

Ce qu'il faut savoir sur la gravitation

Jérôme Perez

15 septembre 2020

Ce petit recueil des fondamentaux de la gravitation classique est extrait de mon livre [1] que je vous encourage à consulter !

La première des choses à savoir est d'où vient cette idée d'une force en r^{-2} , pour cela il faut revenir au XVII^e siècle avec Isaac Newton. Le plus simple est de regarder les 5 premières minutes de l'épisode II de la cyberconférence sur le site <https://uma.ensta-paris.fr/conf/expansion/index.php>, tout ceci devrait être enseigné en classe de première...

Une fois connue la forme de l'interaction gravitationnelle, nous pouvons passer aux systèmes étendus qui peuplent l'univers.

1 L'équation de Poisson

Les systèmes que nous étudions en dynamique stellaire possèdent des tailles caractéristiques de l'ordre du parsec ($3,08 \times 10^{16}$ m) pour les amas globulaires et du millier de parsecs pour les galaxies. En négligeant le rôle du gaz interstellaire et sur de telles échelles, la seule des quatre interactions pouvant intervenir dans la dynamique de ces systèmes est évidemment la gravitation.

Nous considérons donc un système $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dont la masse est distribuée selon une certaine densité

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}') & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega \end{cases}$$

La loi de la gravitation de Newton nous indique alors que la force $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ que crée le système en tout point $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ de masse unité, est obtenue en sommant toutes les contributions infinitésimales

$$\delta \mathbf{f}(\mathbf{r}) = G \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \rho(\mathbf{r}') \delta^3 \mathbf{r}' \quad (1)$$

issues de chaque élément de volume $\delta^3 \mathbf{x}'$. Dans l'hypothèse d'une distribution continue de matière nous avons donc

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = G \int \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (2)$$

En introduisant le potentiel gravitationnel

$$\psi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3 \mathbf{r}' \quad (3)$$

et en remarquant que

$$\text{grad}_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}$$

Nous avons donc

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = G \int \text{grad}_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'$$

pour une large classe de densités suffisamment régulières (celles permettant à (2) de converger), la force dérive donc du potentiel (3) et l'on a

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) \quad (4)$$

le système est alors dit conservatif. Plutôt que d'utiliser le champ vectoriel $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, il est préférable de trouver une relation entre champs scalaires. En prenant la divergence de l'équation (2), il vient

$$\text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{f}(\mathbf{r})) = G \int \text{div}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (5)$$

un simple calcul d'analyse vectorielle montre alors que

$$\text{div}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} + \frac{3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^5} \quad (6)$$

soit

$$\text{div}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) = 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$$

ainsi toute contribution à la somme (5) doit provenir du point $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Nous pouvons donc restreindre le volume d'intégration à une sphère de rayon ε centrée sur ce point. Si ρ est continue en \mathbf{r} on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{f}(\mathbf{r})) &= G\rho(\mathbf{r}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \leq \varepsilon} \text{div}_{\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) d^3 \mathbf{r}' \\ &= -G\rho(\mathbf{r}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \leq \varepsilon} \text{div}_{\mathbf{r}'} \left(\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) d^3 \mathbf{r}' \end{aligned}$$

la formule d'Ostrogradski nous donne ainsi

$$\text{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{f}(\mathbf{r})) = -G\rho(\mathbf{r}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \varepsilon} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot d^2 \mathbf{S}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}$$

le vecteur d'intégration est dirigé vers la normale à la surface et de longueur proportionnelle à l'élément de surface (voir figure 1).

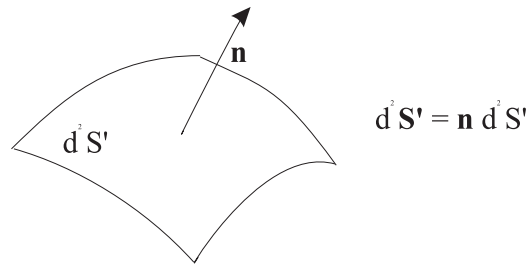


FIGURE 1 – Définition du vecteur élément de surface

Sur la sphère $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \varepsilon$, nous avons $d^2\mathbf{S}' = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \varepsilon d^2\Theta$, où $d^2\Theta$ est l'élément d'angle solide. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{r}}(\mathbf{f}(\mathbf{r})) &= -G\rho(\mathbf{r}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=\varepsilon} \frac{\varepsilon}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^2\Theta \\ &= -G\rho(\mathbf{r}) \int d^2\Theta = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

En considérant l'équation (4), nous obtenons donc l'équation de Poisson

$$\forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi(\mathbf{r})) = \Delta \psi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) \quad (7)$$

La particularité de cette équation est, comme nous l'avons vu, de naître dans une singularité, ce caractère singulier fait qu'elle se prête tout à fait à l'utilisation des distributions. La déduction de l'équation de Poisson devient dès lors aisée. L'équation (3) est en effet une convolution...

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -G \rho(\mathbf{r}, t) * \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad (8)$$

et il n'est pas délicat de se rendre compte que la deuxième fonction de cette convolution est, à une constante près, la fonction de Green du laplacien. Un calcul trivial montre en effet que si u est une fonction test au sens des distributions, alors le produit scalaire

$$\left\langle \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right), u \right\rangle = -4\pi u(0) = \langle -4\pi \delta(\mathbf{r}), u \rangle.$$

Il devient donc évident d'appliquer le laplacien à l'équation (8) qui s'écrit alors

$$\langle \Delta \psi(\mathbf{r}, t), u \rangle = \left\langle -G \Delta \left(\rho(\mathbf{r}, t) * \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right), u \right\rangle$$

soit

$$\langle \Delta \psi(\mathbf{r}, t), u \rangle = \left\langle -G \rho(\mathbf{r}, t) * \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right), u \right\rangle = \langle 4\pi G \rho(\mathbf{r}, t) * \delta(\mathbf{r}), u \rangle$$

le Dirac étant l'élément neutre de l'algèbre de convolution, nous obtenons finalement l'équation de Poisson

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{r}, t)$$

La déduction est donc beaucoup plus directe en utilisant les distributions mais l'investissement de base est plus important...

