

# Dynamique de l'univers homogène

Jérôme Perez

7 septembre 2021

## 1 Une approche classique

On peut obtenir les équations décrivant la dynamique de l'Univers homogène et isotrope sans trop d'investissement physique, c'est-à-dire sans utiliser la relativité générale. Il faut faire alors des hypothèses plus ou moins difficiles à admettre...

Une fois ces équations obtenues le comportement de leurs solutions est assez simple à comprendre.

L'hypothèse principale de cette affaire est que l'univers est en expansion, ce qui n'est pas banal en mécanique classique... Cette hypothèse, qui est habituellement déduite des équations de la relativité générale, peut-être comprise en observant certaines propriétés des galaxies qui permettent de postuler la loi de Hubble-Lemaitre. Pour comprendre comment on en est arrivé là, le plus simple est de regarder un petit film dont c'est l'objectif : il s'agit de l'épisode I de la cyberconférence sur le site <https://uma.ensta-paris.fr/conf/expansion/index.php>.

### 1.1 L'univers de Milne-Mac Crea

Considérons une boule du fluide constituant l'univers. Ce dernier est supposé homogène et isotrope tout comme le (ou les) fluides qu'il contient.

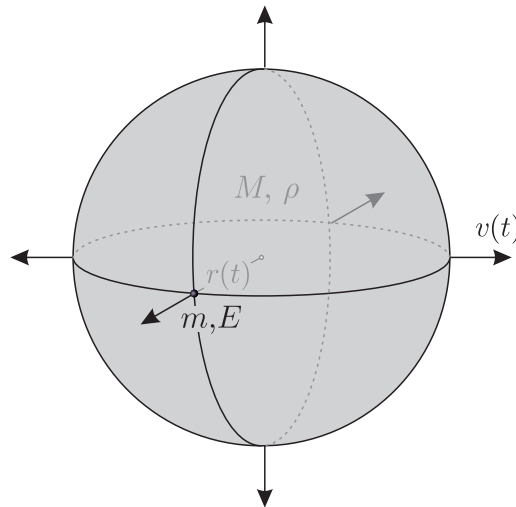


FIGURE 1 – Boule d'univers homogène en expansion avec une galaxie de masse  $m$  posée à sa surface

Cette boule de rayon  $r$  et de masse volumique  $\rho = cste$  possède une masse totale

$$M = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 = cste$$

Cette masse est constante mais l'Univers est en expansion selon la loi de Hubble  $v = Hr$ . Le fluide contenu dans la sphère a donc tendance à se diluer. Posons une galaxie de masse  $m$  sur le bord de cette boule, son énergie est

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = cste \quad (1)$$

Le rayon  $r$  de cette boule évolue avec le temps à cause de l'expansion de l'univers. Notons  $x$  le rayon propre (ou comobile) de cette sphère,  $x$  est une longueur constante; nous aurons  $r(t) = a(t)x$  où la fonction  $a(t)$  est appelée facteur d'échelle de l'Univers. En dérivant cette relation par rapport au temps on obtient l'expression du paramètre de Hubble  $H$  par identification

$$\dot{r} = \dot{a}x \text{ et } \dot{r} = v = Hr \implies H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2)$$

Ainsi, en utilisant l'expression de l'énergie et de la vitesse on obtient

$$\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} = H^2 r^2 \quad (3)$$

puis celle de la masse dans l'énergie potentielle

$$\frac{2E}{M} + \frac{8\pi G \rho r^2}{3} = H^2 r^2 \quad (4)$$

Finalement en utilisant l'expression (2) du paramètre de Hubble et le fait que  $r = ax$ , il vient

$$\frac{K}{a^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \text{ avec } K = \frac{2E}{mx^2} = cste \quad (5)$$

Cette équation est connue sous le nom de première équation de Friedmann. Elle a été obtenue ici dans une approche classique : sans faire appel à la relativité générale. Cette approche introduite par Milne et Mac Crea en 1934 [1], est plus que discutable d'un point de vue physique mais fournit une relation presque correcte entre  $a(t)$  et  $\rho(t)$ .

