

Quelques éléments propos de la solution de
Friedmann-Lemaître des équations de la relativité générale

Jérôme Perez

28 août 2015

Table des matières

1	Solution de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker	5
1.1	Equations de la dynamique de l'Univers	6
1.1.1	Décélération et age de l'Univers	8
1.2	Conservation de l'énergie impulsion : $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$	10
1.3	Quelle équation d'état ?	12
1.3.1	Cas de bosons relativistes de potentiel chimique nul : Photons, ...?	13
1.3.2	Cas de fermions relativistes de potentiel chimique nul : Neutrinos, ...?	15
1.3.3	Cas d'un gaz parfait classique non relativiste	16
1.3.4	Cas de la matière incohérente : Poussière	18
1.3.5	Cas du champ scalaire : Le vide!	18
1.3.6	Résumé	19
1.4	Quelques solutions des équations de Friedmann	20
1.4.1	Univers plat : $k = 0$	20
1.4.2	Univers courbes	21
1.4.3	Univers de Friedmann avec constante cosmologique	23

Chapitre 1

Solution de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

Dans toute cette section nous considèrerons les unités "naturelles" $c = 1$ et la signature $(-+++)$ pour la métrique. Indices latin : 1,2,3 indices grec : 0,1,2,3 Composante temporelle : 0

Les sections spatiales de l'espace temps sont des variétés homogènes isotropes de dimension 3 . L'isotropie impose que la courbure est la même dans toutes les directions, et l'homogénéité impose que le long d'une direction la courbure soit une homothétique, la réunion de ces deux symétrie impose donc des espaces à courbure constante classifiables en trois catégories : L'hyperplan, l'hypersphère et l'hyperbole représentés par la métrique

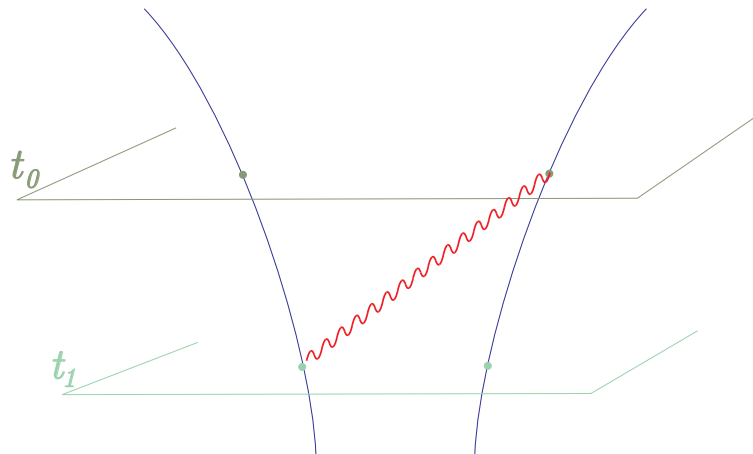
$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

où les différentes valeurs possibles du paramètre sont :

- $k = +1$: Modèle fermé, car le volume de la section spatiale est celui d'une hypersphère donc fini,
- $k = 0$: Modèle à section plate,
- $k = -1$: Modèle ouvert, car le volume de la section spatiale est celui d'une hyperbole donc infini.

La présence du facteur d'échelle $R(t)$ est à l'origine d'un phénomène physique fondamental en astrophysique

Effet doppler cosmologique



2 observables comobiles échangeant des signaux électromagnétiques ...

$$ds^2 = d\theta = d\varphi = 0$$

on a donc

$$-dt^2 + \frac{R^2(t) dr^2}{1 - kr^2} = 0$$

soit en intégrant entre l'instant d'émission t_1 et l'instant de réception t_0

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1) \quad (1.1)$$

Soit T_1 le résultat de la mesure de la période de l'onde effectuée par l'émetteur et T_0 le résultat de la même mesure effectuée par le récepteur, on a toujours

$$\int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) \quad (1.2)$$

on déduit donc de la soustraction de (1.1) et (1.2) que

$$\int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{dt}{R(t)} = 0$$

en supposant que $R(t)$ ne varie pas pendant la mesure de la période, on obtient donc

$$\frac{T_1}{R(t_1)} = \frac{T_0}{R(t_0)}$$

en introduisant la fréquence ω où la longueur λ de l'onde échangée on a donc

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$$

on introduit généralement le décalage spectral z tel que

$$1 + z = \frac{R(t_{réception})}{R(t_{émission})}$$

qui s'interprète donc comme le rapport des dimensions de l'Univers entre le moment de l'émission et celui de la réception.

1.1 Equations de la dynamique de l'Univers

Il s'agit tout d'abord d'écrire les équations d'Einstein, et donc de calculer les composantes du Ricci et du tenseur énergie impulsion.