Cette équation, seule ou couplée avec d'autres, est à la base de nombreux problèmes d'astrophysique théorique.

- Utilisée seule elle nécessite la donnée (théorique ou expérimentale) de la fonction $\rho(\mathbf{r})$. La résolution de l'équation de Poisson fournit alors la force générée par le système en tout point de l'espace, il devient donc formellement possible de connaître les propriétés dynamiques de la trajectoire d'une particule test évoluant dans le champ de gravitation créé par la distribution Ω .
- Dans le cadre d'une théorie fournissant la densité du système, l'équation de Poisson sera alors utilisée comme équation de fermeture du problème.

Nous allons évoquer brièvement ces deux aspects de l'utilisation de l'équation de Poisson en astrophysique.

2 Le système de Vlasov-Poisson

Le nombre de degrés de liberté d'un système physique est égal au nombre de paramètres nécessaires pour fixer la position de l'ensemble des composants de ce système. Par exemple, un système tridimensionnel contraint d'évoluer sur un plan possède deux degrés de liberté.

L'intégration de toutes ces équations permet en principe d'obtenir toutes les données relatives au mouvement du système. Toutefois, si ce dernier comporte un grand nombre de degrés de liberté, la mise en œuvre des méthodes de la mécanique classique conduit à écrire, donc à résoudre, un nombre égal d'équations différentielles, ce qui est pratiquement irréalisable. Notons encore que, même si l'on arrivait à effectuer cette intégration, il serait absolument impossible de substituer dans la solution générale les conditions initiales relatives aux vitesses et aux positions de toutes les particules.

Il semble à première vue que les propriétés d'un système deviennent de plus en plus compliquées au fur et à mesure qu'augmente le nombre de particules qui le compose. Nous savons bien qu'il n'en est rien et que d'autres lois, statistiques celles-ci, prennent le relais pour la description des systèmes dont le nombre de degrés de liberté est très grand, et même, dans une limite continue, tend vers l'infini.

Supposons que le système que nous considérons possède $3N$ degrés de liberté. Cela signifie que les positions des différents points du système sont définies par N vecteurs \mathbf{r}_α comportant chacun 3 composantes, l'indice α prenant toutes les valeurs $1, 2, \dots, N$. A un instant donné, l'état du système sera complètement déterminé par les N vecteurs position et les N vecteurs vitesse $\dot{\mathbf{r}}_\alpha$ correspondants. En lieu et place de la vitesse de chaque particule, il est préférable comme nous l'avons vu en mécanique analytique de travailler avec la véritable grandeur conjuguée de la position, l'impulsion \mathbf{p}_α qui dans le cas gravitationnel est simplement la quantité de mouvement $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \dot{\mathbf{r}}_\alpha$. On peut représenter mathématiquement les différents états d'un système par des points dans un espace à $6N$ dimensions appelé espace des phases. La trajectoire, ou le lieu de ces points, permet de représenter de manière univoque l'évolution du système.

En s'intéressant à un volume infinitésimal $d\Gamma$ de cet espace des phases

$$d\Gamma := d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \cdots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \cdots d\mathbf{p}_N$$

on peut introduire la probabilité $d\Omega$ des états représentés par des points contenus dans ce volume à l'instant t . C'est-à-dire, la probabilité pour qu'à cet instant les positions \mathbf{r}_α et les impulsions \mathbf{p}_α soient comprises dans les intervalles infinitésimaux $[\mathbf{r}_\alpha + d\mathbf{r}_\alpha]$ et $[\mathbf{p}_\alpha + d\mathbf{p}_\alpha]$. Cette probabilité se laisse exprimer par

$$d\Omega = f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) d\Gamma$$

où la quantité $f^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$ est appelée fonction de distribution à N particules du système. Cette fonction est clairement positive et de norme unité

$$1 = \int f^{(N)}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, t) d\mathbf{w}_1 \dots d\mathbf{w}_N$$

elle représente la densité, au sens probabiliste, de la variable aléatoire $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N)$ avec $\mathbf{w}_\alpha = (\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$. Si le nombre de particules est conservé au cours de l'évolution, cette densité obéit à une équation de continuité (exprimant le fait que df est une différentielle totale exacte, ou physiquement que le nombre de particules est conservé)

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{w}}(f^{(N)} \dot{\mathbf{w}}) = 0 \quad (9)$$

où $\dot{\mathbf{w}} = (\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{p}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \dot{\mathbf{p}}_N)$ représente la vitesse du flot des points dans l'espace des phases. En explicitant la divergence de l'équation (9), il vient

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N [\text{div}_{\mathbf{r}_\alpha} (f^{(N)} \dot{\mathbf{r}}_\alpha) + \text{div}_{\mathbf{p}_\alpha} (f^{(N)} \dot{\mathbf{p}}_\alpha)] = 0$$

Après dérivation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \{ \dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_\alpha} (f^{(N)}) + \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}_\alpha} (f^{(N)}) \\ + f^{(N)} [\text{div}_{\mathbf{r}_\alpha} (\dot{\mathbf{r}}_\alpha) + \text{div}_{\mathbf{p}_\alpha} (\dot{\mathbf{p}}_\alpha)] \} \end{aligned}$$

On introduit alors les équations de Hamilton pour chaque particule (qui reviennent ici à écrire le principe fondamental de la dynamique),

