Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2013

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Le gravidyne
ou
natation gravitationnelle

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

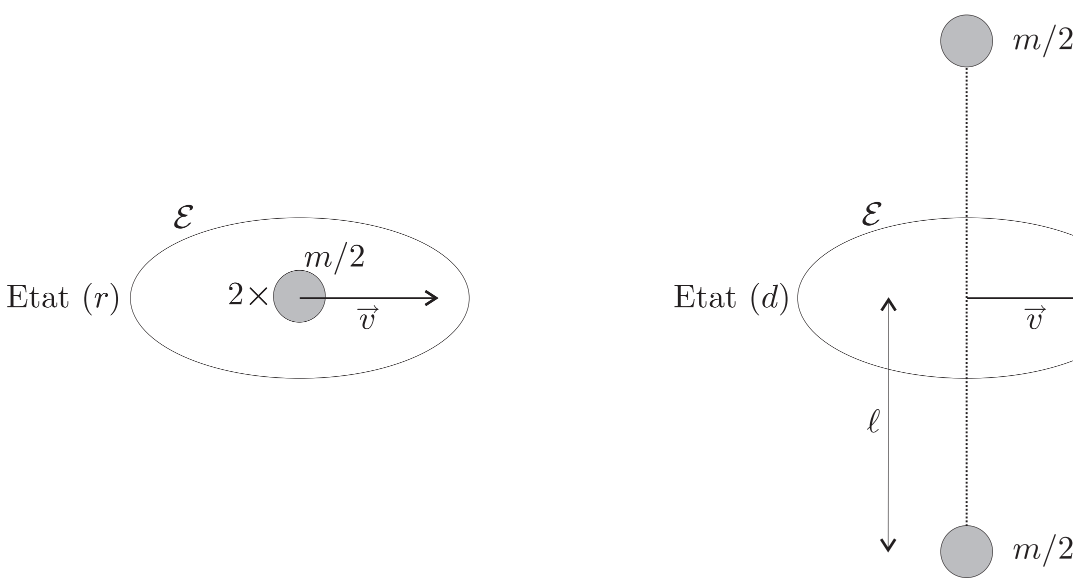
Le gravidyne est un vaisseau spatial gravitationnel extraordinaire fruit en 1964, de l'imagination du non moins extraordinaire **Vladimir V. Beletski.** À l'occasion du premier anniversaire de sa disparition nous avons tenu à lui rendre hommage à travers ce modeste sujet...

Le gravidyne est un vaisseau spatial $\mathcal{E}$ pouvant déployer symétriquement à la distance ℓ et le long d'un axe orthogonal à sa vitesse instantanée, deux boules de masses $m/2$. Ces boules sont maintenues grâce à des cables dont la masse est négligée. La masse du vaisseau est négligeable devant m. Le déploiement ou le repliement des boules même s'il coute une énergie au vaisseau se fait en un temps que l'on négligera dans ce problème. Comme nous allons le voir et l'étudier, la propulsion du gravidyne est assurée par le seul déploiement ou repliement des boules.

Pour simplifier l'étude on considère que le vaisseau ne peut se trouver que dans l'un des deux états suivants :

— dans l'état replié (r) les deux masses n'en font qu'une et le vaisseau $\mathcal{E}$ est assimilé à un point de masse m ;

— dans l'état déployé (d) les deux masses forment une haltère dont le centre est occupé par le vaisseau. L'axe de cette haltère reste en permanence orthogonal au vecteur vitesse de $\mathcal{E}$.



On satellise le gravidyne dans l'état (r) sur une orbite dans le champ de gravitation d'un astre représenté par un point de masse M très supérieure à m. On se place dans le référentiel centré sur M, à l'instant initial le vaisseau possède une vitesse $\vec{v}$ une énergie mécanique totale $E_0 = mh_0 < 0$ et se trouve à une distance r de la masse M. On posera $\mu = GM$. Les deux boules sont supposées ponctuelles.

1. Dans quelles conditions le référentiel d'étude est-il galiléen ?
2. Montrer que le mouvement de E s'effectue dans un plan Π que l'on précisera.
3. Montrer que dans Π le mouvement de E dans l'état (r) est une ellipse dont on précisera le paramètre focal p, l'excentricité e. Montrer que $r \in [r_0, R_0]$, on exprimera les bornes de cet intervalle en fonction de p et e. Comment s'appellent les points P et A de la trajectoire correspondants aux distances r_0 et R_0.

4. La position de E est repérée dans Π par sa distance r à M et par l'angle $f = \widehat{PM\mathcal{E}}$. Démontrer que le module v de la vitesse de E sur son orbite est donné par la relation

$$v^2 = \frac{\mu}{p}\left[1 + e^2 + 2e\cos f\right]$$

En déduire une expression de h_0 en fonction de μ, p et e puis celle donnant h_0 en fonction de μ et de la somme $a = r_0 + R_0$.

5. Montrer que dans l'état (d) le gravidyne possède une énergie potentielle

$$E_p(r) = -\frac{\mu m}{r\sqrt{1+\alpha^2}}$$

où l'on exprimera α en fonction de ℓ et r.

6. Le système est initialement dans l'état (r) arrivé en r_0 le vaisseau déploie ses masses et passe dans l'état (d). Ce déploiement est supposé infiniment bref et ne modifie pas la vitesse instantanée du vaisseau. Montrer que l'énergie massique du vaisseau passe alors de la valeur h_0 à la valeur $h_1 = h_0 + \Delta h_1$. En utilisant un développement limité adéquat, on exprimera Δh_1 en fonction de μ, ℓ et r_0.

7. La variation d'énergie étant petite on suppose que les éléments de l'orbite dans l'état (d) deviennent des éléments osculateurs des éléments de l'orbite dans l'état (r), notament la relation entre h, $r_{\min}$ et $r_{\max}$ reste valable entre les élements osculateurs. Déterminer l'expression de la nouvelle distance maximale R_1 atteinte dans l'état (d). Toujours grace à un développement limité adéquat, on exprimera R_1 en fonction de R_0, r_0 et ℓ.

8. Une fois arrivé en R_1 le vaisseau replie ses masses et repasse dans l'état (r), ce repliement s'effectue avec les mêmes caractéristiques que le deploiement. Déterminer la valeur de la nouvelle distance minimale r_1 qu'il est alors capable d'atteindre dans cet état.

9. Résumer le cycle déploiement-repliement sur un diagramme représentant les potentiels effectifs dans les états (r) et (d) en précisant les différents apoastres et périastres. Expliquer comment le gravidyne peut s'extraire du champ de gravitation de l'objet de masse M.

10. Estimer le temps necéssaire pour l'extraction du gravidyne depuis une orbite circulaire de rayon r_c. On calculera la variation d'énergie globale sur le premier cycle à partir de laquelle on concluera.

11. Dans quel(s) cas un gravidyne équipé de boules déployables à 100 km est-il efficace ? On pourra procéder à quelques applications numériques avec la terre ($r_\oplus = 6,5\cdot 10^6$ m et $m_\oplus = 6\cdot 10^{24}$ kg), le soleil ($r_\odot = 7\cdot 10^8$ m et $m_\oplus = 2\cdot 10^{30}$ kg) ou même Sirius B ($r_{s_B} = 1\cdot 10^7$ m et $m_{s_B} = 2\cdot 10^{30}$ kg) et on rappelle que $G = 6,7\cdot 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}.