Posant

$$f^2(r) = \frac{1}{1 - kr^2}$$

les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique sont donc

$$\begin{array}{l} g_{00} = -1 \\ g_{11} = R(t)^2 f^2(r) = \tilde{g}_{rr} \end{array} \left\| \begin{array}{l} g_{22} = r^2 R(t)^2 = \tilde{g}_{\theta\theta} \\ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta R(t)^2 = \tilde{g}_{\varphi\varphi} \end{array} \right.$$

en séparant les parties spatiales et temporelles on écrit souvent

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R(t)^2 d\sigma^2 - dt^2$$

avec

$$d\sigma^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

les seuls christoffels non nuls sont

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= R \dot{R} \tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{R}}{R} \tilde{g}_{ij} \end{aligned}$$

des calculs très instructifs et semblables à ceux effectués dans le cas de la métrique de Schwarzschild fournissent les composantes covariantes du Ricci, qui dans ce contexte est diagonal

$$\begin{cases} R_{00} = 3\ddot{R}R^{-1} \\ R_{ij} = -(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k) \tilde{g}_{ij} \end{cases}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent ($c = 1$)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Il est commode d'introduire le scalaire d'énergie impulsion $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, on contracte par $g_{\mu\nu}$

$$R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = 8\pi GT$$

soit

$$-R = 8\pi GT$$

que l'on réintroduit dans l'équation de départ pour obtenir

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

pour le fluide parfait de pression P et de densité d'énergie ϵ le tenseur énergie impulsion s'écrit

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \epsilon)u_\mu u_\nu \quad (1.3)$$

Pour obtenir un tel résultat deux méthodes :

- Une plus physique, on écrit que dans le référentiel lié à une particule de ce fluide parfait (coordonnées comobiles), on a $T_{com}^{ij} = P\delta^{ij}$, $T_{com}^{0i} = T_{com}^{i0} = 0$ et $T_{com}^{00} = \epsilon$, qui provient lui-même d'une écriture compactifiée des équations de conservation en hydrodynamique. On obtient alors $T^{\alpha\beta}$ dans un référentiel quelconque en écrivant le changement de référentiel

$$T^{\alpha'\beta'} = \partial_\alpha x^{\alpha'} \partial_\beta x^{\beta'} T_{com}^{\alpha\beta}$$

- Une plus mathématique, ou l'on accepte que la densité de lagrangien n'est autre que la densité d'énergie : $\mathcal{L} = \epsilon$, on injecte alors une partie de l'équation d'état d'un gaz parfait (voir plus bas) $3P = 2\epsilon$ ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 3P - \epsilon = 4 - (P + \epsilon) \\ &= g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}P - (P + \epsilon) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

les deux contractions sont explicitées car traitres ! d'autant plus que $c = 1$ n'arrange rien à la compréhension du phénomène pour le novice ...

Il ne reste alors plus qu'à utiliser la définition du tenseur énergie impulsion (issue de la partie non géométrique des équations d'Einstein en formulation variationnelle, ... !)

$$\frac{1}{2}T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{L} \quad (1.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(g_{\mu\nu,\rho})} \right] \quad (1.5)$$

pour retrouver (1.3)

Quoiqu'il en soit, le calcul donne

$$T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T = \frac{1}{2}(\epsilon - P)g_{\mu\nu} + (P + \epsilon)u_\mu u_\nu$$

Les équations d'Einstein s'écrivent donc pour les 3 composantes spatiales

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi GR^2(\epsilon - P) \quad (1.6)$$

et pour la composante temporelle

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P) \quad (1.7)$$

Cette équation est appelée première équation de Friedmann. En éliminant \ddot{R} dans la première équation grâce à (??), on obtien la seconde équation de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G\epsilon}{3}$$

les inconnues du problème sont bien sur $R(t)$, $P(t)$ et $\epsilon(t)$ ces deux dernières fonctions étant de plus reliées par une équation d'état.

Ces deux équations se prêtent à deux analyses forts simples.

1.1.1 Décélération et age de l'Univers

La première équation de Friedmann nous dit que

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P)R$$

pour des fluides à pression et densité positive \ddot{R} et donc négatif, les observations de galaxies montrent un Univers en expansion (Loi de Hubble) ainsi \dot{R} est positive, la fonction R est donc concave et doit donc s'annuler dans le passé, \rightsquigarrow Big-Bang ...

→ Il existe donc un temps passé, pour lequel le facteur d'échelle doit s'annuler, ce temps est pris comme origine des temps, la mesure de la vitesse d'éloignement des galaxies doit théoriquement permettre d'obtenir un majorant du temps écoulé depuis cette origine, celui ci est de l'ordre de 15 Milliards d'années.

→ La concavité de R assure qu'indépendamment de son contenu les Univers de Friedman sont en expansion décélérée.

Cette décélération pourrait cependant être remise en cause par la présence d'une constante cosmologique : En rajoutant un terme $8\pi G\Lambda$ au tenseur énergie impulsion dans les équations d'Einstein, on trouve

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P - 2\Lambda) R$$

et si un beau jour, à cause de l'expansion, $\epsilon + 3P$ devient négligeable devant $\Lambda > 0$, celle ci pourrait bien accélérer. Il se trouve que les observations de supernovae semblent l'indiquer, mais ceci est une autre histoire.

