

Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2006

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Gravitation newtonienne
matière noire
gravitation modifiée

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

A - Gravitation newtonienne

On considère un système à répartition sphérique de masse, la densité de masse de ce système est donc telle que $\rho = \rho(|\mathbf{r}|)$ où \mathbf{r} est le vecteur position d'une particule test. On appelle $\psi(\mathbf{r})$ le potentiel gravitationnel associé à cette densité.

1. Montrer que le mouvement d'une particule test de masse m dans un tel système est plan.
2. On appelle vitesse circulaire \mathbf{v}_c , la vitesse qu'aurait une particule test en orbite circulaire de rayon r . Montrer que

$$\mathbf{v}_c^2 = r |\text{grad } \psi|$$

3. Les observations de la Voie Lactée montrent un bulbe, un disque et des amas globulaires pour la plupart en orbite dans un halo stellaire. Les caractéristiques physiques de ces composants

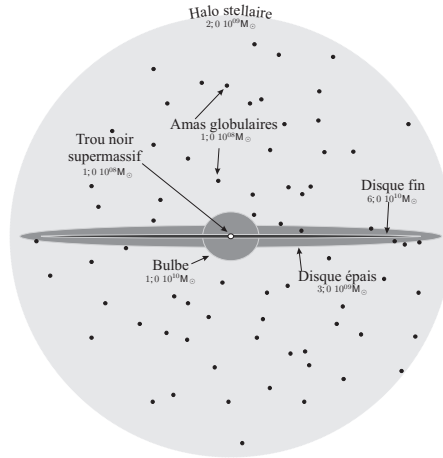


FIGURE 1 – Représentation schématique de la Voie Lactée

sont estimées par diverses méthodes. Selon diverses analyses on recense :

	Masse (M_\odot)	Taille caractéristique (kpc)	Epaisseur (kpc)
Bulbe	10^{10}	2	-
Disque fin	6×10^{10}	30	3×10^{-1}
Disque épais	3×10^9	30	1.4
Trou noir central	3×10^6	3×10^{-8}	-
1 amas globulaire	5×10^7	10^{-3}	-
Halo stellaire	2×10^9	30	-

La répartition des vitesses circulaires présente la même allure dans toutes les galaxies spirales. Pour notre galaxie, elle est donnée par la figure ci-dessous. La plus grande partie du gaz et des étoiles de notre galaxie est contenue dans le disque fin. Une première approximation a priori raisonnable consiste à supposer que chaque étoile de ce disque fin est en orbite képlérienne autour du bulbe galactique.

Pourquoi cette hypothèse est-elle incompatible avec la courbe de rotation ci-dessus ?

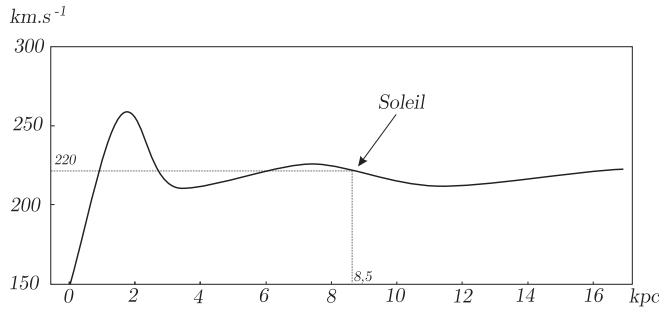


FIGURE 2 – Distribution des vitesses dans la galaxie

4. Montrer que l'introduction d'un halo sphérique de matière invisible (noire) de densité

$$\rho(r) = \frac{C_o}{r_o^2 + r^2}$$

permet de rendre compte de la courbe de vitesse observée. On fixera la valeur de C_o pour une bonne adéquation avec la valeur de la vitesse observée et on interprétera la constante r_o .

5. Estimer la masse minimale de ce halo de matière noire. Qu'en pensez-vous ?

B - Gravitation modifiée

Depuis 1983, M. Milgrom propose de modifier l'interaction gravitationnelle dans le régime des faibles accélérations pour, entre autres, rendre compte de la courbe observée des vitesses circulaires dans les galaxies spirales.

1. Montrer qu'un extremum de l'action

$$S(\psi_n) = - \int d\mathbf{r} \left\{ \rho\psi_n + \frac{1}{8\pi G} (\text{grad } \psi_n)^2 \right\}$$

est atteint pour l'équation de Poisson en gravitation newtonienne.

2. Pour généraliser la gravitation, Milgrom considère l'action suivante

$$S(\psi) = - \int d\mathbf{r} \left\{ \rho\psi + \frac{a_o^2}{8\pi G} F \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right] \right\}$$

où F est une fonction arbitraire de la variable réelle, continue et dérivable. Ecrire l'équation de Poisson correspondante à cette nouvelle gravité.

3. Montrer qu'il existe un vecteur \mathbf{h} tel que

$$F' \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right] \text{grad } \psi = \text{grad } \psi_n + \text{rot } \mathbf{h}$$

4. On fait l'hypothèse que $\text{rot } \mathbf{h}$ est toujours négligeable devant le gradient du potentiel non modifié (newtonien) ψ_n . Montrer qu'en symétrie sphérique, et en choisissant une fonction F telle que

$$F' \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right] \simeq \frac{|\text{grad } \psi|}{a_o} \quad \text{quand } |\text{grad } \psi| \ll a_o ,$$

on peut expliquer la courbe de rotation plate des galaxies.

5. Quelle doit être la forme de la fonction $F' \left[\frac{(\text{grad } \psi)^2}{a_o^2} \right]$ quand $|\text{grad } \psi| \gg a_o$?
6. Trouver la valeur de a_o qui correspond à la valeur de la vitesse observée pour notre galaxie.
7. La sonde Pioneer 10, lancée le 3 mars 1972, a franchi l'héliopause ($\simeq 70$ UA du Soleil) en 1987. Lors de ce franchissement, le signal émis par la sonde a montré qu'elle se déplaçait moins vite que prévu. Cette constatation a été confirmée un peu plus tard par la sonde Pioneer 11. Cette anomalie peut-elle s'expliquer par la modification de la gravité introduite dans les questions précédentes ?

C - Formulaire

- Quelques valeurs numériques utiles aux sages...

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$M_\odot = 1,97 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$1 \text{ UA} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ pc} = 3,09 \times 10^{16} \text{ m}$$

- A toutes fin utiles on rappelle l'une des formules de Green (Intégration par parties généralisée)

Soit un domaine Ω de bord $\partial\Omega$, pour toute fonction scalaire f de classe C^1 sur Ω et pour tout vecteur \mathbf{w} de classe C^1 sur Ω , on a

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \text{grad} f \, d\tau = - \int_{\Omega} f \, \text{div} \mathbf{w} \, d\tau + \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, f \, d\sigma$$

où $d\tau$ et $d\sigma$ sont respectivement un élément de volume de Ω et de surface de $\partial\Omega$ et \mathbf{n} le vecteur normal à $\partial\Omega$.