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \dot{\mathbf{r}}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{p}}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_\alpha}$$

où H est le hamiltonien du système

$$H = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^N \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_\alpha}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\sum_{\alpha \neq \beta=1}^{N,N} -\frac{G}{2} \frac{m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}}_{\text{énergie potentielle}}$$

on constate alors que

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \text{div}_{\mathbf{r}_\alpha} (\dot{\mathbf{r}}_\alpha) = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{r}_\alpha \partial \mathbf{p}_\alpha} = -\text{div}_{\mathbf{p}_\alpha} (\dot{\mathbf{p}}_\alpha)$$

Ainsi donc l'équation de continuité se met sous la forme

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N [\dot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}_\alpha} (f^{(N)}) + \dot{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}_\alpha} (f^{(N)})] = 0 \quad (10)$$

cette équation est connue sous le nom d'équation de Liouville et correspond donc à l'équation d'évolution du système en terme de la variable $f^{(N)}$. Il faut noter qu'elle a été dérivée par Gibbs en 1884, 2 ans après la mort de Liouville...

Dans notre contexte gravitationnel, la forme du hamiltonien permet de l'explicitier plus avant

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right\} = 0$$

où l'on a posé¹

$$U_1 = \sum_{\beta=2}^N -G \frac{m_1 m_\beta}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_\beta|}, \quad U_2 = -G \frac{m_2 m_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \sum_{\beta=3}^N -G \frac{m_1 m_\beta}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_\beta|}, \quad \text{etc...}$$

1. Attention à l'expression du gradient du potentiel qui ne sélectionne que les termes contenant \mathbf{r}_α

En pratique, lorsque le système devient plus grand qu'une paire, cette équation s'avère inutilisable, et nous devons faire des hypothèses de nature statistique. À partir de la fonction de distribution à N particules $f^{(N)}$, nous pouvons construire une fonction de distribution à une particule (densité marginale),

$$f^{(1)} = f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) = \int \cdots \int f^{(N)} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

En intégrant l'équation de Liouville sur $\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_N$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} \\ - \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\partial U_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} = 0 \end{aligned}$$

les deux sommes d'intégrales se simplifient considérablement en utilisant le fait que la fonction de distribution s'annule sur le bord du système

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad \lim_{\mathbf{w}_\alpha \rightarrow \infty} f^{(N)} = 0$$

ainsi toutes les intégrations sur $\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ s'annulent et

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} &= \int \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \\ &= \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int f^{(N)} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \\ &= \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons mais en vitesse...

$$\sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\partial U_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N \right\} = \int \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N$$

de l'équation de Liouville il ne reste alors plus que

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} - \int \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \cdots d\mathbf{w}_N = 0$$

L'hypothèse raisonnable qu'il convient alors de faire est de supposer les particules (étoiles) indiscernables. Explicitons cette subtilité sur le calcul de l'énergie potentielle

$$\begin{aligned} U_1 = U_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \sum_{\beta=2}^N U_{1\beta} \\ \text{où } U_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta) &:= -\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} \end{aligned}$$

Dans cette somme, l'indiscernabilité des particules fait jouer à toutes le même rôle. On peut donc en choisir une (la particule 1) pour représenter toutes les autres et subir leur action globale, et une autre (la particule 2) pour représenter toutes les particules du système et agir sur la particule 1 de façon globale. Il s'agit de l'hypothèse de champ moyen. Elle est fondamentale. En pratique cela revient à considérer que

$$U_{12} = U_{13} = \dots = U_{1N} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \sum_{\beta=2}^N U_{1\beta} = (N-1) U_{12}$$

ainsi l'intégrale rétive devient

$$\int \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \dots d\mathbf{w}_N = (N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \dots d\mathbf{w}_N$$

La particule 1 est appelée « *particule test* », elle évolue dans le système moyen représenté par la particule 2.

En introduisant la densité marginale à 2 particules

$$f^{(2)} = f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = \int \dots \int f^{(N)} d\mathbf{w}_3 \dots d\mathbf{w}_N$$

et comme U_{12} ne dépend que de \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 , on peut finir l'intégration du terme contenant l'énergie potentielle pour obtenir la version intégrée de Liouville suivante

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbf{r}_1} = (N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \quad (11)$$

Cette équation permet donc de calculer $f^{(1)}$ à partir de $f^{(2)}$, en poursuivant on obtient

$$f^{(1)} \leftrightarrow f^{(2)} \leftrightarrow \dots \leftrightarrow f^{(N)}$$

Cette cascade d'équations est généralement appelée hiérarchie BBGKY des noms de Born, Bogoliubov, Green, Kirkwood et Yvon découvreurs indépendants de 1935 à 1942.

La technique habituelle consiste à stopper la hiérarchie, c'est-à-dire trouver dans quelles conditions

$$\exists p < N, \quad \text{tel que} \quad \forall n > p \quad f^{(n)} = 0$$

Dans ce contexte, l'hypothèse de chaos moléculaire de Boltzmann est assez opérationnelle, elle revient à poser

$$f^{(2)}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t) = f^{(1)}(\mathbf{w}_1, t) f^{(1)}(\mathbf{w}_2, t) + g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)$$

la fonction $g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, t)$ décrivant les corrélations ou interactions binaires.