Expansion finie ou infinie

La deuxième équation de Friedmann indique que

$$k = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$$

en introduisant la "constante" de Hubble

$$H = \frac{\dot{R}}{R}$$

on a donc

$$\frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\epsilon - \frac{3H^2}{8\pi G} \right)$$

La constante de Hubble est à priori observable via la vitesse d'éloignement des galaxies, et l'on peut donc définir la densité critique

$$\epsilon_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1,1 \cdot 10^{-29} \left[\frac{cH}{75 \text{ km/s/Mpc}} \right]^2 \text{ g.cm}^{-3}$$

qui permet d'écrire

$$\frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} (\epsilon - \epsilon_c)$$

On peut tenter de mesurer la densité d'énergie présente dans l'Univers ϵ_0 et espérer en tirer les conclusions suivantes :

1. Si $\epsilon_0 < \epsilon_c$, l'expansion ne s'arrête jamais, $k < 0$, la géométrie spatiale de l'Univers est hyperbolique,
2. Si $\epsilon_0 = \epsilon_c$, l'expansion ne s'arrête jamais, $k = 0$, l'espace est plat,
3. Si $\epsilon_0 > \epsilon_c$, l'expansion s'arrêtera dans le futur et l'Univers se contractera vers un Big-Crunch, $k > 0$, la géométrie spatiale de l'Univers est sphérique.

Mais tout ceci est bien trop compliqué pour un modeste cours de gravitation ...

1.2 Conservation de l'énergie impulsion : $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$

Fluide parfait de pression P et de densité d'énergie ϵ

$$T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \epsilon) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}$$

P et ϵ : 4 Scalaires donc $D_\mu P = \partial_\mu P$ et $D_\mu \epsilon = \partial_\mu \epsilon$

$g^{\mu\nu} \in \ker(D_\mu)$

donc

$$0 = g^{\mu\nu} \partial_\mu P + \partial_\mu \left([P + \epsilon] \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) + [P + \epsilon] \Gamma_{\sigma\mu}^\mu \frac{u^\nu u^\sigma}{c^2} + [P + \epsilon] \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \frac{u^\mu u^\sigma}{c^2}$$

Premier Christoffel :

Def : $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\sigma} + \partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}) g^{\rho\nu}$

ainsi

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\mu}^\mu &= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\sigma} + \partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}) g^{\rho\mu} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\rho g_{\rho\sigma} + g^{\rho\mu} \partial_\sigma g_{\rho\mu} - \partial^\mu g_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \partial_\sigma g_{\rho\mu} \end{aligned}$$

on se rappelle alors de la dérivée du déterminant

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Leftrightarrow \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \partial_\sigma g_{\rho\mu} = \frac{\partial_\sigma(\sqrt{-g})}{\sqrt{-g}}$$

ainsi

$$[P + \epsilon] \Gamma_{\sigma\mu}^\mu u^\nu u^\sigma = \frac{[P + \epsilon] u^\nu u^\sigma}{c^2 \sqrt{-g}} \partial_\sigma(\sqrt{-g})$$

Deuxième Christoffel :

Quadrivitesse : $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$

Coordonnées comobiles : $\gamma = 1$ et $\vec{v} = \vec{0}$ on a donc

$$u^\mu u^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu = c^2 \Gamma_{00}^\nu = \frac{c^2}{2} (\partial_0 g_{\rho 0} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}) g^{\rho\nu}$$

or

$$g_{0\rho} = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho = 0 \\ 0 & \text{si } \rho \neq 0 \end{cases} \quad \text{ainsi } \partial_\sigma g_{0\rho} = 0$$

et par conséquent

$$[P + \epsilon] \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \frac{u^\mu u^\sigma}{c^2} = 0$$

La conservation de l'énergie impulsion s'écrit donc

$$0 = g^{\mu\nu} \partial_\mu P + \partial_\mu \left([P + \epsilon] \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) + \frac{[P + \epsilon] u^\nu u^\sigma}{c^2 \sqrt{-g}} \partial_\sigma(\sqrt{-g})$$

soit

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu P + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left([P + \epsilon] \sqrt{-g} \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \right) = 0$$

Composantes spatiales : $0 = 0$

Composante temporelle :

$$g^{\mu 0} \partial_\mu P + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left([P + \epsilon] \sqrt{-g} \frac{u^\mu}{c} \right) = 0$$

dont il ne reste plus que

$$-\frac{dP}{dt} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d}{dt} ([P + \epsilon] \sqrt{-g}) = 0$$

et comme

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\frac{R^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}} = R^3(t) \phi(r, k, \theta)$$

l'équation de conservation de l'énergie impulsion s'écrit donc

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{R^3} \frac{d}{dt} ([P + \epsilon] R^3)$$

On retrouve cette équation sous plusieurs formes équivalentes

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{R^3} \frac{d}{dt} ([P + \epsilon] R^3) &\Leftrightarrow P \frac{dR^3}{dt} = -\frac{d(\epsilon R^3)}{dt} \\ &\Leftrightarrow -3PR^2 = \frac{d(\epsilon R^3)}{dR} \\ &\Leftrightarrow -3(P + \epsilon) = R \frac{d\epsilon}{dR} \end{aligned}$$

On peut même la formuler de façon thermodynamique : Si l'on introduit le volume de l'Univers $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et son énergie interne $E = \epsilon V$, il vient

$$-3PR^2 = \frac{d(\epsilon R^3)}{dR} \Leftrightarrow P = -\frac{dE}{dV}$$

qui peut donc finalement s'écrire

$$PdV + dE = 0$$

si l'on se souvient du premier principe de la thermodynamique : $TdS = dE + PdV$, on peut donc en conclure que la conservation de l'énergie impulsion dans la métrique FLRW signifie que l'univers est en évolution adiabatique ($dS = 0$).

