Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2004

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Masses complexes, distances imaginaires

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

A - Préambule - Intégrabilité

On considère un système possédant 2 degrés de liberté, dont le hamiltonien s'écrit

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

1. A quel système physique correspond ce hamiltonien ?
2. On dit que la transformation $(q,p) \to (Q,P)$ est canonique si son jacobien est l'unité. Montrer que l'on peut choisir deux réels (a,b) pour que la transformation $(q,p) \to \left(q = a\sin(x)\sqrt{y}, p = b\cos(x)\sqrt{y}\right)$ soit canonique.
3. Intégrer les équations de Hamilton en variables (x,y) lorsque $(q,p) \to (x,y)$ est canonique.
   Conseil : on acceptera (la démonstration est facile) le résultat suivant : si (q,p) et (Q,P) sont deux systèmes de coordonnées conjuguées en relation via une transformation canonique alors pour toutes fonctions f et g des variables (q,p) ou (Q,P) on a :
   $$\{f,g\}_{q,p} = \{f,g\}_{Q,P}$$
   On dit que les crochets de Poisson sont invariants par transformation canonique.

Ce système est le prototype des systèmes dits ≪intégrables≫ pour lesquels un changement de variable amène toutes les équations du mouvement à une équation de la forme

$$\frac{dx}{d\tau} = F(x)$$

où F est une fonction analytique et τ une fonction en bijection avec le temps.

B - Rappel - Problème du satellite

On considère un satellite de masse m en orbite dans le champ gravitationnel $\psi_\oplus$ créé par la Terre. On néglige le champ créé par la masse du satellite.

1. Sous quelles hypothèses, ce champ est-il de la forme
   $$\psi_\oplus(r,\varphi) = -\frac{G}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n \alpha_n P_n(\sin\varphi) \quad ? \tag{1}$$
   où $G = 6,672\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$ est la constante de gravitation, $r_e = 6\ 378\,140\,\mathrm{m}$ est le rayon équatorial terrestre, r et φ sont respectivement la distance entre les barycentres de la Terre et du satellite et la latitude du satellite, α_n une constante et P_n le polynôme de Legendre d'ordre n (voir cours de gravitation classique)
2. Sous ces hypothèses que valent $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 ?
3. Rappeler brièvement la nature de l'orbite du satellite si l'on commet l'approximation
   $$\psi_\oplus(r,\varphi) = -\frac{G}{r}\sum_{n=0}^{2}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n \alpha_n P_n(\sin\varphi) \tag{2}$$
   Cette approximation est-elle raisonnable ?
4. Le problème du mouvement de m dans le champ $\psi_\oplus(r,\varphi)$ de la relation (1) est-il intégrable ?

C - Particule test dans le champ de 2 masses fixes, problème dit de l'haltère

On considère à présent le mouvement d'une particule test de masse m dans le champ gravitationnel créé par deux masses m_1 et m_2 fixes, ponctuelles ou assimilables comme telles (haltère). Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R} = (O\text{XYZ})$ de la figure 11.4 ces deux masses sont placées sur l'axe $O\text{Z}$ à des distances respectives c_1 et c_2 de l'origine. La particule test occupe quant à elle la position (x, y, z) à l'instant t.

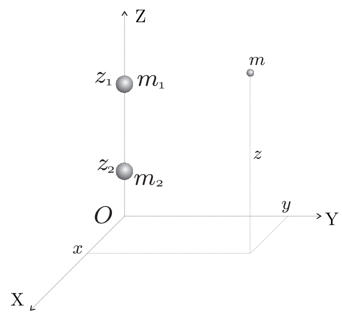

FIGURE 1 – Position des masses

1. Montrer que le champ gravitationnel en $\overrightarrow{r}$ de coordonnées $[x, y, z]^T$ dans $\mathcal{R}$ est donné par la relation
$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -G\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$
où $r_{k=1,2} := \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_k)^2}$ désigne la distance entre la masse m_k et la particule test.
2. Montrer que l'on peut écrire ce champ sous la forme
$$\psi\left(\overrightarrow{r}\right) = -\frac{G}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\beta_n}{r^n}P_n\left(\sin\varphi\right)$$
Où l'on a posé $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On explicitera β_n en fonction de n, m_1, c_1, m_2 et c_2.
On rappelle que sous réserve de convergence de la série
$$\left[1 - 2\omega\sin\varphi + \omega^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega^n P_n\left(\sin\varphi\right)$$
3. On décide d'approximer le problème du satellite par le problème de l'haltère : on cherche l'haltère dont le champ se rapproche le plus de celui de la Terre décrite sous les hypothèses de la question A-1, cette haltère sera dite optimale. Le problème de l'haltère ne possède que 4 paramètres : m_k et c_k pour $k = 1, 2$. On ne peut donc imposer au maximum que 4 équations pour définir les caractéristiques de l'haltère soit
$$\beta_n = r_e^n\,\alpha_n \;\text{ pour } n = 0, 1, 2, 3$$
   (a) En imposant les deux premières contraintes ($n = 0, 1$), exprimer les masses $m_{k=1,2}$ de l'haltère optimale en fonction de $m_\oplus$ et $c_{k=1,2}$.

(b) En reportant le résultat précédent dans les contraintes ($n = 2, 3$), déterminer les caractéristiques de l'haltère optimale.

Conseil : mais non, vous ne vous êtes pas trompés dans les calculs...

(c) Calculez β_n. Qu'en concluez-vous ?

(d) Que pensez-vous de la qualité de l'approximation du problème du satellite par celui de l'haltère décrite précédemment ?

D - Problème intégrable ?

En plaçant l'origine du référentiel au centre géométrique des deux masses ($|c_1| = |c_1| = c$), en passant en coordonnées elliptiques (λ, μ, ω)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos\omega \\ y & = & c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin\omega \\ z & = & c\lambda\mu \end{array} \right.$$

et au prix d'un aménagement du temps conduisant à poser

$$dt = c^2\left(\lambda^2 + \mu^2\right)d\tau$$

les équations du mouvement de m dans le champ de l'haltère deviennent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\lambda}{d\tau} & = & \sqrt{L(\lambda)} \\ \\ \dfrac{d\mu}{d\tau} & = & \sqrt{M(\mu)} \\ \\ \dfrac{d\omega}{d\tau} & = & k\dfrac{\lambda^2+\mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \end{array} \right.$$

où k est une constante et $L(x)$ et $M(x)$ sont deux polynômes du $4^{ème}$ degré de la seule variable x qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter ici.

1. Le problème de l'haltère est-il intégrable ?
2. Finalement, comment qualifieriez-vous l'intégrabilité du problème du satellite sous les hypothèses de la question A-1 ?