Cette équation a été obtenue en appliquant des concepts classiques et l'hypothèse de Hubble à un problème que seul la relativité générale peut traiter. Le traitement complet relativiste (voir la section 2 pour une esquisse) permet de retrouver cette équation et d'interpréter le terme  $E$  : il est proportionnel à l'opposé de la courbure constante  $k$  d'un univers homogène et isotrope. Le traitement relativiste complet fait également apparaître la constante cosmologique  $\Lambda$ . La première équation de Friedmann s'écrit alors

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (6)$$

## 1.2 Un fluide en expansion adiabatique

En utilisant la célèbre relation d'Einstein, on peut associer au fluide étudié précédemment une densité volumique d'énergie  $\varepsilon(t) = \rho(t)c^2$ . Un volume  $V$  contiendra donc une énergie

$$E = \varepsilon V = \rho V c^2 \quad (7)$$

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie est compatible avec le fait qu'il n'y ait ni gradient ni transfert thermique entre les fluides situés à l'intérieur et à l'extérieur du volume considéré : l'évolution de ce dernier est donc adiabatique. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$dE = -pdV \quad (8)$$

Les fonctions  $E$  et  $V$  ne dépendent que du temps on a donc en fait

$$\dot{E} + p\dot{V} = 0 \quad (9)$$

Le volume de la sphère s'écrit  $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$  ainsi

$$\dot{V} = 4\pi r^2 \dot{r} = 3HV \quad (10)$$

en combinant les relations (9), (10) on obtient donc  $\dot{E} + 3pHV = 0$ . En dérivant par rapport au temps la définition (7) de l'énergie, on trouve enfin

$$V \left[ \dot{\rho} + 3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \right] = 0$$

Cette relation étant vraie à chaque instant  $t$  et la fonction  $V(t)$  n'étant pas identiquement nulle on en déduit que

$$\dot{\rho} = -3H \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad (11)$$

qui constitue avec (6) une seconde équation permettant de relier les fonctions  $\rho(t)$  et  $a(t)$ . On notera que cette équation est exactement la même que celle que l'on peut déduire des équations d'Einstein avec ou sans constante cosmologique. Elle traduit la conservation de l'énergie impulsion.

### 1.3 Le modèle standard de la cosmologie

Nous disposons de deux équations mais nous avons trois inconnues à déterminer la masse volumique  $\rho(t)$ , le facteur d'échelle  $a(t)$  et la pression  $p(t)$  régnant dans le fluide. Pour fermer le système on fait généralement l'hypothèse que le fluide modélisant le contenu de l'univers est barotropique. Dans ces conditions, sa masse volumique et sa pression sont à chaque instant reliées par une équation de la forme  $p = \omega \rho c^2$ . La constante  $\omega$ , appelée indice barotropique, caractérise dans de nombreuses situations les fluides parfaits que nous considérons ici.

Par exemple un gaz de particules dont les seules interactions sont des collisions lors desquelles elles échangent de l'impulsion est décrit par le modèle du gaz parfait. Si ces  $N$  particules ne sont pas relativistes et si elles sont assimilables à des points (hypothèse monoatomique par exemple), à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , on peut facilement obtenir les relations

$$\begin{cases} pV = Nk_B T \\ E = \frac{3}{2} Nk_B T \end{cases}$$

La première est un problème classique de physique statistique élémentaire et la seconde est le résultat de l'équipartition de l'énergie qui provient de la même veine. En combinant ces deux relations on obtient directement

$$p = \frac{2E}{3V} = \frac{2}{3}\varepsilon \quad \text{soit} \quad p = \omega \rho c^2 \quad \text{ainsi} \quad \omega_{\text{gp}} = \frac{2}{3}.$$

Un peu de physique statistique d'un gaz parfait de photons sans interactions permet de modéliser le rayonnement électromagnétique et de comprendre la théorie du corps noir. On montre alors qu'un fluide constitué de rayonnement électromagnétique est décrit par une relation de la forme