Les particules étant indiscernables, il convient de poser

$$f(\mathbf{w}, t) = N f^{(1)}(\mathbf{w}, t) \quad \text{ainsi} \quad \int f(\mathbf{w}, t) d\mathbf{w} = N$$

Sous toutes ces hypothèses, la version intégrée (11) de l'équation de Liouville s'écrit donc

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_1} \right) = (N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial \left(\frac{f(\mathbf{w}_1, t)}{N} \frac{f(\mathbf{w}_2, t)}{N} + g \right)}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{(N-1)}{N} \frac{\partial f(\mathbf{w}_1, t)}{\partial \mathbf{p}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \int U_{12} f(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{w}_2 \\ &+ N(N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}_1} d\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

un petit rappel s'impose alors

$$\int U_{12} f(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{w}_2 = -Gm_1 m_2 \int \frac{f(\mathbf{w}_2, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$$

dans le second membre de cette relation, l'intégration sur les impulsions nous fait reconnaître la densité de masse

$$\rho(\mathbf{r}_2, t) = m_2 \int f(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{p}$$

Nous avons donc

$$\int U_{12} f(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{w}_2 = -Gm_1 \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2, t)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_2$$

où l'on voit sourdre le potentiel gravitationnel impliqué dans l'équation de Poisson :

$$\int U_{12} f(\mathbf{w}_2, t) d\mathbf{w}_2 = m_1 \psi(\mathbf{r}_1, t)$$

en prenant $N-1 \approx N$, et en laissant tomber l'indice 1 on obtient finalement

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = N^2 G C(\mathbf{w}, t) \quad (12)$$

où l'on a introduit le terme de corrélation

$$C(\mathbf{w}, t) = \int \frac{\partial g(\mathbf{w}, \mathbf{w}_2, t)}{\partial \mathbf{p}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} d\mathbf{w}_2$$

L'équation (12) est appelée équation de Boltzmann.

Dans le cas des systèmes gravitationnels, et contrairement au gaz de Van Der Waals, les collisions sont dynamiquement inefficaces pendant de longues périodes, Chandrasekhar montre que pour un système autogravitant composé de N particules, le temps dynamique T_d et le temps de relaxation par collisions T_{rc} vérifient (voir ??)

$$T_{rc} \approx N \ln(N) T_d$$

Sur une centaine de temps dynamiques, les amas globulaires et galaxies en tous genres sont dits non collisionnels, i.e. $C(\mathbf{w}, t) \equiv 0$, et l'équation de la dynamique des galaxies est l'équation de Vlasov (Boltzmann sans collisions)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

dans cette équation le potentiel ψ est lui-même relié à la fonction de distribution f via l'équation de Poisson, nous avons donc le système intégro-différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = 0 \\ \psi(\mathbf{r}, t) = -Gm \int \frac{f(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{p}' \end{cases}$$

dit système de Vlasov-Poisson, en introduisant l'énergie moyenne par particule

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m\psi$$

ce système s'écrit sous forme canonique

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \{E, f\} & \text{Vlasov : dynamique} \\ \Delta\psi = 4\pi G\rho & \text{Poisson : champ moyen} \end{cases}$$

Ce système est à la base de l'étude de la dynamique des galaxies. Nous proposons deux axes principaux d'études pour ce problème :

- L'étude des solutions stationnaires du système de Vlasov-Poisson qui devrait nous permettre de rendre compte des diverses propriétés des galaxies lorsqu'elles peuvent être considérées en équilibre.
- L'étude de la stabilité des solutions stationnaires du système de Vlasov-Poisson afin de connaître les configurations d'équilibre privilégiées pour une galaxie.

3 Moments de l'équation de Vlasov

Les moments de l'équation de Vlasov sont des équations que l'on obtient en intégrant sur une partie Ω de l'espace des phases du système, le produit de l'équation de Vlasov par une quantité physique donnée. Cette dernière peut être scalaire ou vectorielle, en la notant Q on obtient formellement

$$0 = \int_{\Omega} Q \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

Lorsque l'intégration se fait sur les impulsions et que l'on détermine les moments d'une fonction de l'impulsion, on obtient des équations dites fluides, qui, en dynamique des galaxies, s'appellent les équations de Jeans.

3.1 Les équations de Jeans

Nous considérons un système de particules décrit dans l'espace par sa fonction de distribution. Le système est supposé non-collisionnel et évolue dans un potentiel de champ moyen ψ , la fonction de distribution vérifie donc l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \text{grad}_{\mathbf{r}} f - m \text{grad}_{\mathbf{r}} \psi \cdot \text{grad}_{\mathbf{p}} f = 0$$

Les équations de Jeans sont en fait les équations de l'hydrodynamique en présence d'un champ moyen, pour les obtenir, il suffit de calculer les premiers moments de la distribution de vitesse dans le fluide considéré.

Une intégration de l'équation de Vlasov sur l'espace des impulsions donne (en explicitant les produits scalaires, et sous l'hypothèse $p_i = m\dot{r}_i = mv_i$)

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\mathbf{p} + \sum_{i=1}^3 \left(\int \frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial r_i} d^3\mathbf{p} - m \int \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3\mathbf{p} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{p} + \sum_{i=1}^3 \int \frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial r_i} d^3 \mathbf{p} - m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \int \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3 \mathbf{p} = 0$$

le système est ici supposé isolé et fini, la dernière intégrale de cette dernière équation est donc nulle, de plus, comme p_i ne dépend pas des positions x_i nous avons

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \mathbf{p} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} \int \frac{p_i}{m} f d^3 \mathbf{p} = 0$$

On introduit alors les quantités

$$\nu(\mathbf{r}, t) = \int f d^3 \mathbf{p} = \frac{1}{m} \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\nu} \int \mathbf{p} f d^3 \mathbf{p} \\ \text{ou} \\ \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) := \bar{\dot{\mathbf{r}}} = \frac{1}{\nu} \int \dot{\mathbf{r}} f d^3 \mathbf{p} = \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m} \end{cases}$$

respectivement appelées densité et composante i de l'impulsion moyenne, pour obtenir

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \bar{p}_i) = 0$$

où l'on reconnaît l'opérateur divergence et l'équation de continuité du fluide

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \text{div}(\nu \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (13)$$

Cette équation traduit la conservation de la masse du fluide. Il s'agit, dans le contexte de la gravitation, de la première équation de Jeans.

