2\right]$$

l'étude de la composante temps d'un mouvement géodésique de chute libre radiale en coordonnées classiques

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\left\{\begin{array}{c} t \\ rt \end{array}\right\}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0$$

est intégrable et montre que pour un observateur fixe, le corps en chute libre passera l'horizon $r = r_s$ au bout d'un temps infini, alors que l'observateur attaché au corps passera l'horizon en un temps fini et sans encombres (si ce n'est les effets de marée, et le fait que sa coordonnée d'espace devient t et sa coordonnée de temps devient r !).