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{soit} \quad \omega_{\text{rad}} = \frac{1}{3}$$

Si l'on considère à présent un fluide non collisionnel de masse volumique  $\rho$  sa pression ne sera due qu'à une éventuelle dispersion de vitesse de ses particules. Elle sera donc nulle dans le cadre de nos

hypothèses homogènes et isotropes. Un tel fluide peut cependant être en interaction gravitationnelle, ce qui pourra induire des variations locales de densité et donc de température. La pression globale restant négligeable devant la densité d'énergie. Il s'agit du modèle de la matière noire (dark matter) qui est donc décrite par une équation de la forme

$$p = 0 \times \varepsilon \text{ soit } \omega_{\text{dm}} = 0$$

Un dernier cas d'intérêt est celui de l'énergie du vide dont la mécanique quantique et les expériences de Casimir nous apprennent que

$$p = -\varepsilon \text{ soit } \omega_{\text{vide}} = -1$$

La physique standard permet donc d'envisager une valeur minimale de  $\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{vide}} = -1$  pour un fluide sans interaction. Une telle équation d'état est aussi celle à laquelle on peut associer le terme de constante cosmologique  $\Lambda$ , envisageable en relativité générale, on a donc  $\omega_{\Lambda} = \omega_{\text{vide}} = -1$ . En ce qui concerne la valeur maximale, elle est communément associée à  $\omega_{\text{max}} = +1$  qui correspond à un fluide dans lequel la vitesse du son est celle de la lumière. On parle de matière raide (stiff matter).

Puisqu'ils sont sans interactions tous ces fluides peuvent cohabiter dans l'univers et évoluer indépendamment les uns des autres. Les différentes dynamiques associées sont découplées, on peut les étudier séparément.

En introduisant une relation polytropicque entre  $p$  et  $\rho$  dans l'équation de conservation de l'énergie (11) on trouve

$$\dot{\rho} = -3H(1 + \omega)\rho$$

Combinée avec l'expression de  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  on trouve alors que

$$-3(1 + \omega) \frac{d \ln a}{dt} = \frac{d \ln \rho}{dt}$$

Si  $\omega$  ne dépend pas du temps ce qui revient toujours à considérer les fluides sans interaction, cette relation s'intègre en

$$\rho \times a^{3(1+\omega)} = cste \tag{12}$$

Supposons que la fonction  $a(t)$  soit croissante, ce qui correspond à une certaine réalité de l'expansion de l'univers dans lequel nous vivons. Elle est également positive par définition car c'est un facteur d'échelle. Considérons que le fluide constituant le contenu de l'Univers soit à un instant donné, disons  $t_0 > 0$ , composé de matière noire ( $\omega_{\text{dm}} = 0$ ) et de rayonnement électromagnétique (photons pour lesquels  $\omega_{\text{rad}} = \frac{1}{3}$ ). Un grand nombre d'observations permettent de penser que l'univers observable est effectivement homogène et isotrope à différentes époques de son évolution. Par ailleurs ces observations<sup>1</sup> ne sont facilement interprétables que si, dans des temps éloignés  $\rho_{\text{rad}}(t_0) \gg \rho_{\text{dm}}(t_0)$ . Partant de cette situation, que l'on appelle l'ère radiative, l'évolution temporelle ou histoire thermique de l'Univers est assez simple à comprendre. L'équation (12) appliquée à chacune des composantes du fluide cosmique donne

$$\rho_{\text{rad}} \times a^4 = cste \text{ et } \rho_{\text{dm}} \times a^3 = cste$$

Dans l'expansion de l'Univers pilotée par  $a(t)$ , le rayonnement se dilue plus vite que la matière noire ! Une ère de domination de la matière noire viendra donc succéder à l'ère radiative. Cette transition correspond dans ce modèle à l'existence d'un fond diffus de photons en équilibre thermodynamique sans interaction que l'on observe bel et bien !