Les équations fondamentales de la cosmologie sont donc les deux équations de Friedmann

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{k}{R} = \frac{8\pi G \epsilon}{3} \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} (\epsilon + 3P) \end{cases}$$

ces deux équations "contiennent" la conservation de l'énergie impulsion

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{R^3} \frac{d}{dt} ([P + \epsilon] R^3)$$

que l'on peut donc dans toute étude substituer à l'une des deux équations de Friedmann. Ce système sera fermé par une équation d'état reliant P et ϵ .

1.3 Quelle équation d'état ?

Pour traiter de la question de l'équation d'état nous allons faire ou refaire un peu de physique statistique en traitant divers cas envisageables pour l'univers.

Nous considérons l'Univers comme une boîte remplie de particules. Nous découpons cette boîte en états. L'état i regroupe les n_i particules ayant la l'énergie ϵ_i . L'énergie totale contenue dans l'Univers est donc

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i = \epsilon V \quad (1.8)$$

ou ϵ et V représentent respectivement la densité d'énergie et le volume de l'Univers. Il est bien connu que cet l'état d'énergie ϵ_i peut être dégénéré : selon la nature des particules, classique ou quantique, bosonique ou fermionique, on divisera chaque état en g_i cellules. Nous ne prendrons en compte qu'un seul fluide à la fois dont la densité d'énergie sera considérée dominante sur les éventuels autres fluides en présence. Bien entendu le fluide dominant pour changer de nature au cours de l'histoire de l'Univers.

Pour relier la densité d'énergie à la pression du fluide, il faut utiliser le premier principe de la thermodynamique qui est supposé s'appliquer dans le cadre de l'Univers tout entier et qui nous dit que

$$dE = -Pdv + TdS \quad (1.9)$$

Nous pourrions en tirer directement la pression

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S=cste}$$

mais le passage par l'énergie libre est préférable pour diverses raisons, thermodynamiques tout d'abord mais aussi de variables indépendantes ... L'énergie libre est donnée par la relation $F = E - TS$ ainsi

$$dF = dE - Tds - SdT$$

soit en utilisant (1.9)

$$dF = -PdV - SdT$$

d'où nous tirons

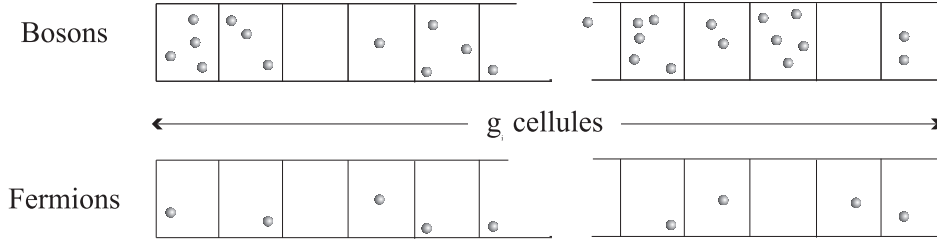
$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T=cste}$$

Il ne reste plus qu'à calculer E et S , c'est un exercice de physique statistique dont le résultat dépend de la nature des particules en présence.

Par définition l'entropie est donnée par

$$S = k \ln W \quad (1.10)$$

où k est la constante de Boltzman et W le nombre de complexions de l'espace des phases, c'est-à-dire le nombre de configurations microscopiques distinctes qui donnent le même état macroscopique.



1.3.1 Cas de bosons relativistes de potentiel chimique nul : Photons, ... ?

Le fait que le potentiel chimique soit nul implique la non conservation du nombre de ces particules, s'agissant de bosons il s'agit donc d'un gaz de photons. Il est bien connu dans ce cas que le nombre de complexions est donné par

$$W = \prod_i C_{g_i}^{n_i} = \prod_i \frac{(g_i + n_i)!}{g_i! n_i!}$$

et que pour un gaz de photons à l'équilibre à température $T = (\beta k)^{-1}$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\beta \varepsilon_i} - 1}$$

les relations (1.8) et (1.10)¹

$$\begin{aligned} E &= \sum_i n_i \varepsilon_i \\ &= \sum_i \frac{\varepsilon_i g_i}{e^{\beta \varepsilon_i} - 1} \\ S &= k \sum_i \{ n_i \beta \varepsilon_i - g_i \ln [1 - e^{-\beta \varepsilon_i}] \} \\ &= k \beta E - k \sum_i g_i \ln [1 - e^{-\beta \varepsilon_i}] \end{aligned}$$

comme habituellement en physique statistique on "passe" alors à la limite continue en introduisant la densité d'état dans l'espace des vitesses

$$g(p) dp = g_s \times \frac{V}{h^3} \times 4\pi p^2 dp$$

1. Pour l'entropie on fait largement usage de l'approximation de Stirling

$$\text{si } x \gg 1, \ln(x!) \approx x \ln x - x$$

pour $x = g_i$ et n_i

ou V est le volume occupé par le gaz, h la constante de Planck et g_s le facteur de dégénérescence de la particule, $g_s = 2$ pour les deux états de polarisation du photon.

