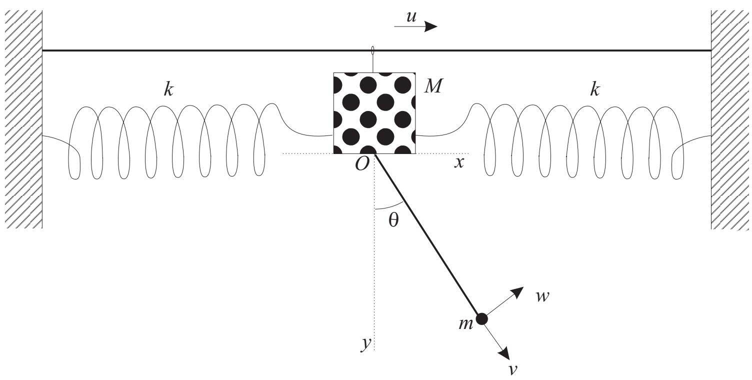
Travaux dirigés de physique quantique
PA101 - PC 1
Mécanique analytique

Exercice 1 On considère un système de particules possédant s degrés de liberté décrit par les coordonnées généralisées $q_{i=1,..,s}$ et un lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_1, \cdots, q_s, \frac{dq_1}{dt}, \cdots, \frac{dq_s}{dt}, t\right)$. Montrer que l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \; dt$$

est extremale lorsque le mouvement de ces particules relie le point $[q_1(t_1), \cdots, q_s(t_1)]$ au point $[q_1(t_2), \cdots, q_s(t_2)]$

Exercice 2
Soit un système mécanique bidimensionnel décrit par le schéma ci-dessous



1. Combien de degrés de liberté possède ce système ?
2. Ecrire son lagrangien
3. Ecrire les équations du mouvement.

Exercice 3
On considère une particule de masse m , de charge e repérée dans un référentiel galiléen par le vecteur position $\overrightarrow{r}$ évoluant librement dans un champ électromagnétique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. On néglige le poids de cette particule.

1. Montrer que le lagrangien de cette particule s'écrit

$$\mathcal{L}\left(\dot{\vec{r}}, \vec{r}\right) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} + e\dot{\vec{r}}.\vec{A} - eV$$

2. A quelle condition la transformation (de jauge)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \\ \\ V \rightarrow V' = V - \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{où } \phi\left(\overrightarrow{r}, t\right) \text{ est une fonction quelconque}$$

laisse invariante les équations du mouvement ?

3. Déterminer l'impulsion $\vec{p}$ de cette particule et en déduire son hamiltonien $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r})$.
4. Ecrire les équations du mouvement à partir des équations de Hamilton.

Travaux dirigés de physique quantique
PA101 - PC 1
Mécanique Analytique
Correction

Exercice 1

La condition d'extremum s'écrit $\delta S = 0$, or $S = S(q_i, \dot{q}_i)$ et donc

$$0 = \delta S = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) dt$$

une intégration par partie du second terme donne

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt + \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}$$

puisque l'on a fixé les conditions au bord $[\delta q_1(t_1), \cdots, \delta q_s(t_1)] = [\delta q_1(t_2), \cdots, \delta q_s(t_2)] = 0$

L'action est extremale si

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0$$

en incorporant les équations de Lagrange on a le résultat.

Pour la réciproque il faut que les δq_i soient indépendants ...

Exercice 2

1) Système à 2 degrés de liberté : par exemple l'angle d'inclinaison du pendule θ, et la position de la masse M sur l'axe horizontal x.

2) Il n'y a que des forces conservatives : les forces de rappel des ressorts dérivent d'un potentiel ainsi que le poids.

Le lagrangien est donc

$$\mathcal{L} = T - U$$

où T est l'énergie cinétique totale et U l'énergie potentielle totale.

On choisit un référentiel galiléen avec un des axes selon l'axe de glissement de M (ie Ox)

Les masses M et m sont supposées ponctuelles. On a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{Om} = x\overrightarrow{u} + \ell\overrightarrow{v}$ ($\overrightarrow{u}$ unitaire le long de Ox et fixe, $\overrightarrow{v}$ unitaire le long de la tige supportant m et donc mobile)

On a donc

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u} \text{ et } \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u} + \ell\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \dot{x}\overrightarrow{u} + \ell\dot{\theta}\overrightarrow{w}$$

puis

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})\right)$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

Pour l'énergie potentielle il y a les 2 ressorts et le poids

$$\begin{aligned} U &= mg\ell\left(1-\cos\theta\right)+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}k\left(-x\right)^2 \\ &= mg\ell - mg\ell\cos\theta + kx^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\ell^2\dot{\theta}^2+2\dot{x}\ell\dot{\theta}\cos\theta\right) - mg\ell + mg\ell\cos\theta - kx^2$$

Première équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0$$

Calcul de 3 lignes sans intérêt...

Deuxième équation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \theta}=0$$

Calcul de 3 lignes sans intérêt...

Cet exercice est important car il montre à des gens qui sortent de prépa comment on peut obtenir très facilement les équations du mouvement pour un problème tordu qui pourrait les terroriser autrement (ils ne connaissent que Newton ...). Il montre aussi que la difficulté réside dans le fait de résoudre les équations du mouvement (ce qui est généralement impossible) et pas dans le fait de les écrire...

Exercice 3

Cet exercice est important car il permet de comprendre la différence entre impulsion et quantité de mouvement.

C'est fondamental en MQ lorsque l'on quantifie cette impulsion. Le hamiltonien avec champ magnétique est utilisé pour expliquer l'effet Zeemann par exemple, mais il y a bien d'autres exemples ...

