Examen de Gravitation Classique

Durée : 3H00

Les notes de cours et les livres du cours sont autorisés

Le théorème de Bertrand

Joseph Louis François Bertrand, né le 11 mars 1822 à Paris et mort le 3 avril 1900 toujours à Paris, est un mathématicien, économiste et historien des sciences français. En mathématiques, son nom est attaché à celui de séries dont il étudia la convergence. En physique théorique et plus particulièrement en théorie du potentiel, son travail est concentré sur l'étude du mouvement d'une particule soumise à une force centrale, il s'agit du cas typique de la force de gravitation de champ moyen exercée sur une étoile dans un système à symétrie sphérique comme par exemple un amas globulaire.

Figure 1: Joseph Bertrand

On démontre assez facilement que dans cette situation l'étoile de masse m est en mouvement dans un plan déterminé par le moment cinétique $\vec{L}$ de la particule. Si son énergie mécanique E est négative la distance radiale r au centre du système est comprise entre deux valeurs positives r_p et r_a telles que $r_p \leq r_a$, et la fonction $r(t)$ est périodique. La période de $r(t)$ est appelée période radiale, elle est notée $T = \pi\tau$ avec

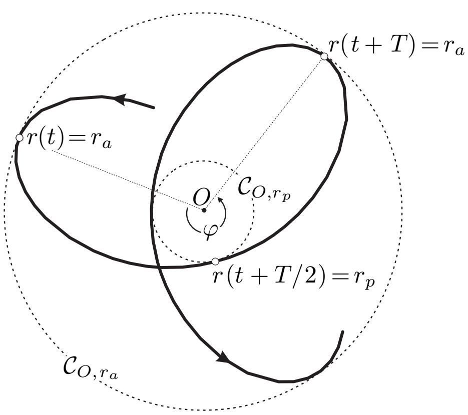

Figure 2: Un morceau d'orbite

$$\tau = \frac{2}{\pi} \times \int_{r_p}^{r_a} dt$$

il s'agit d'une fonction des deux variables $\xi = \frac{1}{m}E$ et $\Lambda = \frac{1}{m}\left\|\vec{L}\right\|$. Dans le plan orbital, la variation de l'angle polaire θ pendant la durée τ, notée $\varphi = \pi\Phi$ avec

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \times \int_{r_p}^{r_a} d\theta$$

est également une caractéristique constante pour une orbite donnée, tout comme τ, le paramètre Φ est aussi une fonction de ξ et Λ. Pour un potentiel donné, la prise en compte de toutes les conditions initiales telles que $\Lambda \in I_\Lambda = [0, \Lambda_{\max}]$ et $\xi \in I_\xi = [\xi_{\min}, 0[$ conduit pour chaque orbite correspondante à un ensemble de valeurs pour $\tau(\Lambda, \xi)$ et $\Phi(\Lambda, \xi)$. Lorsque l'ensemble des valeurs possibles pour $\Phi(\Lambda, \xi)$ est uniquement composé de nombres rationnels on conçoit que l'orbite se referme en temps fini. Dans une communication devant l'académie des sciences de Paris lue le 20 octobre 1873 par son auteur, Joseph Bertrand démontre qu'il n'existe que deux familles de potentiels ayant la propriété de conférer une orbite fermée à tous les points massifs qui leurs sont soumises.

Cette démonstration bien que correcte est peu claire, au tournant des années 1970 elle fut précisée par certains compléments de Vladimir Arnold dans son merveilleux livre sur les équations différentielles. Nous proposons dans ce sujet d'en donner un éclairage original centré sur un travail essentiel de Michel Hénon de 1959, l'amas isochrone.

Un formulaire est gracieusement fourni par les organisateurs en fin d'énoncé.

Dans tout l'examen on supposera que le potentiel de gravitation ψ est une fonction radiale et croissante.

A Généralités

1. On considère une particule de masse m repérée par le vecteur $\vec{r}$ et soumise à une force radiale $\vec{F} = -\operatorname{grad}_{\vec{r}}(U)$ avec $U = m\psi(r)$ et $r = \|\vec{r}\|$, montrer que le moment cinétique $\vec{L} = m\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ est conservé en déduire que le mouvement s'effectue dans un plan $\mathcal{P}$.

2. Dans $\mathcal{P}$, on repère le vecteur position $\vec{r}$ par ses coordonées polaires (r, θ). Montrer que $\Lambda = \frac{\|\vec{L}\|}{m} = r^2\dot{\theta} = cste$. On note $\xi = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \psi$ l'énergie massique de la particule. Exprimer ξ en fonction de r, $\dot{r}$, Λ et ψ.

3. Pour un potentiel donné on définit l'action radiale de la particule par la relation
$$J_r(\xi, \Lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{r_p}^{r_a} dr\sqrt{f(\xi, \Lambda, r)} \quad \text{avec } f(\xi, \Lambda, r) = 2(\xi - \psi) - \frac{\Lambda^2}{r^2}.$$
Montrer que $f(\xi, \Lambda, r_a) = f(\xi, \Lambda, r_p) = 0$. En utilisant la relation (1) du formulaire, en déduire que
$$\tau = \frac{\partial J_r}{\partial \xi} \text{ et } \Phi = -\frac{\partial J_r}{\partial \Lambda}$$

B Potentiel képlerien

Dans le cas képlerien, le potentiel s'écrit $\psi(r) = -\frac{\mu}{r}$. On suppose $\xi < 0$, on admettra qu'alors le mouvement est une ellipse de paramètre focal $p = \frac{\Lambda^2}{\mu}$, de demi-grand axe a et d'excentricité $e = \sqrt{1 + \frac{2\Lambda^2\xi}{\mu^2}}$

4. . Montrer que $\xi = -\frac{\mu}{2a}$ puis déterminer, en fonction de a et e, l'expression des racines r_p et $r_a \geq r_p$ de l'équation $\dot{r}^2 = 0$ de deux manières différentes. Comment s'appellent ces racines ? En déduire l'expression de r_p et r_a en fonction de μ, ξ et Λ.