La première équation de Jeans a été obtenue par intégration directe de l'équation de Vlasov sur l'espace des vitesses; pour obtenir la seconde, multiplions Vlasov par p_j et intégrons sur les impulsions, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_j f d^3 \mathbf{p} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \int p_j p_i \frac{\partial f}{\partial r_i} d^3 \mathbf{p} - m \sum_{i=1}^3 \int p_j \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3 \mathbf{p} = 0 \quad (14)$$

on introduit alors le tenseur de température cinétique moyenne

$$\overline{p_i p_j} = \frac{1}{\nu} \int p_i p_j f d^3 \mathbf{p}$$

l'équation (14) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{p}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \overline{p_i p_j}) - m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \int p_j \frac{\partial f}{\partial p_i} d^3 \mathbf{p} = 0$$

une intégration par parties du dernier morceau du membre de gauche donne alors

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{p}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \overline{p_i p_j}) + m \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \delta_{ij} \nu = 0$$

et nous obtenons finalement

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{p}_j) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \bar{p}_i \bar{p}_j) + m\nu \frac{\partial \psi}{\partial r_j} = 0 \quad (15)$$

cette relation est connue sous le nom de deuxième équation de Jeans, elle permet, couplée à l'équation de continuité, de retrouver l'équation d'Euler de l'hydrodynamique. En effet, si l'on retranche à (15) l'équation de continuité multipliée par \bar{p}_j il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nu \bar{p}_j) - \bar{p}_j \frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \bar{p}_i \bar{p}_j) - \bar{p}_j \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \bar{p}_i) \right] = -m\nu \frac{\partial \psi}{\partial r_j}$$

c'est-à-dire

$$\nu \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \bar{p}_i \bar{p}_j) - \bar{p}_j \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \bar{p}_i) \right] = -m\nu \frac{\partial \psi}{\partial r_j}$$

on introduit alors la quantité

$$\sigma_{ij}^2 := \overline{(p_i - \bar{p}_i)(p_j - \bar{p}_j)} = \bar{p}_i \bar{p}_j - \bar{p}_i \bar{p}_j$$

et l'on obtient

$$\nu \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \sigma_{ij}^2) + \nu \bar{p}_i \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial r_i} \right] = -m\nu \frac{\partial \psi}{\partial r_j} \quad (16)$$

que l'on écrit plus couramment sous la forme (si $\nu \neq 0$)

$$\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial t} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \bar{p}_i \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial r_i} = -\frac{1}{m\nu} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} (\nu \sigma_{ij}^2) - m \frac{\partial \psi}{\partial r_j} \quad (17)$$

cette relation constitue la troisième équation de Jeans. Elle s'écrit de façon vectorielle et en vitesses

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\nu} \text{grad} \mathbf{P} - \text{grad} \psi \quad (18)$$

où $\bar{\mathbf{v}}$ représente le champ de vitesse moyenne dans le système, et à condition de prendre pour tenseur de pression

$$\mathbf{P}_{ij} = \frac{\nu}{m^2} \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{m^2} \left(\int p_i p_j f d^3 \mathbf{p} - \int p_i f d^3 \mathbf{p} \int p_j f d^3 \mathbf{p} \right)$$

Les trois équations de Jeans décrivent donc les propriétés hydrodynamiques d'un fluide autogravitant, en incluant l'équation de Poisson, les équations de la gravito-hydrodynamique sont donc

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \nu}{\partial t} + \text{div} (\nu \bar{\mathbf{v}}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\nu} \text{grad} \mathbf{P} - \text{grad} \psi \\ \Delta \psi = 4\pi G m \nu \end{array} \right]$$

Ces équations permettent donc d'avoir accès à des informations de type hydrodynamique concernant le système autogravitant étudié. Par exemple, connaissant $\overline{p_i p_j}$, $\overline{p_i}$ et $\overline{p_j}$, on peut former le tenseur variance covariance cinétique $\sigma_{ij}^2 = \overline{p_i p_j} - \overline{p_i} \overline{p_j} = \overline{(p_i - \overline{p_i})(p_j - \overline{p_j})}$. Ce tenseur est manifestement symétrique, en chaque point \mathbf{r} on peut toujours trouver une base $\{\mathbf{e}_1(\mathbf{r}), \mathbf{e}_2(\mathbf{r}), \mathbf{e}_3(\mathbf{r})\}$ dans laquelle il sera diagonal, i.e. $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ii}^2 \delta_{ij}$. L'ellipsoïde ayant pour demi-grands axes σ_{11}^2 , σ_{22}^2 et σ_{33}^2 et pour axes principaux \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 est appelé ellipsoïde des vitesses en \mathbf{r} . Ce dernier est potentiellement observable.

Les trois équations de Jeans décrivent donc les propriétés hydrodynamiques d'un fluide autogravitant, associées à l'équation de Poisson, elles forment donc les quatre équations fondamentales de ce qu'il est convenu d'appeler la gravito-hydrodynamique.

3.2 Le théorème du viriel

Le théorème du viriel est fondamental en astrophysique. Les deux formulations de ce théorème sont utilisées dans de nombreux raisonnements, il est donc très important d'étudier ses hypothèses et ses conclusions afin de maintenir notre vigilance éveillée lors de sa pratique.

