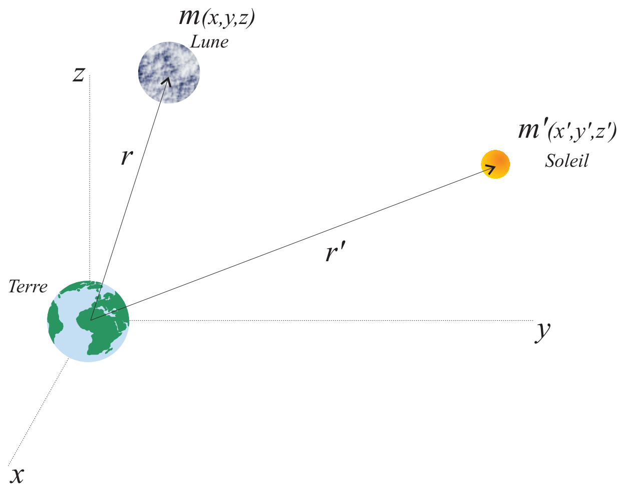
Théorie simplifiée de la Lune



1. Montrer qu'en considérant la perturbation due au Soleil, l'équation du mouvement de la Lune autour de la Terre s'écrit

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \mathrm{grad}_{\vec{r}}\,(R)$$

avec

$$R = Gm_\odot\left(\frac{1}{\left|\vec{r'} - \vec{r}\right|} - \frac{\vec{r'}.\vec{r}}{\left|\vec{r'}\right|^3}\right) \qquad \text{et} \qquad \mu = G\left(m_\oplus + m_L\right) \approx Gm_\oplus$$

2. Montrer que

$$R = \frac{Gm_\odot}{r'}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r'}\right)^2\left(3\cos^2\psi - 1\right) + O\left(\left(\frac{r}{r'}\right)^3\right)\right\}$$

3. Sachant que l'excentricité de l'orbite lunaire e et l'inclinaison de son plan orbital i sont petites ($e = 0.054$ et $i = 5°9' = 0.09$rad), à l'ordre le plus bas on trouve

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left\{\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\right\}^2 \approx 1 + \frac{3}{2}e^2 \qquad \text{et} \qquad \left(3\cos^2\psi - 1\right) \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

En déduire que

$$R \approx k\left(n', a', r'\right) + \frac{n'^2a^2}{4}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2}i^2\right)$$

où l'on a introduit le moyen mouvement solaire n'.

4. On pose $n_\Omega = d\Omega/dt$ (moyen mouvement du noeud ascendant lunaire), $n_\omega = d\omega/dt$ (moyen mouvement du périgée lunaire) et $n_{\tilde{\omega}} = n_\omega + n_\Omega$ (moyen mouvement sidéral). Montrer que $n_\Omega \approx -n_\omega/2$.

5. Calculer les valeurs de

$$T_\Omega = \frac{360°}{n_\Omega} \qquad \text{et} \qquad T_{\tilde{\omega}} = \frac{360°}{n_{\tilde{\omega}}}$$

les périodes respectives de rétrogradation de la ligne des noeuds lunaires sur l'écliptique et de révolution sidérale du périgée. Les observations fournissent $T_\Omega = 18.60$ ans et $T_{\tilde{\omega}} = 8.85$ ans.

A.N.	$T_L = 27$j 7h 43min $11,5$s	$T_\odot = 365$j 6h 9min $34,7$s	
	$m_L = 7,3.10^{22} Kg$	$m_\odot = 1,2.10^{30} Kg$	$m_\oplus = 6.10^{24} Kg$
	$e = 1/18,21$	$i = 5°8\,\text{min}\,43$s	