Ecole Doctorale
d'Astronomie et d'Astrophysique
d'Ile de France

Examen de Gravitation

Décembre 2001

durée 3H00

Les notes de cours et le livre du cours sont autorisés

Le métro gravitationnel

Ce sujet a été conçu spécialement pour cette occasion par le professeur de ce cours J. Perez
Vous pouvez en obtenir une correction en lui écrivant

Dans tout le problème la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon $R_\oplus$ et de densité $\rho_\oplus$.

À la fin du XXI^e siècle après des épisodes climatiques catastrophiques la population mondiale est rassemblée sur une bande s'étendant sur 10 degrés de latitude de part et d'autre de l'équateur. La prise de conscience à l'échelle planétaire des problèmes écologiques conduit le gouvernement mondial à mettre en place un moyen de transport simple et très efficace : le métro gravitationnel.

A - Préliminaire

Calculer le champ gravitationnel ψ à l'intérieur et à l'extérieur d'un corps sphérique homogène de rayon $R_\oplus$ et de densité $\rho_\oplus$. On pourra faire l'hypothèse que ce champ est radial, on rappelle les conditions aux limites :

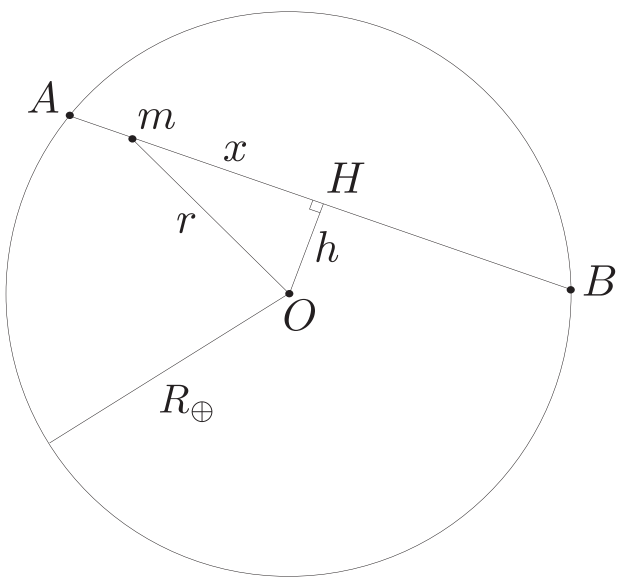
— ψ et $d\psi/dr$ sont continues en $r = R_\oplus$.

— $\lim\limits_{r\to 0} \psi'(r) = \lim\limits_{r\to +\infty} \psi(r) = 0$

Il sera apprécié un petit commentaire sur ces conditions aux limites...

B - Faisabilité

On relie deux points A et B de l'équateur terrestre par un tunnel traversant la Terre selon le schéma ci-dessous.

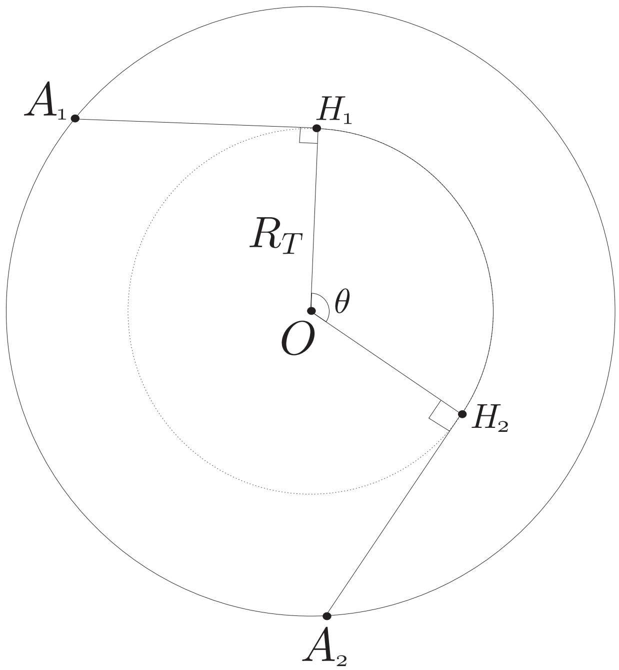


On repère la position d'un mobile de masse m se déplaçant dans le tunnel sous l'effet du champ gravitationnel terrestre par son abscisse $x = Hm$ le long du tunnel.

1. Ecrire le lagrangien du mobile (supposé ponctuel) de masse m en utilisant x comme coordonnée généralisée, on considère bien sûr que le mobile ne subit aucun frottement.
2. Ecrire les équations de Lagrange pour x.
3. Déterminer le mouvement du mobile m abandonné au point A sans vitesse initiale à $t = 0$.
4. Le mobile atteint-il l'extrémité B du tunnel, si oui en combien de temps ?
5. Déterminer la vitesse du mobile en fonction de $\rho_\oplus, R_\oplus, G$ et du temps t.

C - Le projet de métro

Pour desservir plusieurs points sur l'équateur, on considère un système de tunnel comme indiqué sur le graphique ci-dessous



Un tunnel circulaire est percé à une distance R_T du centre de la Terre. Dans l'enceinte de ce tunnel, on dispose des parois supraconductrices permettant à une rame équipée de sabots magnétiques de léviter sans frottement. On creuse des tunnels de descente (ou de remontée) A_1H_1 A_2H_2, etc. Les points H_1, H_2, ... sont équipés d'un système d'aiguillage permettant un transfert sans perte de vitesse entre le tunnel de descente et/ou de remontée et le tunnel circulaire.

1. On laisse tomber une rame de masse m sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ du point A_1.
   (a) Quelle est sa vitesse en H_1 ?
   (b) Combien de temps dure le trajet A_1H_1 ?
2. Ecrire le lagrangien de la rame lors de son parcours dans le tunnel circulaire. En déduire son mouvement (on assimilera la rame à un point, on suppose aussi que ce point reste au centre du tunnel grâce au système de confinement).
3. On néglige le temps de transfert entre les tunnels, mais surtout on considère que la vitesse est conservée lors du transfert. Combien dure le trajet H_1H_2 sur le rail circulaire ?
4. Au point H_2 la rame change de tunnel en étant aiguillée dans le tunnel (de remontée) H_2A_2. La rame atteint-elle le point A_2 ? Si oui en combien de temps ?
5. Calculer la durée totale du voyage en fonction de $\rho_\oplus$, $R_\oplus$, R_T , G et θ.
6. Pour un tunnel circulaire de rayon $R_\oplus/2$, calculer la durée d'un voyage pour lequel $\theta = \pi/2$, quelle est dans ce cas la distance au sol entre les deux points ?
   On donne $\rho_\oplus \simeq 5,5 \times 10^3$ kg.m^{-3}, $R_\oplus \simeq 6378$ km, $G = 6.674 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

   En disposant plusieurs stations équipées de tunnel d'accès au tunnel circulaire le tour est joué...

D - Réalisation

Pensez-vous que ce projet soit réalisable un jour ? (On appréciera des réponses motivées et étayées par des raisonnements physiques, économiques, poétiques...)