---

1. Il s'agit essentiellement de la composition chimique moyenne de l'Univers, du fait qu'il soit en expansion et de l'existence d'un fond de rayonnement de corps noir (fond diffus cosmologique).

Certaines mesures de distance indépendantes des modèles cosmologiques<sup>2</sup> mettent en évidence une expansion accélérée de l'Univers. Cette observation n'est pas compatible avec un Univers uniquement composé de matière noire et de rayonnement. Comme nous venons de le comprendre un tel univers finit par être dominé par la matière noire telle que  $\rho_{\text{dm}} \times a^3 = \text{cste}$ . En utilisant cette expression dans l'autre équation dynamique (5) dans laquelle on peut prendre  $K = 0^3$ , on trouve

$$\frac{\text{cste}}{a^3} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \implies dt \propto a^{1/2} da \text{ soit } a(t) \propto t^{2/3}$$

L'accélération de l'expansion, proportionnelle à  $\ddot{a}$ , est donc négative : l'univers ne peut pas être en expansion accélérée avec un tel contenu !

De la même façon, on pourrait montrer qu'un univers plat contenant de la radiation est tel que  $a(t) \propto t^{1/2}$  et décélère donc encore plus vite qu'un univers de matière noire.

La technique habituelle pour obtenir cette accélération de l'expansion sans modifier de fond en comble le modèle est assez simple à comprendre. La relativité générale permet d'introduire à moindre frais une constante cosmologique  $\Lambda$  dont les propriétés physiques permettent de l'assimiler à un fluide barotropique d'indice  $\omega_\Lambda = -1$ .

Dans un univers dominé par un tel fluide on constate en utilisant (12) que

$$\rho_\Lambda = \text{cste}$$

La constante cosmologique ne se dilue pas dans l'expansion de l'Univers ! Si on la rajoute dans la composition de la soupe cosmique, idéalement en petite quantité pour ne pas changer les phases initiales de l'évolution, c'est elle qui finira inéluctablement par dominer. La résolution de l'équation dynamique est alors instructive, on trouve en effet dans ce contexte et toujours avec  $K = 0$  que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4\pi G \rho_\Lambda}{3} = H_\Lambda^2 > 0 \text{ soit } a(t) \propto \exp(H_\Lambda t)$$

La constante  $H_\Lambda$  étant positive on obtient bien le régime d'expansion accélérée recherché !

Cette constante cosmologique est un cas particuliers de ce que l'on appelle généralement l'énergie noire (dark energy). Ce type de fluide est caractérisé par un indice barotropique  $\omega_{\text{de}} \in [-1, -\frac{1}{3}[$  permettant d'avoir les bonnes propriétés pour accélérer l'expansion. Les observations les plus récentes permettent de penser que dans le cadre de ce modèle l'univers est composé actuellement d'environ 5% de matière noire baryonique, 25% de matière noire non baryonique et 70% d'énergie noire. Dans ce bilan la seule composante mise en évidence en laboratoire reste pour le moment la matière noire baryonique.

## 2 Les équations de Friedmann en relativité générale

Dans le cadre de la relativité générale, on fait également l'hypothèse que l'univers est homogène est isotrope. Ses propriétés géométriques sont alors celles d'une variété riemannienne de dimension 4 dont l'élément de longueur s'écrit en coordonnées sphériques

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - k^2 r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

---

2. Les chandelles standard utilisées dans ces mesures sont certaines supernova dont on peut prévoir la luminosité intrinsèque.

