Espacetemps

et

Gravitation

Gravitation

Gravitation

- Isaac Newton (fin XVII$^{\grave{e}me}$) : *La gravitation est une force mystérieuse*,

Gravitation

- Isaac Newton (fin XVII^{ème}) : *La gravitation est une force mystérieuse*,
- Lagrange aurait pu voir l'aspect géométrique,

Gravitation

- Isaac Newton (fin XVII^{ème}) : *La gravitation est une force mystérieuse*,

- Lagrange aurait pu voir l'aspect géométrique,

- Albert Einstein, 1915 : Théorie de la relativité générale,
  $\Rightarrow$ Principe d'équivalence

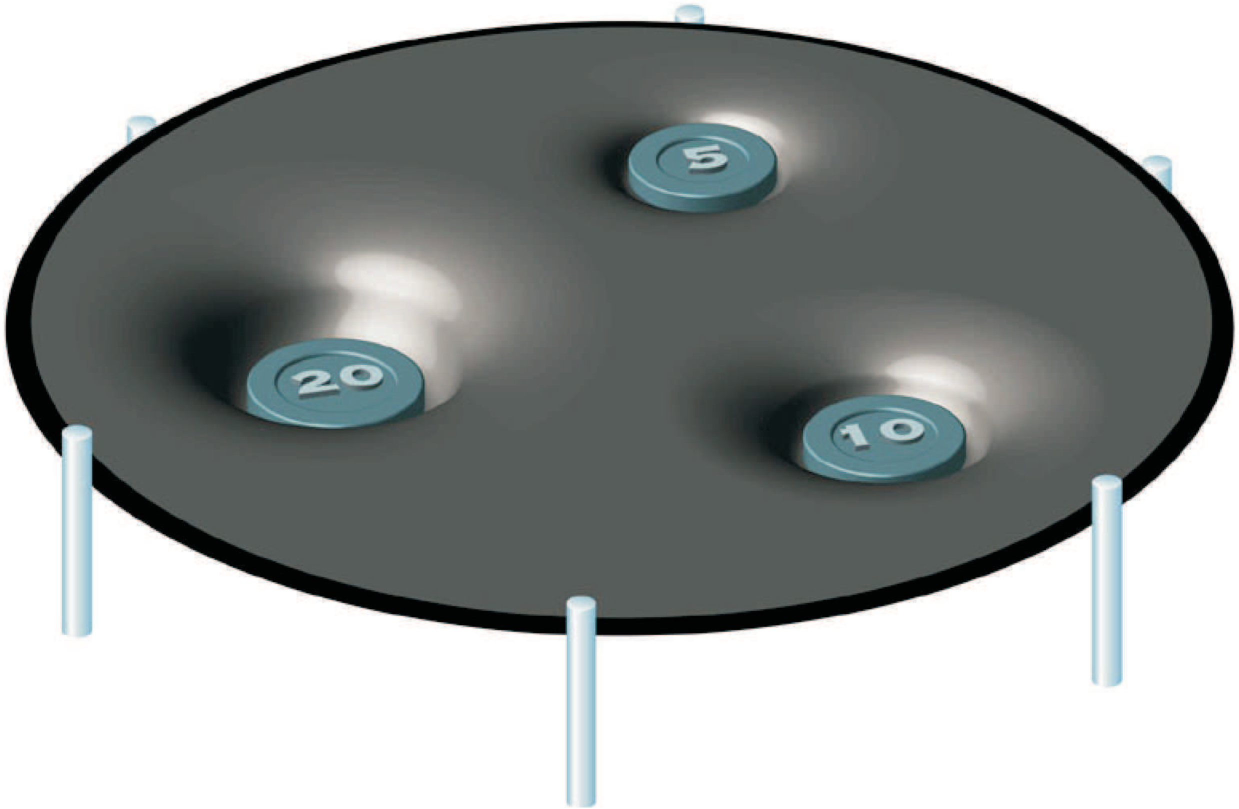
  $\Rightarrow$ Espacetemps = combinaison $4D$ de l'espace et du temps qui permet de décrire l'Univers et ses composants;

  $\Rightarrow$ Matière et énergie façonnent l'espacetemps;

  $\Rightarrow$ L'espacetemps peut lui-même être courbé;