Pour les photons (et toutes les particules relativistes d'ailleurs)

$$\varepsilon = cp$$

ainsi

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon$$

les grandeurs thermodynamiques cherchées sont donc

$$E = \int \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$$S = k\beta E - k \int g(\varepsilon) \ln [1 - e^{-\beta\varepsilon}] d\varepsilon$$

La densité d'état vérifie la relation

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon}{3} g(\varepsilon) \right] = g(\varepsilon)$$

on peut donc procéder à une intégration par partie pour obtenir l'entropie

$$\begin{aligned} S &= k\beta E - k \left[\frac{\varepsilon}{3} g(\varepsilon) \ln [1 - \exp(-\beta\varepsilon)] \right]_0^\infty \\ &\quad + \frac{k\beta}{3} \int \frac{\varepsilon g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} d\varepsilon \end{aligned}$$

le terme tout intégré central est nul et l'on reconnaît l'énergie dans la dernière intégrale (en multipliant haut et bas par $e^{\beta\varepsilon}$), ainsi

$$S = k\beta E + \frac{k\beta E}{3} = \frac{4}{3} k\beta E = \frac{4}{3} \frac{E}{T}$$

Nous pouvons donc calculer l'énergie libre

$$F = E - TS = -\frac{1}{3} E$$

Pour obtenir la pression, il ne reste donc plus qu'à expliciter l'énergie

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon \\ &= \frac{8\pi V \beta^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

cette intégrale est un régal à calculer², il vient

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \Gamma(4) \zeta(4) = 6 \times \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$$

2. Je ne résiste pas à la tentation :

et donc

$$E = \epsilon(T) V$$

avec

$$\epsilon(T) = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 = a T^4$$

la densité d'énergie d'un gaz de photon est donc proportionnelle à la puissance quatrième de la température (loi de Stéfán), le coefficient de proportionalité est la constante de Stéfán a .

Nous obtenons donc finalement la pression

$$\begin{aligned} P &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T=cste} = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{T=cste} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial (\epsilon(T) V)}{\partial V} \right)_{T=cste} = \frac{1}{3} \epsilon(T) \end{aligned}$$

et notre première équation d'état ...

L'équation d'état ou le type de matière dominant est la lumière sera donc

$$P = \frac{1}{3} \epsilon$$

1.3.2 Cas de fermions relativistes de potentiel chimique nul : Neutrinos, ... ?

Les calculs sont semblables à ceux effectués pour les photons (c'est d'ailleurs la raison pour laquelle ...)

Soit l'intégrale (dite de Sommerfeld)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{e^x \pm 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} x^\alpha}{1 \pm e^{-x}} dx$$

Le $-$ concerne les bosons et le $+$ concerne les fermions. Pour tout x dans le domaine d'intégration $e^{-x} < 1$ ainsi, sur ce domaine

$$\frac{1}{1 \pm e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mp e^{-x})^n$$

ainsi

$$I = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n x^\alpha e^{-x(n+1)} dx = \Gamma(1 + \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^n}{(n+1)^{1+\alpha}}$$

où surgit la fonction Γ d'Euler bien connue ici, la dernière somme n'est pas en reste car il s'agit de la fameuse fonction ζ de Riemann (quelle distribution pour une intégrale), on donc

$$I = \begin{cases} \Gamma(1 + \alpha) \zeta(1 + \alpha) & \text{pour les bosons} \\ (2^{-\alpha} - 1) \Gamma(1 + \alpha) \zeta(1 + \alpha) & \text{pour les fermions} \end{cases}$$

je vous avais prévenu ...

Nous avons maintenant

$$W = \prod_i C_{n_i}^{g_i} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

et à l'équilibre

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\beta \varepsilon_i} + 1}$$

d'où l'on tire

$$E = \sum_i \frac{\varepsilon_i g_i}{e^{\beta \varepsilon_i} + 1}$$

$$S = k\beta E + k \sum_i g_i \ln [1 + e^{-\beta \varepsilon_i}]$$

Les fermions considérés étant toujours relativistes on conserve $\varepsilon = cp$, le facteur de dégénérescence est ici un facteur de spin, $g_s = 2$ pour des neutrinos, ainsi on conserve

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \varepsilon^2 d\varepsilon$$

les calculs sont alors quasiment identiques à ceux des photons, il vient en passant à la limite continue

$$F = -\frac{1}{3}E$$

puis, en faisant usage de l'intégrale magnifique

$$E = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^3}{e^{\beta \varepsilon} - 1} d\varepsilon = \frac{7}{8} a T^4 V = \epsilon(T) V$$

et pour finir la même équation d'état

$$P = \frac{1}{3}\epsilon$$

qui s'applique donc pour un gaz de particules relativistes sans potentiel chimique.

1.3.3 Cas d'un gaz parfait classique non relativiste

Les calculs sont encore de même nature tout en étant plus simples

Pour une statistique de Maxwell-Boltzmann corrigée (les spécialistes apprécieront, les autres consulteront les bons ouvrages), nous avons

$$W = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

à l'équilibre nous avons la célèbre relation

$$n_i = g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \tag{1.11a}$$

d'où l'on tire

$$E = \int \varepsilon g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon$$

$$S = k\beta E + k \int g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon$$

Pour des particules de masse m non relativistes ne subissant aucune interaction (gaz parfait), on a

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

la mécanique classique ne prévoit pas de facteur de dégénérescence pour ses particules ainsi

$$g(p) dp = \frac{4\pi p^2 V}{h^3} dp \Rightarrow g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

Commençons cette fois-ci par le calcul de l'énergie

$$E = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \varepsilon^{3/2} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{\beta^{5/2} h^3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

sachant que $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3\sqrt{\pi}/4$, on peut toujours écrire

$$E = \frac{3}{2} \frac{V}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2} kT \quad (1.12)$$

Par un petit tour de passe-passe faisons apparaître le nombre N de particules.

