Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2003

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Les galaxies polytropiques

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

A - Etude préliminaire du cas général

Un gaz est dit polytropique s'il est défini par une équation d'état d'équilibre de la forme

$$P = K\,\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{1}$$

où P et ρ sont respectivement la pression et la densité du gaz considéré, K est une constante arbitraire positive et n un réel positif appelé indice polytropique. On se propose d'étudier dans ce problème les diverses propriétés d'une galaxie polytropique. On considère donc une sphère de gaz autogravitant en équilibre hydrostatique, isotrope et possédant une équation d'état de la forme (1).

1. Montrer que si l'on pose $\rho = \rho_o\, y^n$ et $r = a_n\, x$ avec $\rho_o = \lim_{r\to 0} \rho\,(r)$ et pour un choix judicieux de a_n, alors $y\,(x)$ vérifie l'équation

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) + y^n = 0 \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} y = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{dy}{dx} = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

   On pourra remarquer qu'à l'équilibre hydrostatique sphérique la deuxième équation de Jeans s'écrit

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} = -\frac{d\psi}{dr}$$

2. Sachant que deux fonctions vérifiant la même équation différentielle avec les mêmes conditions aux limites sont égales, montrer que pour une galaxie polytropique on a la relation

$$\rho\,(r) = b_n\,[\psi\,(r)]^n$$

   où b_n est un coefficient que l'on précisera.
3. Fonction de distribution
   (a) Rappeler pourquoi, dans le cas sphérique isotrope, la densité du système est donnée par la relation

$$\rho\,(\phi) = \frac{8\pi}{\sqrt{2}}\int_0^{\phi} f\,(\mathcal{E})\,\sqrt{\phi - \mathcal{E}}\,d\mathcal{E}$$

   où f est la fonction de distribution du système par unité de masse dans l'espace des phases, et l'on a posé $\phi = -\psi$ et $\mathcal{E} = -E$ de telle sorte que $E = \phi - p^2/2$
   (b) En déduire que pour une galaxie polytropique d'indice n, on a la relation

$$f\,(\mathcal{E}) = c_n\,\mathcal{E}^{n-\frac{3}{2}}$$

   où c_n est une constante que l'on déterminera (cf. formulaire 1,2,3)

B - Étude du cas $n = 1$

1. En posant $y\,(x) = u\,(x)\,/x$, résoudre l'équation (2) dans le cas $n = 1$.
2. Montrer qu'une galaxie d'indice polytropique $n = 1$ possède une taille finie r_1 que l'on déterminera (on se souviendra que la densité est toujours positive).
3. Déterminer le potentiel gravitationnel du système en fonction de r et préciser notamment

$$\lim_{r\to\infty} \psi\,(r)$$

C - $n = 5$ – Le modèle de Plummer

1. En posant

$$x = e^{-t} \quad \text{et} \quad y\left(x\right) = \frac{e^{t/2}}{\sqrt{2}} u\left(t\right)$$

de telle sorte que

$$\lim_{t \to +\infty} u\left(t\right) = \lim_{t \to +\infty} u'\left(t\right) = 0$$

résoudre l'équation (2) dans le cas $n = 5$.
On rappelle que l'intégration d'une équation différentielle de la forme $f'' = g\left(f\right)$ s'effectue en multipliant par f', on utilisera par ailleurs le résultat 4 du formulaire.
2. En déduire qu'une galaxie d'indice polytropique $n = 5$ s'étend a priori dans tout l'espace.
3. Montrer qu'une galaxie d'indice polytropique $n = 5$ possède une masse finie que l'on déterminera.
4. Montrer que la dispersion de vitesse à la distance r

$$\sigma^2\left(r\right) = \frac{1}{\rho} \int v^2 f\left(\mathcal{E}\right) d^3 v$$

dans une galaxie d'indice polytropique $n = 5$ est simplement proportionnelle au potentiel gravitationnel $\psi(r)$ à cette même distance.

Formulaire

1. A toutes fins utiles nous rappelons les résultats suivants :
2. Formule d'inversion d'Abel

$$\text{Si} \;\; f\left(x\right) = \int_0^x \frac{g\left(t\right)}{\left(x - t\right)^{\alpha}} dt \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

$$\text{Alors } g\left(t\right) = \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \frac{f\left(x\right)}{\left(t - x\right)^{1-\alpha}} dx\right]$$

3. Fonction eulérienne de première espèce
Pour tout couple de réels (p, q), on a

$$\beta\left(p, q\right) := \int_0^1 u^{p-1} \left(1 - u\right)^{q-1} du = \frac{\Gamma\left(p\right) \Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p + q\right)}$$

ainsi pour des valeurs convenables de n, on a donc

$$\int_0^1 \frac{u^{n-1}}{\sqrt{1 - u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(n\right)}{\Gamma\left(n - 1/2\right)}$$

4. Fonction eulérienne de deuxième espèce
Pour tout réel p, on a

$$\Gamma\left(p + 1\right) := \int_0^{\infty} u^p e^{-u} du$$

on trouve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$, $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$, si n est entier non nul on a

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

enfin si a est non entier, on trouve

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

5. On donne la primitive suivante

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1-\dfrac{u^4}{3}}} = \frac{1}{4}\ln\left(\lambda\left[\frac{1-\sqrt{1-\dfrac{u^4}{3}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{u^4}{3}}}\right]\right)$$