Conseil important pour toute la suite de l'examen : On ne cherchera plus à calculer explicitement r_p et r_a, seuls leur somme et leur produit seront déterminés et utilisés.

5. Déterminer l'expression de $J_r(\xi, \Lambda)$ en fonction de ξ, Λ et μ dans le cas keplerien. On pourra utiliser le résultat $\mathcal{I}_2$ du formulaire.

6. Calculer τ et Φ pour le potentiel keplerien. Rapprocher ces résultats de propriétés connues du problème des deux corps.

C Potentiel homogène

Une boule de masse M de rayon R et dont la densité volumique de masse ρ_0 est constante, est caractérisée par le potentiel homogène

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \psi_0 & \text{si } r < R \\ -\frac{GM}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

7. Exprimer ω^2 et ψ_0 en fonction de G, M et R.

8. Montrer que la période radiale τ est la même pour toutes les orbites situées dans une boule homogène.

9. Calculer Φ pour une orbite d'une particule confinée dans une boule homogène. On pourra utiliser le résultat $\mathcal{I}_1$ du formulaire. Que peut-on déduire du résultat obtenu pour Φ ?

D Potentiel isochrone

Le potentiel isochrone $\psi(r)$ est définit par la relation

$$s \equiv -\frac{GM}{b\psi(r)} = 1 + \sqrt{\frac{r^2}{b^2} + 1}$$

Il a été défini et déterminé par Michel Hénon en 1959 pour être le potentiel le plus général pour lequel la période radiale ne dépend que de ξ et pas de Λ.

10. Déterminer la nature physique du paramètre M (*on attend une démonstration et pas des affirmations*).

11. On considère une particule telle que $\xi < 0$ évoluant dans un potentiel isochrone. Déterminer l'expression de son action radiale J_r. On pourra utiliser le résultat $\mathcal{I}_3$ du formulaire. Que remarquez vous?

12. En déduire τ et Φ pour cette particule dans un amas isochrone. Conclure.

13. En prenant en compte le résultat obtenu pour τ, proposez une généralisation de la 3^{e} loi de Kepler.

E Le Théorème de Bertrand

On cherche tous les potentiels $\psi(r)$ tels que Φ possède une valeur fractionnaire (dans $\mathbb{Q}$) pour toutes les orbites et donc pour toutes les valeurs de $\Lambda \in I_\Lambda = [0, \Lambda_{\max}]$ et $\xi \in I_\xi = [\xi_{\min}, 0[$ possibles. Toutes ces orbites seront alors fermées. La fonction Φ est une fonction des deux variables réelles que sont Λ et ξ. Pour les potentiels cherchés on a donc $\Phi : I_\xi \times I_\Lambda \to \mathbb{Q}$.

14. En admettant que la fonction $\Phi(\xi, \Lambda)$ est continue, montrer qu'elle est forcément constante si $\psi(r)$ est un potentiel vérifiant les conditions de Bertrand. On pourra raisonner par l'absurde.

15. En admettant que l'on peut appliquer le théorème de Schwarz, montrer que si $\psi(r)$ est un potentiel vérifiant les conditions de Bertrand, il est forcément isochrone.

16. En déduire qu'un potentiel vérifiant les conditions de Bertand est soit keplerien soit homogène.

Formulaire

- On rappelle que si $f\left(x,y\right)=\displaystyle\int_{a(x,y)}^{b(x,y)}g\left(x,y,t\right)dt$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=\int_{a(x,y)}^{b(x,y)}\frac{\partial g}{\partial x}\left(x,y,t\right)dt+\frac{\partial b}{\partial x}g\left(x,y,b\left(x,y\right)\right)-\frac{\partial a}{\partial x}g\left(x,y,a\left(x,y\right)\right)\tag{1}$$

- Afin d'éviter certains calculs et compte tenu du fait que le jeu d'intégrales n'est plus à la mode, on rappelle que pour tout $0<\alpha<\beta$

$$\mathcal{I}_1=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{du}{\sqrt{\left(u-\alpha\right)\left(\beta-u\right)}}=\pi\qquad,\quad \mathcal{I}_2=\int_{a}^{b}du\frac{\sqrt{\left(u-a\right)\left(b-u\right)}}{u}=\frac{\pi}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)$$

et pour tout $2<\alpha<\beta$

$$\mathcal{I}_3=\int_{\alpha}^{\beta}du\frac{u-1}{u\left(u-2\right)}\sqrt{\left(u-\alpha\right)\left(\beta-u\right)}=\frac{\pi}{2}\left[\alpha+\beta-\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{4+\alpha\beta-2\left(\alpha+\beta\right)}-2\right]$$