3. C'est ce qui correspond à un univers plat dans lequel il semblerait que nous nous trouvions.

Cet élément de longueur, dit de Friedmann-Lemaitre, permet d'identifier les composantes non nulles du tenseur métrique

$$g_{00} = c^2, \quad g_{11} = \frac{a^2(t)}{1 - k^2 r^2}, \quad g_{22} = r^2 a^2(t) \quad \text{et} \quad g_{33} = r^2 a^2(t) \sin^2 \theta$$

Ces composantes permettent de calculer celle de la connexion affine

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) g^{\nu\sigma}$$

qui permettent de déterminer celles du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

$$R^\lambda{}_{\nu\mu\kappa} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda - \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\eta\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\eta - \Gamma_{\eta\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\eta$$

Ceci étant fait sans erreur de calcul, on peut calculer successivement les composantes du tenseur de Ricci

$$R^\lambda{}_\mu = g^{\nu\kappa} R^\lambda{}_{\nu\mu\kappa}$$

et le scalaire de courbure

$$R = g^\mu{}_\lambda R^\lambda{}_\mu$$

Le fluide homogène et isotrope de densité  $\rho(t)$  et de pression  $p(t)$  est décrit par un tenseur énergie impulsion

$$T_{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

Les équations d'Einstein (avec la constante cosmologique  $\Lambda$ ) s'écrivent

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Dans un univers homogène et isotrope, elles fournissent les équations de Friedmann

$$\begin{cases} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{4\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{c^2}{3} \Lambda \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{c^2}{3} \Lambda \end{cases} \quad (13)$$

En combinant ces deux équations on peut en obtenir un troisième (qui n'est donc pas indépendante de ces deux-ci)

$$\dot{\rho} = -3 \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a}$$

Cette dernière équation est aussi ce que l'on obtient lorsque l'on écrit la conservation de l'énergie impulsion du fluide cosmologique  $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$  dans ce contexte. Cette équation est également contenue dans les équations d'Einstein. Les équations de Friedmann constituent un système différentiel dont les propriétés sont assez simples à mettre en évidence si l'on fait l'hypothèse d'un fluide barotropique, i.e.  $p(t) = \omega \rho(t)$  avec en relativité générale  $\omega \in [-1, 1]$ .

L'analyse dynamique que l'on peut faire de ces équations est toujours la même car les équations sont exactement celle dont nous avons parlé plus haut... Elles sont ici simplement obtenues correctement.

### 3 L'univers comme un système dynamique

Nous avons obtenu deux équations ((6) et (11)) qui décrivent l'évolution de la masse volumique  $\rho(t)$  et du facteur d'échelle  $a(t)$  dans l'univers homogène et isotrope de paramètre de courbure  $k$  avec une constante cosmologique  $\Lambda$ .

$$\begin{cases} H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \dot{\rho} = -3H(1+\omega)\rho \end{cases}$$

Dans ces équations l'univers est rempli d'un fluide barotropique de pression  $p = \omega c^2 \rho$  où  $\omega = \text{cte}$  représente l'indice barotropique (voir 1.3). On suppose généralement que le fluide barotropique constitutif de l'univers est composé d'un mélange de plusieurs fluides barotropiques qui, dans le modèle standard de la cosmologie, n'interragissent pas. La masse volumique est donc décomposée en la somme des différentes masses volumiques de chacun de ces fluides barotropique à chaque instant  $\rho(t) = \rho_1(t) + \rho_2(t) + \dots$ . On peut alors améliorer l'écriture des équations de Friedmann afin d'étudier l'abondance relative de ces différents fluides à chaque instant.

Mais avant celà, dérivons une troisième équation qui nous sera bien utile.

#### 3.1 Une troisième équation

En dérivant la première équation de Friedmann on obtient

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + \frac{2kc^2\dot{a}}{a^3}$$

en utilisant l'autre équation (conservation de l'énergie) et la définition de  $H = \dot{a}/a$  il vient

$$2H\dot{H} = -8\pi GH(1+\omega)\rho + \frac{2kc^2}{a^2}H \implies \dot{H} = -4\pi G(1+\omega)\rho + \frac{kc^2}{a^2} \text{ si } H \neq 0$$

par ailleurs en dérivant la définition de  $H$  par rapport au temps il vient

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \implies \frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$$

en utilisant une nouvelle fois la première équation de Friedmann on obtient finalement

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(1+3\omega)\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

souvent appelée seconde équation de Friedmann car en relativité générale elle est obtenue en même temps que la première en écrivant directement les équations d'Einstein. L'équation de conservation de l'énergie est en effet une conséquence des équations d'Einstein, l'équation qui en découle est donc une conséquence des deux équations de Friedmann.

