Mouvement d'une étoile dans un potentiel pseudo-képlérien

On considère le mouvement d'une étoile dans le potentiel de champ moyen d'une galaxie de la forme

$$\psi = -GM\left(u + au^2\right) \tag{1}$$

avec $u = 1/r$ inverse de la distance de l'étoile au centre galactique, et a un paramètre réel strictement négatif.

1. Indiquer pourquoi le mouvement de l'étoile s'effectue dans un plan.

2. Quelles sont les grandeurs conservées lors du mouvement ?

3. Calculer la densité associée au potentiel (1), en déduire que a est nécéssairement négatif. Interpréter $|a|$ sachant que la masse de la galaxie est M.

4. Montrer que l'équation polaire du mouvement s'écrit

$$u = \alpha \cos\left[K\left(\varphi - \varphi_o\right)\right] + \frac{GM}{K^2L^2}$$

avec

$$\alpha \in \mathbb{R}^+,\ K = \sqrt{1 - \frac{2GMa}{L^2}},\ \varphi_o = \varphi\left(t = 0\right)$$

5. Montrer que si

$$\left.\frac{du}{d\varphi}\right|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

alors l'énergie totale de l'étoile par unité de masse est donnée par la relation

$$E = \frac{1}{2}K^2L^2\alpha^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{GM}{KL}\right)^2$$

en déduire que l'orbite d'une l'étoile de vitesse angulaire initiale nulle est bornée si l'on a

$$u\left(t = 0\right) < \frac{2GM}{K^2L^2} \tag{3}$$

6. Indiquer dans les conditions (3) et (2) les caractéristiques de l'orbite d'une étoile dans cette galaxie.