Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2011

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Le trou noir des sphères isothermes

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Un amas globulaire est un système d'étoiles dont la configuration, souvent sphérique, est bien représentée par une sphère isotherme de densité volumique de masse centrale finie ρ_0. La fonction de distribution d'équilibre d'un tel système s'écrit

$$f(E) = \left(\frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta}\right)^{-3/2} e^{-\beta E}$$

où $E = p^2/2m + m\psi(\vec{r})$ est l'énergie d'une particule test de masse m d'impulsion $\vec{p}$ à la position $\vec{r}$, $\psi(\vec{r})$ est le potentiel gravitationnel du système en $\vec{r}$. Les deux paramètres α et β ont les dimensions respectives d'une longueur et d'une énergie, ils caractérisent le système. Un certain nombre d'intégrales sont fournies en fin d'énoncé. Si r est la coordonnée radiale et t le temps, on utilisera la notation f' pour désigner df/dr et $\dot{f}$ pour désigner df/dt.

1. La sphère isotherme

   (a) Calculer la densité volumique de masse ρ en chaque point du système. En déduire que le système est bien sphérique. Déterminer ρ_0 en fonction de m, α, β et de la valeur ψ_0 du potentiel gravitationnel en $\vec{r} = \vec{0}$.

   (b) Pourquoi un tel système est-il qualifié d'isotherme ? On rappelle que la valeur moyenne dans l'espace des impulsions $\langle\varphi\rangle_{\vec{p}}(\vec{r})$ d'une grandeur $\varphi(\vec{p}, \vec{r})$ est ici donnée par la relation

   $$\langle\varphi\rangle_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{\int \varphi(\vec{p}, \vec{r}) f(E)\, d\vec{p}}{\int f(E)\, d\vec{p}}$$

   (c) Montrer que si l'on néglige l'influence des collisions, le mouvement d'une particule test dans une sphère isotherme s'effectue dans un plan. Ce résultat est-il spécifique aux sphères isothermes ?

   (d) Montrer que le potentiel gravitationnel régnant dans la région centrale d'une sphère homogène s'écrit sous la forme harmonique suivante

   $$\psi_h(r) = \psi_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + o\left(r^2\right)$$

   On pourra effectuer un développement limité à l'ordre 2 du potentiel gravitationnel, et l'on exprimera ω^2 en fonction de G et ρ_0.

2. Près du centre...

   On considère le mouvement d'une étoile *confinée* dans la région centrale d'un amas globulaire. On considère donc que le potentiel gravitationnel auquel elle est soumise est celui de la question précédente.

   (a) Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes de l'étoile dans le plan orbital. En écrivant et en résolvant les équations de Lagrange du mouvement en coordonnées cartésiennes dans le plan orbital, montrer que

   $$x(t) = u\cos(\omega t + \varphi_x) \qquad \text{et} \quad y(t) = v\cos(\omega t + \varphi_y)$$

   où le vecteur $\vec{C} = [u, v, \varphi_x, \varphi_y]^\intercal$ est constant et fixé par les conditions initiales. Quelle est la nature du mouvement ?

On souhaite à présent étudier l'influence sur cette orbite de la présence d'un hypothétique trou noir de masse $M_\bullet$ situé en $\vec{r} = \vec{0}$. De manière formelle, on écrira la densité de cet objet

$$\rho_\bullet(r) = M_\bullet\ \delta(\vec{r})$$

où $\delta(r)$ est la distribution de Dirac centrée sur 0.

(b) Montrer que le potentiel gravitationnel créé par le trou noir s'écrit

$$\psi_\bullet(x,y) = -\frac{GM_\bullet}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Nous allons à présent appliquer la théorie de la variation des constantes de Lagrange au problème du mouvement de l'étoile confinée dans la région centrale d'un amas globulaire perturbé par un hypothétique trou noir de $M_\bullet$.

(c) Montrer que les équations du mouvement du problème perturbé s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2ex] \ddot{y} = -\omega^2 y + \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

où $R(x,y)$ est une fonction perturbatrice dépendant des paramètres G et $M_\bullet$. Sous quelles hypothèses $R(x,y)$ est-elle une perturbation du terme principal harmonique ?

On fait l'hypothèse que la perturbation introduite par le trou noir va faire varier les constantes du problème non perturbé en des termes osculateurs : la solution du système non perturbé

$$\begin{cases} x(t) = x\left(\vec{C}, t\right) \\ y(t) = y\left(\vec{C}, t\right) \end{cases}, \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = c\vec{st}e$$

devient avec la perturbation

$$\begin{cases} x(t) = x\left(\vec{C}(t), t\right) \\ y(t) = y\left(\vec{C(t)}, t\right) \end{cases}, \quad \vec{C}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ \varphi_x(t) \\ \varphi_y(t) \end{bmatrix}$$

On se place en jauge de Lagrange, c'est-à-dire que l'on impose

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial x}{\partial C_i}\ \dot{C}_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial y}{\partial C_i}\ \dot{C}_i = 0$$

(d) En appliquant la théorie planétaire de Lagrange, montrer que les équations du mouvement perturbé s'écrivent sous la forme

$$A\frac{d\vec{C}}{dt} = \nabla_{\vec{C}}\ (R) \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{bmatrix}$$

où K est une matrice carrée d'ordre 2 diagonale ne dépendant que de ω, u et v.

(e) On se place dans le cas de la perturbation d'une orbite circulaire pour laquelle on suppose que l'on peut écrire à chaque instant

$$u(t) = v(t) \quad , \quad \varphi_x(t) = 0 \ \text{ et } \varphi_y(t) = \frac{\pi}{2}$$

Déterminer puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

(f) Comment peut-on détecter la présence d'un trou noir au centre d'un amas globulaire ?

À toutes fins utiles on rappelle que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \qquad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$