Nous avons en effet, $N = \sum_i n_i$ ainsi en utilisant (1.11a), il vient

$$N = \int g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon$$

$$= \frac{2\pi V (2m/\beta)^{3/2}}{h^3} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2}$$

en reportant ce résultat dans (1.12), il ne reste plus que

$$E = \frac{3}{2} N kT$$

fameuse formule de l'équipartition de l'énergie des gaz parfaits³

Pour l'entropie le calcul reste semblable aux gaz parfaits quantiques,

$$S = k\beta E - \int k g(\varepsilon) e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon$$

mais comme cette fois-ci

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\frac{2\varepsilon}{3} g(\varepsilon) \right] = g(\varepsilon)$$

3. Chaque degré de liberté, ici 3, contient $kT/2$...

le calcul donne maintenant

$$S = \frac{5}{3} \frac{E}{T}$$

soit

$$F = \frac{2}{3} E$$

et pour la pression

$$P = \frac{2}{3} \epsilon \tag{1.13}$$

Un calcul plus "rapide" était possible : Sachant que $E = 3NkT/2$ parce qu'on l'a appris à l'école et que $PV = NkT$, pour les mêmes raisons ... On trouve directement la relation (1.13) en posant $E = \epsilon V$, mais il faut connaître beaucoup de choses pour aller si vite !

1.3.4 Cas de la matière incohérente : Poussière

C'est peut-être le cas le plus simple !

Pour ce type de matière on suppose d'emblée que $P = 0$, c'est à dire que l'énergie totale d'un gaz de poussière est indépendante du volume qu'il occupe, cela est bien connu !

1.3.5 Cas du champ scalaire : Le vide !

Il s'agit là de loin du cas le plus complexe et le plus perturbant !

La théorie des champs nous indique que toute forme de matière est décrite par un lagrangien de densité \mathcal{L} . A partir de ce dernier, la relativité générale nous indique comment former le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ associé, dont les propriétés de symétrie décrivent la covariance des équations de la physique. Nous avons vu que, dans le cas le plus simple

$$\frac{1}{2} T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{1.14}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial (g_{\mu\nu, \rho})} \right] \tag{1.15}$$

Nous avons d'ailleurs évoqué certains cas particuliers :

— Champ électromagnétique libre décrit par le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_o} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \longrightarrow T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_o} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

On pourra consulter le cours de théorie des champs pour s'en convaincre ...

— Fluide parfait de pression P , de densité d'énergie ϵ , de quadrivitesse \mathbf{u}

$$\mathcal{L} = 3P - \epsilon \longrightarrow T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \epsilon) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} \tag{1.16}$$

... Voir plus haut ...

Dans le contexte plus général de la physique des particules, l'on apprend que la densité de lagrangien associée à un champ scalaire s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad (1.17)$$

Dans ce même contexte, ce type de champ représente une particule massive ou non mais sans spin. Le tenseur énergie impulsion qui en découle s'écrit simplement

$$T_{\mu\nu} = V(\varphi) g_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Si l'on affecte une quadrivitesse \mathbf{u} à cette particule et si l'on étudie ses propriétés macroscopique en lui attribuant de ne pas auto-interagir (gaz parfait), d'avoir une pression P et une densité d'énergie ϵ , la comparaison des tenseurs (1.16) et (1.18) impose alors l'équation d'état

$$P = -\epsilon$$

troublant n'est-ce pas ...

Pour moins de "troublerie", nous conseillons d'écrire les équations d'Euler-Lagrange associées à la densité (1.17). Puis en étudiant les propriétés du type d'équation obtenu (cf. votre cours de théorie quantique des champs favori), de constater qu'il représente en fait l'état fondamental (à zéro photon) du champ électromagnétique quantifié : Le vide!

1.3.6 Résumé

Dans tous les cas que nous avons traités et qui ne représentent certainement pas une liste exhaustive des cas envisageables, nous avons obtenu une équation d'état de la forme

$$P = (\Gamma - 1) \epsilon \quad (1.19)$$

pour laquelle :

- $\Gamma = 0$ décrit un champ scalaire sans spin, par exemple le vide,
- $\Gamma = 5/3$ représente un gaz parfait classique,
- $\Gamma = 1$ permet de traiter le cas d'un gaz incohérent de poussières,
- $\Gamma = 4/3$ autorise la prise en compte d'un gaz parfait quantique de fermions ou de bosons relativistes,
- $\Gamma = 2$ décrit le cas un peu étrange de la matière dite "raide".

Cette dernière valeur de Γ donne en effet une équation d'état de la forme $P = \rho$, à partir de laquelle il est plus ou moins simple de déduire que la vitesse du son dans un tel milieu est égale à la vitesse ... de la lumière : C'est un milieu complètement figé!