Nous avons donc 3 équations dont seulement 2 sont indépendantes :

$$\begin{cases} H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \ddot{a}/a = -4\pi G(1+3\omega)\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \dot{\rho} = -3H(1+\omega)\rho \end{cases}$$

## 3.2 Equations sur les abondances relatives et couplages

Dans le cadre du modèle standard de la cosmologie on considère que le fluide constituant l'univers est formé du mélange de  $N$  composantes chacune étant caractérisée par son indice barotropique

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \text{ avec } p_i(t) = \omega_i c^2 \rho_i(t)$$

ces  $N$  fluides remplissent tout le volume disponible et n'interagissent pas.

En divisant la première équation de Friedmann par  $H^2$  on obtient la somme de plusieurs termes dont le total est égal à 1. Plus précisément :

— On définit la densité relative du fluide de type  $i$  par la relation :

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G \rho_i(t)}{3H^2(t)}. \quad (14)$$

— En relativité générale la constante cosmologique peut-être vue comme une sorte de fluide. Ce fluide possède les mêmes caractéristiques barotropiques que le vide quantique, il est donc associé à une constante barotropique  $\omega_0 = -1$  et l'on peut toujours définir sa densité relative par

$$\Omega_0(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}.$$

Dans cette perspective la densité volumique d'énergie associée à la constante cosmologique est donc

$$\varepsilon_0(t) = \rho_0 c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = cste$$

cela fait bien écho au résultat que nous avons obtenu lors de l'étude dynamique et qui indiquait que la constante cosmologique ne se dilue pas dans l'expansion de l'univers.

— De manière similaire, on peut définir la densité relative de courbure par :

$$\Omega_k(t) = -\frac{kc^2}{H^2 a^2} = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2(t)};$$

La première équation de Friedmann apparaît alors comme ce que l'on appelle souvent une contrainte de normalisation :

$$\forall t, \Omega_k(t) + \sum_{i=0}^n \Omega_i(t) = 1$$

Avec ces notations, à partir de (14) on voit que

$$\dot{\Omega}_i = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\dot{\rho}_i}{H^2} - 2\frac{\rho_i \dot{H}}{H^3} \right) = \frac{8\pi G}{3H^2} \dot{\rho}_i - \frac{2\dot{H}}{H} \Omega_i \quad (15)$$

Dans le modèle standard de la cosmologie, les types de fluides constitutifs de l'univers sont supposés indépendants, sans interaction et occupant tout le volume disponible. La conséquence directe de cette hypothèse est de découpler l'équation de conservation de l'énergie sous la forme

$$\forall i = 0, \dots, n \quad \dot{\rho}_i = -3H(1 + \omega_i) \rho_i \quad (16)$$



Cette relation devra être aménagée en cas de couplage comme nous le verrons plus loin. On remarque que le cas  $i = 0$ , correspondant à la constante cosmologique correspond bien à  $\rho_0 = cste$  car nous avons vu que dans ce cas précis  $\omega_0 = -1$ .

En multipliant cette relation (16) par  $\frac{8\pi G}{3H^2}$  et en récrivant (15) on obtient

$$\frac{\dot{\Omega}_i}{H} = \Omega_i \left[ -3(1 + \omega_i) - 2\frac{\dot{H}}{H^2} \right] \quad (17)$$