3.2.1 Le théorème du viriel en mécanique classique

Considérons un système de N particules de masses m_i sans liaisons internes et défini par un ensemble de positions instantanées $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$. L'énergie cinétique d'un tel système

$$T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

est une fonction homogène de degré 2, en effet pour tout réel λ , on a

$$T(\lambda \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \lambda \dot{\mathbf{r}}_N) = \lambda^2 T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$$

le théorème d'Euler des fonctions homogènes nous dit alors

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \text{grad}_{\dot{\mathbf{r}}_i} T = 2T \quad (19)$$

Si l'on fait l'hypothèse que l'énergie potentielle U de notre système ne dépend que des coordonnées généralisées, $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, le lagrangien du système $\mathcal{L} = T - U$ ne dépend des vitesses généralisées qu'à travers l'énergie cinétique. Les moments conjugués (impulsions) sont donc tels que pour tout $1 \leq i \leq N$ (cf. première équation de Hamilton)

$$\mathbf{p}_i := \text{grad}_{\dot{\mathbf{r}}_i} \mathcal{L} = \text{grad}_{\dot{\mathbf{r}}_i} T$$

la relation (19) s'écrit donc

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{p}_i = 2T \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{p}_i \right) - \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i = 2T \quad (20)$$

Soit une fonction φ dépendant du temps t ; lorsqu'elle existe, on définit sa valeur moyenne temporelle $\overline{\varphi}$ par la relation

$$\overline{\varphi} := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varphi dt$$

la valeur moyenne temporelle de l'énergie cinétique de notre système se calcule donc en utilisant la relation (20) et donne

$$2\bar{T} = \overline{\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \mathbf{p}_i \right)} - \overline{\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i}$$

si les vitesses et les impulsions de notre système sont bornées (ce qui semble raisonnable) la valeur moyenne temporelle du terme dérivé est nulle et ne subsiste plus que

$$2\bar{T} = -\overline{\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i \mathbf{r}_i} \quad (21)$$

Toujours dans notre cadre d'une énergie potentielle ne dépendant que des coordonnées généralisées, le principe fondamental de la dynamique (ou deuxième équation de Hamilton) donne alors

$$\dot{\mathbf{p}}_i = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U$$

la relation (21) s'écrit donc

$$2\bar{T} = \overline{\sum_{i=1}^{3N} \mathbf{r}_i \text{grad}_{\mathbf{r}_i} U}$$

Si le potentiel U est une fonction homogène de degré α des coordonnées généralisées nous avons donc, toujours en utilisant le théorème d'Euler,

$$2\bar{T} = \alpha \bar{U}$$

relation qui constitue le théorème du viriel et qui donne donc pour un système mécanique une relation entre les valeurs moyennes temporelles des énergies cinétique et potentielle.

Dans le cadre d'un système purement gravitationnel, nous avons

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\sum_{i \neq j}^{N,N} \frac{Gm_i m_j}{2|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

il est ainsi facile de remarquer que pour tout réel α

$$U(\alpha \mathbf{r}_1, \dots, \alpha \mathbf{r}_N) = -\sum_{i \neq j}^{N,N} \frac{Gm_i m_j}{2\alpha |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \alpha^{-1} U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$$

l'énergie potentielle de gravitation est donc une fonction homogène de degré -1 des coordonnées.

Dans le cadre d'un système gravitationnel, le théorème du viriel classique s'écrit donc

$$2\bar{T} + \bar{U} = 0 \quad (22)$$

3.2.2 Le théorème du viriel cinétique

Le viriel d'un système de N particules repérées par les positions $\mathbf{r}_{\alpha=1, \dots, N}$ et les impulsions $\mathbf{p}_{\alpha=1, \dots, N}$ est la quantité définie par le produit scalaire

$$\vartheta = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\alpha$$

Dans la théorie de champ moyen gravitationnelle étudiée ici le moment du viriel va s'écrire à partir du viriel de la particule test $\vartheta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$, on a donc

$$0 = \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right] d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (23)$$

Détaillons le calcul des trois termes intervenant dans cette intégrale.

Inertie Les équations de Hamilton indiquent que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = 0$$

on peut donc écrire que

$$I = \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

dans le cas gravitationnel, l'impulsion est simplement la quantité de mouvement, ainsi

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{r} \cdot m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot f d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \cdot f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

et comme l'équation de Vlasov indique que $\frac{df}{dt} = 0$, on peut donc « sortir » la dérivée temporelle de l'intégrale pour obtenir

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{dt} \int \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cdot f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

Il est clair que la quantité

$$\mathcal{I} = \int \frac{m}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \cdot f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

est la trace du tenseur d'inertie

$$\mathbf{I}_{jk} = \int \frac{1}{2} m r_j \cdot r_k f d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \text{Tr}(\mathbf{I}_{jk})$$

on a donc finalement

$$I = \int \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{r} d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d \text{Tr}(\mathbf{I}_{jk})}{dt} \right]$$

Énergie cinétique Posons

$$2K = \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

une intégration par parties dans l'espace des positions donne

$$2K = \left[\frac{(p_x + p_y + p_z)}{m} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) f \right]_{\Omega_{\mathbf{r}}} - \int \frac{\mathbf{p}^2}{m} f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

La notation $\Omega_{\mathbf{r}}$ représente le bord du système dans l'espace des positions, il est clair que f s'annule sur ce bord. En introduisant le tenseur cinétique

$$\mathbf{K}_{jk} = \int \frac{p_j \cdot p_k}{2m} f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

on remarque donc immédiatement que

$$2K = \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} d\mathbf{p} = -2\text{Tr}(\mathbf{K}_{jk})$$

La quantité

$$\mathcal{K} = \text{Tr}(\mathbf{K}_{jk}) = \int \frac{\mathbf{p}^2}{2m} f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

est évidemment l'énergie cinétique totale contenue dans le système.