Ainsi donc, malgré son écriture très simple, l'équation d'état (1.19) permet de traiter via une seul paramètre une grande collection d'états et de types de matières différents. Nous la choisirons pour fermer les équations de Friedman, et étudier la dynamique de l'Univers dans de nombreux cas.

1.4 Quelques solutions des équations de Friedmann

Les équations à résoudre sont finalement dans notre contexte

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} R^2 - k \Rightarrow dt = \frac{dR}{\sqrt{\frac{8\pi G\epsilon R^2}{3} - k}} \\ \frac{d(\epsilon R^3)}{dR} = -3PR^2 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

équations auxquelles, il convient de rajouter une équation d'état. Comme nous l'avons largement détaillé, nous choisirons

$$P = (\Gamma - 1) \epsilon$$

1.4.1 Univers plat : $k = 0$

Univers rempli de poussière : $\Gamma = 1$

Les équations de Friedmann (1.20) deviennent

$$\frac{d(\epsilon R^3)}{dR} = 0 \Rightarrow \epsilon R^3 = cste = \epsilon_o R_o^3$$

pour la seconde ainsi, la première s'écrit

$$dt = \alpha \sqrt{R} dR$$

avec

$$\alpha := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi G\epsilon_o R_o^3}} = cste \quad (1.21)$$

soit

$$t = \frac{2}{3} \alpha R^{\frac{3}{2}} + cste$$

Si l'on désire que $R \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, la constante est nulle et

$$R(t) = \left(\frac{3t}{2\alpha} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Univers rempli de lumière : $\Gamma = 4/3$

La deuxième équation de Friedmann s'écrit alors

$$\frac{d(\epsilon R^3)}{dR} = -\epsilon R^2 \Leftrightarrow R^3 \frac{d\epsilon}{dR} = -4\epsilon R^2$$

ainsi

$$\ln(\epsilon) = \ln(R^{-4}) + cste$$

qui donne à présent

$$\epsilon R^4 = cste = \epsilon_o R_o^4$$

en injectant ce résultat dans la première équation de Friedmann, il vient donc

$$dt = \beta R dR$$

avec

$$\beta := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi G \epsilon_o R_o^4}} = cste \quad (1.22)$$

soit

$$t = \frac{1}{2} \beta R^2 + cste$$

Si l'on désire que $R \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, la constante est nulle et

$$R(t) = \left(\frac{2t}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

1.4.2 Univers courbes

Temps conforme

La première équation de Friedmann donne dt en fonction de dR , si l'on introduit le temps conforme η tel que d

$$d\eta = \frac{dt}{R} \quad \text{soit} \quad \frac{d}{d\eta} = \frac{1}{R} \frac{d}{dt}$$

elle devient

$$\left(\frac{1}{R} \frac{dR}{d\eta} \right)^2 = \frac{8\pi G \epsilon R^2}{3} - k$$

c'est-à-dire

$$d\eta = \frac{dR}{R \sqrt{\frac{8\pi G \epsilon R^2}{3} - k}} \quad (1.23)$$

équation que nous utiliserons en lui et place de la première équation de Friedmann.

Courbure positive : $k = 1$

Univers de poussière : $\Gamma = 1$ Le résultat $\epsilon R^3 = cste = \kappa_o$ reste toujours vrai, en temps conforme nous avons donc et en conservant la notation (1.21)

$$d\eta = \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{4\alpha^4} - \left(R - \frac{1}{2\alpha^2} \right)^2}}$$

Si l'on pose

$$R_o = \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{4}{3}\pi G\epsilon R^3 = \frac{2\pi}{3}G\kappa_o$$

il ne reste plus que

$$d\eta = \frac{dR}{\sqrt{R_o^2 - (R - R_o)^2}}$$

qui s'intègre à vue en

$$\eta - \eta_o = -\arccos\left(\frac{R - R_o}{R_o}\right)$$

Soit

$$R = R_o(\cos(\eta - \eta_o) + 1)$$

Lorsque $R \rightarrow 0$, la quantité $(\eta - \eta_o) \rightarrow -\pi$, si l'on veut annuler R et η simultanément, il convient donc de choisir $\eta_o = \pi$, ce qui nous donne

$$R(\eta) = R_o(\cos(\eta - \pi) + 1) = R_o(1 - \cos\eta)$$

Nous avons enfin $dt = R d\eta$, soit tout intégré

$$t - t_o = R_o(\eta - \sin\eta)$$

Le choix $t_o = 0$ assure que R, η et t s'annulent simultanément.

On constate donc que R atteint un maximum $R_{\max} = 2R_o$ lorsque $\eta = \pi$ (i.e. $t = R_o\pi$), puis diminue ensuite pour s'annuler en $\eta = 2\pi$ (i.e. $t = 2R_o\pi$), c'est le Big-Crunch ...!

Univers remplis de lumière $\Gamma = 4/3$ Les calculs sont tout à fait semblables au cas précédent.

Nous avons mainte

nant $\epsilon R^4 = cste = \kappa_1$ en conservant la notation (1.22), il vient

$$d\eta = \frac{dR}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - R^2}}$$

Si l'on pose

$$R_1 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{8}{3}\pi G\epsilon R^4 = \frac{8\pi}{3}G\kappa_1$$

On peut intégrer les équations en temps conforme et obtenir

$$R = R_1 \sin\eta \quad \text{et} \quad t = R_1(1 - \cos\eta)$$

si l'on souhaite que R, η et t s'annulent simultanément. La dynamique de cet univers est semblable au précédent.