1. Il y a 2 méthodes, soit on part du lagrangien fournit, on écrit les équations de Lagrange et on retrouve les équations du mouvement. On peut aussi faire l'inverse. Je préconise cette solution car elle permet d'expliquer comment on fabrique un lagrangien ...

   En mécanique classique, on constate expérimentalement que la charge e subit une force, dite de Lorentz et que l'équation donnant son mouvement s'écrit

   $$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E}+\dot{\vec{r}}\wedge\vec{B}\right)=\vec{F} \tag{1}$$

   Le but du jeu, car il ne s'agit pas d'autre chose pour le moment, consiste à trouver un lagrangien tel que l'équation de Lagrange associée redonne l'équation (1).

   Pour ce faire, commençons par remplacer dans l'expression de la force de Lorentz, les champs par leurs potentiels, il vient

   $$\vec{F} = e\left[-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}V+\dot{\vec{r}}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\right] \tag{2}$$

   en remarquant que

   $$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{r}} \\ &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\left(\dot{\vec{r}}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} \end{aligned} \tag{3}$$

cette force se réecrit

$$\vec{F} = e\left[-\frac{d\vec{A}}{dt} - \vec{\nabla}V + \left(\dot{\vec{r}}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \dot{\vec{r}} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)\right] \tag{4}$$

en se souvenant d'une formule d'analyse vectorielle fort utile

$$\vec{\nabla}\left(\vec{u}.\vec{v}\right) = \vec{u} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}\right) + \vec{v} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{u} \tag{5}$$

et en notant que tous les opérateurs construits à partir de $\vec{\nabla}$ ont une action nulle sur $\dot{\vec{r}}$, la force de Lorentz peut finalement se mettre sous la forme

$$\vec{F} = e\left[-\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\left(\dot{\vec{r}}.\vec{A} - V\right)\right] \tag{6}$$

l'équation du mouvement (1) s'écrit donc

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}\right] = \vec{\nabla}\left(e\dot{\vec{r}}.\vec{A} - eV\right) \tag{7}$$

pour retrouver la forme si particulière de l'équation de Lagrange il faut faire apparaître une dérivée par rapport à la vitesse à l'intérieur du terme de dérivée temporelle totale, c'est possible en écrivant

$$\frac{d}{dt}\left[m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}.\vec{A}\right)\right] \tag{8}$$

l'équation (7) donne donc

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{d\dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}.\vec{A}\right)\right] = \frac{d}{d\vec{r}}\left(e\dot{\vec{r}}.\vec{A} - eV\right) \tag{9}$$

à l'intérieur de la dérivée par rapport à la vitesse (terme de gauche) on peut rajouter le terme $-eV$ qui ne dépend que de la position. De même, à l'intérieur de la dérivée par rapport à la position (terme de droite) on peut rajouter le terme $\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ qui ne dépend que de la vitesse, ainsi en introduisant le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}.\vec{A} - eV \tag{10}$$

2. En appliquant la transformation de jauge au lagrangien on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\dot{\vec{r}}\vec{A}' - eV' \\ &= \mathcal{L} + e\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\phi}{d\vec{r}} \\ &= \mathcal{L} + \frac{d\phi}{dt}e \end{aligned} \tag{11}$$

Si la charge e est constante, lors d'une transformation de jauge des champs on rajoute au lagrangien la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction de $\vec{r}$ et de t. Les équations du mouvement (Lagrange) sont équivalentes au principe de moindre action, or lors d'une transformation de jauge l'action devient

$$S \to S' = S + \int_{t_1}^{t_2} e\frac{d\phi}{dt}dt$$

si e ne dépend pas du temps le terme supplémentaire est constant une fois intégré, lors de la variation dS il est donc nul : Les équations du mouvement sont donc inchangées.

Cette relation entre une symétrie du système (jauge) et une loi de conservation(charge) est l'un cas particulier du théorème de Noether. En MQ, on a la conservation du courant de probabilité qui est associée à la symétrie consistant à multiplier la fonction d'onde par un facteur de phase $e^{i\varphi}$.

3. Par définition, l'impulsion s'écrit

$$\vec{p} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = \dot{\vec{r}} + e.\vec{A} \tag{12}$$

un terme supplémentaire vient donc s'ajouter à la quantité de mouvement dans la définition de l'impulsion. Comme dans le cas conservatif, nous pouvons écrire le hamiltonien et tenter une interprétation, il vient ici

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \vec{p}.\dot{\vec{r}} - \mathcal{L} \\ &= \left(\dot{\vec{r}} + e\vec{A}\right).\dot{\vec{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\dot{\vec{r}}.\vec{A} + eV \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + eV \end{aligned} \tag{13}$$

Ce hamiltonien ne ferait donc pas intervenir de termes magnétiques ... !

La réponse à ce faux problème tient dans le fait qu'il ne faut pas écrire le hamiltonien en fonction de $\dot{\vec{r}}$ mais en fonction de $\vec{p}$ pour obtenir un ensemble cohérent. Dans les bonnes variables, on a

$$\mathcal{H} = \frac{\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2}{2m} + eV \tag{14}$$

4. La première équation de Hamilton est alors comme dans le cas conservatif une "définition" de la quantité de mouvement, elle s'écrit en effet

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \tag{15}$$

en utilisant la relation astucieuse

$$\vec{\nabla}\left(\vec{u}.\vec{u}\right) = 2\left[\vec{u} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{u}\right) + \left(\vec{u}.\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right] \tag{16}$$

quelques lignes de calcul et un retour aux champs, permettent de se rendre compte que la deuxième équationde Hamilton

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}}$$

redonne

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left[\vec{E} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}\right] \tag{17}$$