Énergie potentielle Posons

$$W = -m \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

une intégration par parties dans l'espace des impulsions donne

$$W = \left[-m (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) f \right]_{\Omega_{\mathbf{p}}} + m \int \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

le terme de surface est encore une fois nul car f s'annule aussi sur le bord $\Omega_{\mathbf{p}}$ du système dans l'espace des impulsions, en faisant apparaître la densité du système

$$\rho(\mathbf{r}) = m \int f d\mathbf{p}$$

il vient

$$W = \int \mathbf{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \rho d\mathbf{r}$$

en introduisant le tenseur potentiel

$$\mathbf{U}_{jk} = - \int r_j \frac{\partial \psi}{\partial r_k} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

on trouve à présent que

$$W = -\text{tr}(\mathbf{U}_{jk})$$

La trace du tenseur potentiel est l'énergie potentielle contenue dans le système. Quelques lignes suffisent à s'en convaincre... En effet, par définition

$$\psi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r_k} = +G \int \frac{r_k - r'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

le tenseur potentiel s'écrit donc

$$\mathbf{U}_{jk} = -G \int \int r_j \frac{r_k - r'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \quad (24)$$

en intervertissant les variables d'intégration il vient

$$\mathbf{U}_{jk} = -G \int \int r'_j \frac{r'_k - r_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \quad (25)$$

en additionnant les relations (24) et (25) on trouve alors

$$\mathbf{U}_{jk} = -\frac{G}{2} \int \int (r_j - r'_j) (r_k - r'_k) \frac{\rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}$$

en prenant la trace de cette expression on voit miraculeusement apparaître un terme $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ qui se simplifie avec une partie du dénominateur pour ne laisser plus que

$$\text{tr}(\mathbf{U}_{jk}) = -\frac{G}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}$$

en réutilisant à l'envers l'expression du potentiel on trouve alors que

$$\mathcal{U} = \text{tr}(\mathbf{U}_{jk}) = \frac{1}{2} \int \psi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int m\psi(\mathbf{r}) f d\mathbf{r} d\mathbf{p}$$

La quantité $u = m\psi(\mathbf{r})$ est bien l'énergie potentielle de la particule test, le facteur 1/2 intervient comme d'habitude dans ce genre d'expression pour ne pas compter deux fois la même chose... La quantité \mathcal{U} est donc bien ce que l'on prétendait qu'elle était : l'énergie potentielle totale contenue dans le système.

Le théorème En regroupant les trois calculs précédents dans la relation (23), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d\text{Tr}(\mathbf{I}_{jk})}{dt} \right] = \text{Tr}(2\mathbf{K}_{jk} + \mathbf{U}_{jk})$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d\mathcal{I}}{dt} \right] = 2\mathcal{K} + \mathcal{U}$$

où \mathcal{I} est le moment d'inertie total du système, \mathcal{K} et \mathcal{U} les énergies cinétique et potentielle totales contenue dans le système. Si le système est dans un état d'équilibre, ce dernier peut être caractérisé par le fait que son moment d'inertie est stationnaire, on a donc pour cet état

$$2\mathcal{K} + \mathcal{U} = 0$$

Il s'agit du théorème du viriel cinétique. La différence avec son équivalent classique est simplement le fait que les moyennes ne sont pas réalisées sur les mêmes ensembles : \mathcal{K} et \mathcal{U} sont des moyennes statistiques des énergies cinétique et potentielle totales, alors que \overline{K} et \overline{U} apparaissant dans le théorème du viriel classique (voir 22) étaient des moyennes temporelles des mêmes quantités. On voit donc dans ces deux théorèmes classique et cinétique, une concrétisation du théorème ergodique.

Une dernière remarque avant d'aller dormir : le fait que le second membre soit nul dans le théorème du viriel classique ou cinétique est une particularité des systèmes isolés ou non bornés. Si l'on considère un système possédant un bord sur lequel la fonction de distribution n'est pas nulle, les différents termes de surface dans les différentes intégrations par parties effectuées pour obtenir le théorème vont rester dans un second membre qui peut s'avérer compliqué... On pourra vérifier à titre d'exemple que pour un système sphérique défini sur une boule de rayon R , le théorème du viriel s'écrira

$$2\mathcal{K} + \mathcal{U} = 4\pi R^3 P_e(R)$$

où $P_e(R)$ est la pression sur la surface de la sphère considérée.

4 L'instabilité de Jeans

Cette instabilité est un mécanisme fondamental en astrophysique. Il convient de connaître tous les éléments qui la constitue, que ce soit sur le plan physique ou mathématique. Elle est invoquée dans le contexte d'un système homogène (dans l'espace des positions) et repose comme nous allons le voir sur de nombreuses hypothèses. Nous traiterons le cas linéaire et sphérique, de nombreuses autres géométries sont abordées de façon plus ou moins heureuse (voir [?]). Le cas non linéaire est l'affaire des mathématiciens...

Dans un but pédagogique nous traiterons les 3 cas gigognes de cette théorie linéaire : le cas simpliste issu du théorème du viriel, le cas fluide classiquement évoqué qui nous permettra d'accéder à la stabilité et finalement le cas le plus complet de la théorie cinétique qui correspond à ce que l'on appelle généralement la théorie de l'amortissement de Landau que nous ne traiterons que dans un cas simplifié.

4.1 Première approche

On considère un système autogravitant à l'équilibre. Nous supposons qu'il est sphérique de rayon R , isotherme à la température θ , qu'il est constitué de N éléments de masse μ , on notera $M = N\mu$ sa masse totale. Son énergie cinétique totale T et son énergie potentielle totale W vérifient le théorème du viriel

$$2T + W = 0$$

Le système est assimilé à un gaz parfait, on écrit donc

$$T = \frac{3}{2}Nk\theta$$

pour l'énergie potentielle, on ne s'embête pas et l'on propose

$$W = -\frac{GM^2}{R} = -\frac{GMN\mu}{R}.$$

Le théorème du viriel donne alors

$$3k\theta = \frac{GM\mu}{R} \Rightarrow R = \frac{GM\mu}{3k\theta} \quad (26)$$

Le fait que l'on soit à l'équilibre fixe donc pour une masse et une température données, la taille du système. Cette taille caractéristique s'exprime généralement en fonction d'autres paramètres comme la vitesse du son dans le gaz (fluide) constituant le système et sa densité.