Courbure négative : $k = -1$

La situation est tout à fait comparable au cas de la courbure positive, les fonctions trigonométriques devenant hyperboliques dans les diverses intégrations, il vient

Univers de poussière : $\Gamma = 1$

$$R = R_o (\text{ch}(\eta) - 1) \quad \text{et} \quad t = R_o \text{sh}(\eta)$$

Univers de lumière : $\Gamma = 4/3$

$$R = R_1 \text{sh}\eta \quad \text{et} \quad t = R_1 (\text{ch}(\eta) - 1)$$

Ces univers correspondent donc à des expansions illimitées.

Une remarque s'impose alors : pour les temps faibles les solutions obtenues pour un univers plat et un univers courbure courbé coïncident. Vérifions-le par exemple pour $k = 1$ et $\Gamma = 1$, dans cette solution un développement au second ordre non nul donne

$$\begin{aligned} R(\eta) &= R_o \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^2) \right] \right) = \frac{R_o}{2}\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^2) \\ t(\eta) &= R_o \left(\eta - \left[-\eta + \frac{1}{6}\eta^3 + \mathcal{O}(\eta^3) \right] \right) = \frac{R_o}{6}\eta^3 + \mathcal{O}(\eta^3) \end{aligned}$$

ce qui donne à cet ordre

$$R \propto t^{\frac{2}{3}}$$

qui est bien le résultat obtenu sans courbure et avec de la poussière ...

l'autre cas de poussière et les cas de lumineux sont tout à fait semblable !

On peut donc affirmer que lorsque $t \rightarrow 0$, la courbure est négligeable et le comportement de $R(t)$ est donné par la solution obtenue pour $k = 0$. L'étude de l'Univers de Friedmann primordial peut donc se faire dans ce cadre.

1.4.3 Univers de Friedmann avec constante cosmologique

Si l'on prend en compte le terme de constante cosmologique dans les équations d'Einstein, la conservation de l'énergie impulsion (deuxième équation de Friedmann) reste inchangée, mais la première équation devient

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G R^2}{3} (\epsilon + \Lambda) - k$$

Etudions l'importance de cette constante cosmologique pour l'Univers primordial.

Si l'univers contient de la poussière, l'équation de conservation de l'énergie impulsion assurera toujours que $\epsilon R^3 = \text{cste}$, si $R \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, on imagine alors sans peine que $\epsilon \rightarrow +\infty$ à l'approche de la singularité. Il semble donc tout à fait légitime de négliger la constante cosmologique devant ϵ dans ce domaine.

Si l'Univers contient de la lumière, le raisonnement est identique mais avec $\epsilon R^4 = \text{cste}$ ce qui ne change en rien le résultat.

Pour l'univers primordial dominé par la matière ou la lumière on peut donc fort bien négliger la constante cosmologique et comme nous l'avons vu précédemment la courbure.

Un cas pose cependant un petit problème (mais en est-ce bien un ?)

Nous avons lors de notre énumération des diverses équations d'état envisagé, le cas du vide (ni matière, ni lumière : seul un champ scalaire !) dont l'équation d'état peut s'écrire $P = -\epsilon$, i.e. $\Gamma = 0$.

L'équation de conservation de l'énergie impulsion s'écrit dans ce cas

$$R^3 \frac{d\epsilon}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_v = cste$$

Si $k = 0$, ce qui d'après nos conclusions semble adapté à l'Univers primordial, la première équation de Friedmann donne alors en présence de vide

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} (\epsilon + \Lambda) = \chi^2 = cste$$

Cette équation est intégrable par le premier bambin venu qui trouve

$$R \propto e^{t/\chi}$$

Que vaut la constante χ ?

C'est une excellente question. Elle contient la densité d'énergie du vide qui doit être très faible. La constante cosmologique Λ qui ne peut pas valoir grand chose pour des raisons observationnelles (si sa valeur était trop grande elle dominerait depuis longtemps dans la première équation de Friedmann et on aurait observé ses effets qui seraient dominants), χ contient aussi la constante de gravitation en facteur ...

Toutes ces "bonnes" raisons additionnées de motivations quantiques plus raisonnables nous laissent penser que pour $t \approx 10^{-35} s$ on peut avoir $\chi \approx 10^{-37} s$ et même moins selon les modèles ...

A cette époque reculée de l'histoire de l'Univers, si la densité d'énergie est dominée par celle du vide (ce qui est justement prévu pendant de brèves époques vers ces instants ...), une phase d'inflation peut apparaître pendant laquelle le facteur d'échelle peut s'accroître d'un facteur d'un facteur e^{100} pendant environ $10^{-35} s$...

Bien que semblant très paradoxale, cette phase inflationnaire possède de nombreuses vertus curatives pour les modèles d'Univers de Friedmann. Les problèmes de platitude, d'homogénéité du fond diffus cosmologique sur des échelles non causales, ou bien encore d'absence d'observation de rotation ou défauts topologiques sont en effet tout naturellement solutionnés par une (ou des) phase(s) d'inflation démesurée dans l'univers primordial. Mais ceci est une autre histoire qui va bien au delà d'un modeste cours de gravitation.