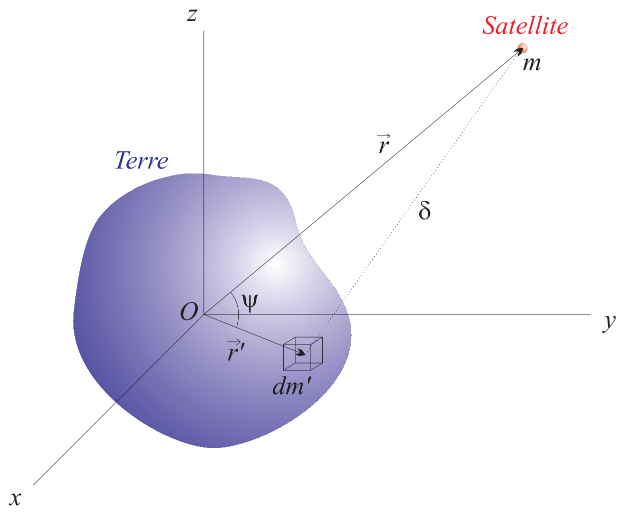
Orbite d'un satellite artificiel dans le champ de gravitation de la Terre



1. Montrer que le potentiel de gravitation de la Terre dans lequel évolue le satellite de masse m est

$$U(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\vec{r}) \qquad \text{avec} \quad U_n(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r}\left\{\frac{1}{r^n}\int_{r'\in V} r'^n P_n(\cos\psi)\, dm'\right\}$$

où les fonctions $P_n(z)$ sont appelées polynômes de Legendre définis par

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2-1\right)^n$$

on vérifiera sur les premiers termes que

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)$$

2. Montrer que

$$U_0 = -\frac{Gmm_\oplus}{r}$$

et que si l'on choisi le centre de gravité de la terre comme origine O alors $U_1 = 0$.

3. On pose $x_\mu(\mu = 1,2,3) = x, y, z$ et $x'_\mu(\mu = 1,2,3) = x', y', z'$, et l'on introduit les moments $I_{\mu\mu}$ et produits $I_{\mu\nu}(\mu \neq \nu)$ d'inertie de la Terre par rapport aux axes $Oxyz$

$$I_{\mu\mu} = \int_V \left(r'^2 - x'^2_\mu\right) dm' \qquad \text{et} \qquad I_{\mu\nu} = \int_V x'_\mu x'_\nu\, dm'$$

Montrer que

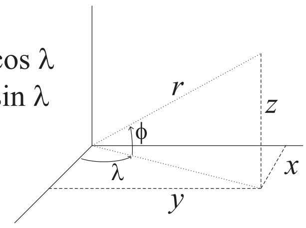
$$U_2(\vec{r}) = -\frac{Gm}{r^3}\left\{-\frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{3} I_{\mu\mu} + \frac{3}{2r^2}\sum_{\mu=1}^{3}\left[x_\mu^2\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{3} I_{\nu\nu} - I_{\mu\mu}\right) + \sum_{\nu\neq\mu}^{3} x_\mu x_\nu I_{\mu\nu}\right]\right\}$$

(a) On impose maintenant aux axes Ox, Oy et Oz de notre référentiel d'être confondus avec les axes principaux d'inertie de la Terre (supposés fixes), en pratique et en première approximation on confond donc Oxy avec le plan équatorial terrestre et Oz avec l'axe polaire. Montrer que

$$U_2(\overrightarrow{r}) = -\frac{Gm}{r^3}\left\{\left(\frac{2I_{33} - I_{11} - I_{22}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sin^2\phi}{2}\right) - \frac{3(I_{11} - I_{22})\cos^2\phi\cos 2\lambda}{4}\right\}$$

où apparaissent les coordonnées polaires en dimension 3

$$x = r\cos\phi\cos\lambda$$
$$y = r\cos\phi\sin\lambda$$
$$z = r\sin\phi$$



(b) Si finalement on admet que la Terre présente une symétrie de révolution autour de son axe polaire (i.e. $I_{11} = I_{22}$) montrer que

$$U_2(r,\phi) = \frac{Gmm_\oplus}{r}\left(\frac{r_e}{r}\right)^2 J_2 P_2(\sin\phi)$$

ou J_2 une constante que l'on déterminera.

4. En faisant l'hypothèse que la relation obtenue dans le cas $n = 2$ se généralise, écrire dans ce contexte la fonction perturbatrice du système.

5. On ne considère à présent que le premier terme $(n = 2)$dans la fonction perturbatrice.

(a) On montre que $\sin\phi = \sin i \sin(\omega + f)$ où i, f et ω sont les éléments osculateurs elliptiques du mouvement du satellite. On peut toujours décomposer le fonction perturbatice R en une partie oscillante $\widetilde{R}$ et une partie séculaire $\overline{R}$ telles que

$$\widetilde{R} = R - \overline{R} \qquad \text{avec} \qquad \overline{R} = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Rdt = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} Rdt$$

calculer $\overline{R}$ en fonction des éléments osculateurs elliptiques.

(b) En déduire que l'excentricite, le demi grand axe et l'inclinaison de l'orbite ne varient pas séculairement, et donner les caractéristiques orbitales d'un satellite de masse $m = 1000Kg$, sur une orbite inclinée de $i = 45°$ par rapport à l'équateur, d'excentricité $e = 0.01$ et de demi-grand axe $a = 2,5\ r_\oplus$. On donne $J_2 = 0.0010826$.