La vitesse du son c_s dans un fluide de pression scalaire P et de densité volumique de masse ρ est définie par la relation

$$\nabla P = c_s^2 \nabla \rho$$

dans le cas de notre fluide parfait de volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$ l'équation d'état s'écrit

$$P = \frac{Nk\theta}{\mathcal{V}} = \frac{Mk\theta}{\mu\mathcal{V}} = \frac{k\theta}{\mu}\rho$$

pour ce système isotherme et uniforme on a donc

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \frac{k\theta}{\mu}$$

soit

$$k\theta = \mu c_s^2$$

ainsi en écrivant que

$$M = \rho \mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

le rayon caractéristique du viriel s'écrit

$$R = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

le facteur $3/2\sqrt{\pi}$ ne doit pas être pris au pied de la lettre, un système non sphérique ou une autre évaluation de l'énergie potentielle pourrait faire apparaître une autre constante. On retiendra l'expression de la longueur de Jeans

$$\ell_j = \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

qui est donc une bonne approximation de la taille caractéristique d'un système autogravitant à l'équilibre. Que se passe-t-il si la taille de ce système est modifiée en gardant ses autres caractéristiques constantes?

Il faut entreprendre une analyse de stabilité dynamique!

4.2 Le cas fluide

Un système autogravitant non collisionnel est décrit par le système de Vlasov-Poisson, il s'agit de sa description cinétique. Comme nous l'avons vu au chapitre ?? (équations (13) et (18) avec bien sûr $\rho = m\nu$), les premiers moments² de cette description permettent d'écrire la description fluide d'un tel système dont les deux équations fondamentales sont

$$\left[\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \right] = -\nabla \cdot \mathbf{P} - \rho \nabla \phi \quad (27a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (27b)$$

Le fluide est décrit par un tenseur de pression $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, un champ vectoriel de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ et deux champs scalaires de densité volumique de masse $\rho(\mathbf{r}, t)$ et de potentiel gravitationnel $\psi(\mathbf{r}, t)$. L'équation de continuité (27b) affirme la conservation de la masse et la continuité des divers champs, l'équation d'Euler (27a) affirme la conservation de la quantité de mouvement totale dans le fluide.

Si l'on fait apparaître une vitesse du son c_s supposée constante partout dans le fluide, les champs de pression et de densité sont alors reliés par l'équation

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = c_s^2 \nabla \rho$$

On peut alors étudier la stabilité d'un équilibre décrit par des champs constants et stationnaires $\mathbf{v}_{eq} = \mathbf{v}_o$, $\rho_{eq} = \rho_o$ et $\psi_{eq} = \psi_o$. Pour cela, on développe les divers champs du fluide au voisinage de l'équilibre

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_o + \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) \\ \rho(\mathbf{r}, t) = \rho_o + \varepsilon \rho_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_o + \varepsilon \psi_1(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad \text{avec } |\varepsilon| \ll 1$$

2. Au sens statistique du terme...

On injecte ces relations dans les deux équations fondamentales et l'on ne conserve que les termes d'ordre ε , en négligeant les suivants, il vient

$$\begin{cases} \rho_o \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_o \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right] = -c_s^2 \nabla \rho_1 - \rho_o \nabla \psi_1 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_o \cdot \nabla \rho_1 = -\rho_o \nabla \cdot \mathbf{v}_1 \end{cases}$$

Nous n'avons toujours pas précisé le référentiel galiléen d'usage, on le choisit donc tel que $\mathbf{v}_o = 0$, ainsi il ne reste plus que

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_o} \nabla \rho_1 - \nabla \psi_1 \\ \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v}_1 \end{cases}$$

On dérive alors la seconde équation par rapport au temps et l'on prend la divergence de la première : le terme $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}_1)$ est alors présent dans les deux équations, on peut l'éliminer. Il vient

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + \rho_o \Delta \psi_1 \quad (28)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel s'écrit

$$\Delta \psi = 4\pi G \rho$$

au voisinage de l'équilibre uniforme et stationnaire on a donc

$$\Delta \psi_1 = 4\pi G \rho_1$$

l'équation (28) devient donc

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_o \rho_1$$

Il ne reste plus qu'à décomposer ρ_1 sur une base de modes normaux

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \rho_{1,\alpha} \exp[i(\mathbf{k}_{\alpha} \cdot \mathbf{r} + \omega_{\alpha} t)]$$

et l'on obtient une relation de dispersion pour chaque mode α

$$\omega_{\alpha}^2 = c_s^2 (k_{\alpha}^2 - k_j^2) \quad \text{avec } k_j^2 := \frac{4\pi G \rho_o}{c_s^2} \quad \text{et } k_{\alpha} = |\mathbf{k}_{\alpha}|$$

On remarque immédiatement que :

- si $k_{\alpha} > k_j$ alors $\omega_{\alpha}^2 > 0$, la pulsation du mode α est réelle il s'agit donc d'un mode oscillant.
- si $k_{\alpha} < k_j$ alors $\omega_{\alpha}^2 < 0$, la pulsation du mode α est imaginaire pure : $\omega_{\alpha} = \pm i\Omega_{\alpha}$ avec $\Omega_{\alpha} \in \mathbb{R}$.
Le mode α est donc instable (il possède une partie exponentiellement croissante).

Si l'on introduit la longueur d'onde λ_{α} associée au nombre d'onde k_{α} par la relation

$$k_{\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda_{\alpha}}$$

la condition de stabilité du mode α s'écrit

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\alpha}} > k_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\alpha} < \lambda_j \quad \text{avec } \lambda_j := \frac{2\pi}{k_j} = \sqrt{\pi} \frac{c_s}{\sqrt{G\rho_o}}$$

Si un mode est associé à une longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde de Jeans λ_j du système, il le déstabilisera.

Références

- [1] Jérôme Perez, Gravitation classique : Problème à N corps, de 2 à l'infini..., Seconde Edition, les Presses de l'ENSTA, 2011