Il reste à écrire que

$$-2\frac{\dot{H}}{H^2} = -2\frac{a^2}{\dot{a}^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = -2\frac{a^2}{\dot{a}^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) = 2 - 2\frac{\ddot{a}}{H^2 a}$$

soit en utilisant la seconde équation de Friedmann dans laquelle on explicite la somme des  $\rho_i$  et sachant que  $1 + 3\omega_0 = -2$  on obtient

$$\begin{aligned} -2\frac{\dot{H}}{H^2} &= 2 - \sum_{j=1}^n (1 + 3\omega_j) \frac{8\pi G \rho_j}{H^2} - \frac{2\Lambda c^2}{3H^2} = 2 - \sum_{j=1}^n (1 + 3\omega_j) \Omega_j - \frac{2\Lambda c^2}{3H^2} \\ &= 2 - \sum_{j=0}^n (1 + 3\omega_j) \Omega_j \end{aligned} \quad (18a)$$

On introduit alors une nouvelle variable d'évolution  $t \rightarrow \lambda = \ln a(t)$  appelée nombre de  $e$ -pliages de l'univers (*e-fold number* en anglais, qui correspond au nombre de fois où son facteur d'échelle a été multiplié par le facteur  $e$ ). En notant  $'$  pour la dérivée par rapport à  $\lambda$ , on a

$$\frac{\dot{\Omega}_i}{H} = \frac{a}{\dot{a}} \frac{d\Omega_i}{dt} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\Omega_i}{dt} = \frac{d\Omega_i}{d\lambda} = \Omega_i' \quad (19)$$

En combinant (17), (18a) et (19) et l'on voit apparaître la structure Lotka-Volterra du système dynamique associé à l'univers homogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n \Omega_i = 1 - \Omega_k \\ \text{et pour tout } i = 0, \dots, n : \\ \Omega_i' = \Omega_i \left[ - (1 + 3\omega_i) - \sum_{j=0}^n (1 + 3\omega_j) \Omega_j \right] \end{array} \right.$$

soit un système dynamique de la forme

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in \mathbb{R}^n \\ Y \in \mathbb{R}^n \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \end{array} \right\} X' = X(AX + Y)$$

La matrice  $A$  est appelée matrice d'interaction et le vecteur  $Y$  est la capacité du système. Ces systèmes qui permettent de décrire des populations d'espèces en interaction permettent une vision de l'univers en terme d'une compétition entre les différents fluides pour dominer son taux d'expansion.

Les équilibres de ce genre de système différentiel quadratique sont de 3 types :

— Si  $A$  est inversible : la solution de l'équation  $AX = -Y$  est un équilibre

- L'origine est toujours un équilibre
- Si la matrice est de rang  $p \in [1, n[$  les équilibres ont  $n - p$  composantes nulles et  $p$  composantes non nulles.

On remarquera que le modèle standard de la cosmologie est caractérisé par une matrice  $A$  dont toutes les lignes sont identiques : elle est donc de rang 1. L'équilibre hors de l'origine est donc un vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf une. On montre assez vite que c'est la composante associée à la constante cosmologique qui est non nulle à l'équilibre : ce fluide ne se diluant pas il finit toujours par dominer. Si on considère un modèle sans constante cosmologique, la composante dominante à l'équilibre sera celle caractérisée par l'indice barotropique le plus petit.

On peut changer cette dynamique générale du modèle standard de la cosmologie en introduisant du couplage entre les fluides constitutifs de l'univers.

Ce couplage peut tout changer s'il est quelconque, on peut également introduire un couplage qui préserve la structure de Lotka-Volterra de la dynamique : c'est l'idée des univers jungle pour lesquels la taille du rang de la matrice d'interaction peut devenir plus grande que 1 en fonction des différents couplages introduits entre les espèces. On pourra trouver de nombreux compléments sur cette approche en lisant l'article [2] dans lequel des couplages entre les divers fluides sont introduits dans la continuité du modèle standard.

## Références

- [1] W. H. McCREA, E. A. MILNE, Newtonian Universes and the curvature of space, The Quarterly Journal of Mathematics, Volume os-5, Issue 1, Pages 73-80, 1934
- [2] Perez, J. ; Füzfa, A. ; Carletti, T. ; Mélot, L. ; Guedezounme, L., The Jungle Universe : coupled cosmological models in a Lotka-Volterra framework, General Relativity and Gravitation, Volume 46, article id. 1753 1753, 2014