  $\Rightarrow$ Mouvements géodésiques

La matière déforme l’espacetemps

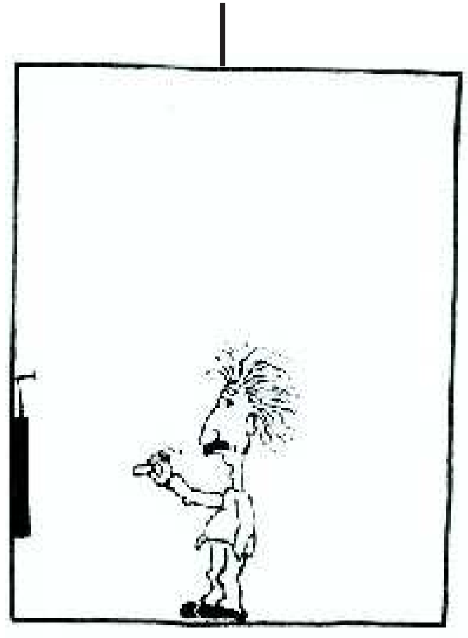


plus il y a de masse plus celui-ci est déformé

Le principe d’équivalence

Le principe d'équivalence

Albert est dans
une cabine d'ascenseur
au repos



Il peut mettre
en évidence
un champ gravitationnel

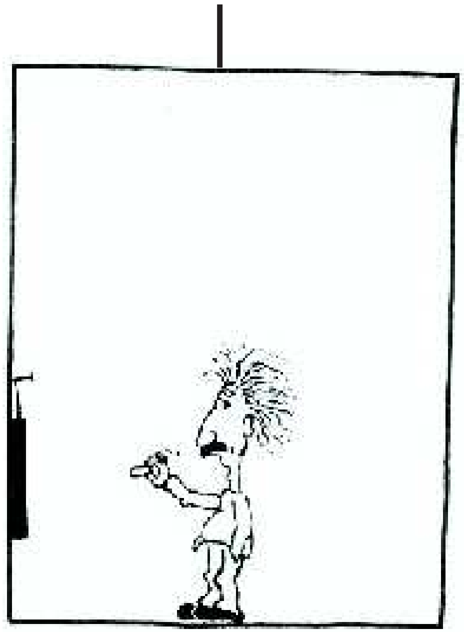
Le principe d’équivalence

Albert est dans
une cabine d’ascenseur
au repos

Il peut mettre
en évidence
un champ gravitationnel

Le démon de Maxwell coupe le cable ...

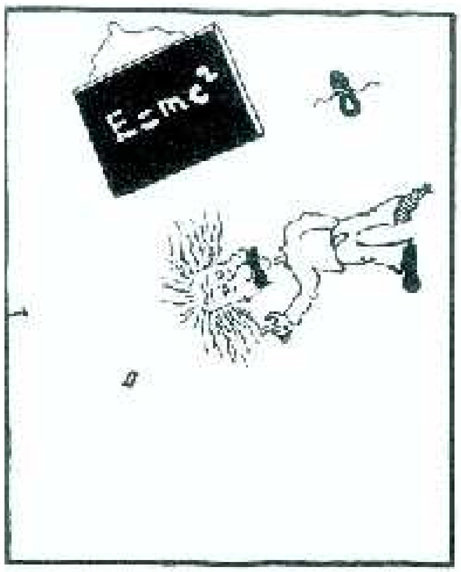
Le principe d’équivalence



Albert est dans
une cabine d’ascenseur
au repos

Il peut mettre
en évidence
un champ gravitationnel

Le démon de Maxwell coupe le cable ...



Aucune expérience ne permet
plus de savoir qu’il est
toujours dans
un champ gravitationnel

$$m_i\mathbf{a} = m_g\mathbf{g}$$

Le principe d'équivalence

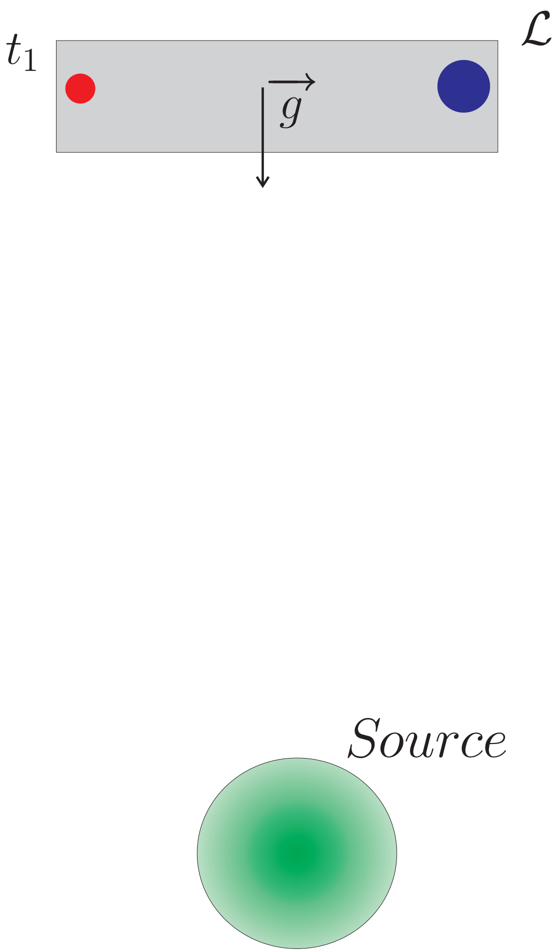
Tout ceci n'est que local ...

Si l'ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !

Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

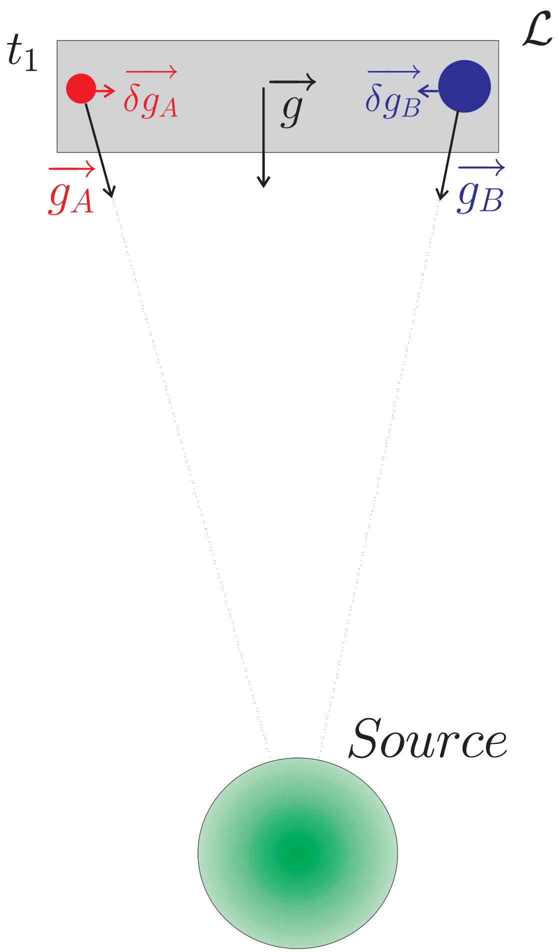
Si l'ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !



Le principe d’équivalence

Tout ceci n’est que local ...

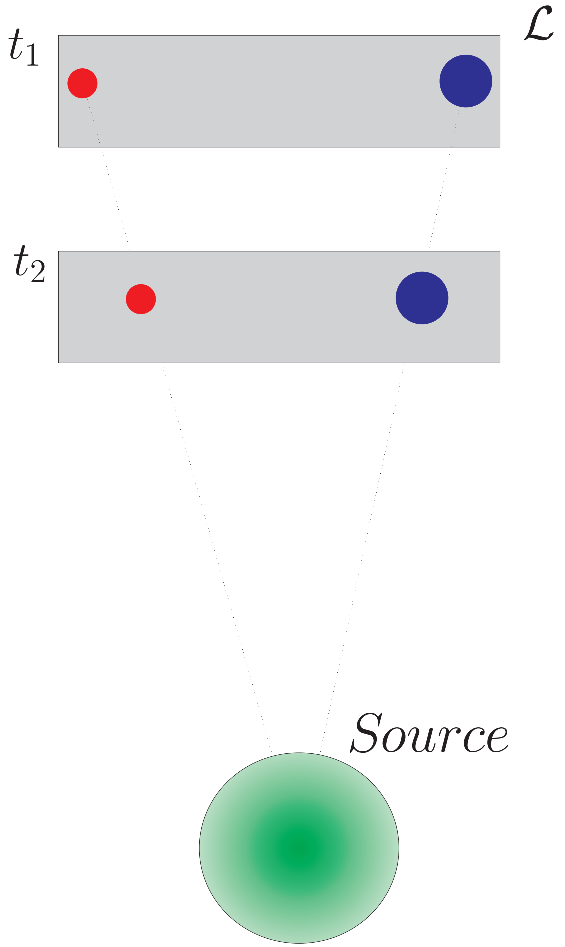
Si l’ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !



Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

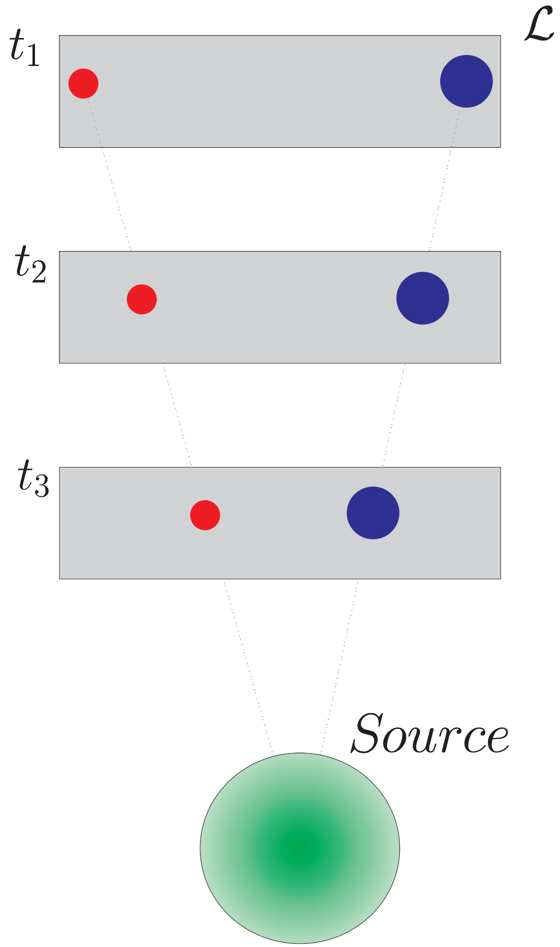
Si l'ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !



Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

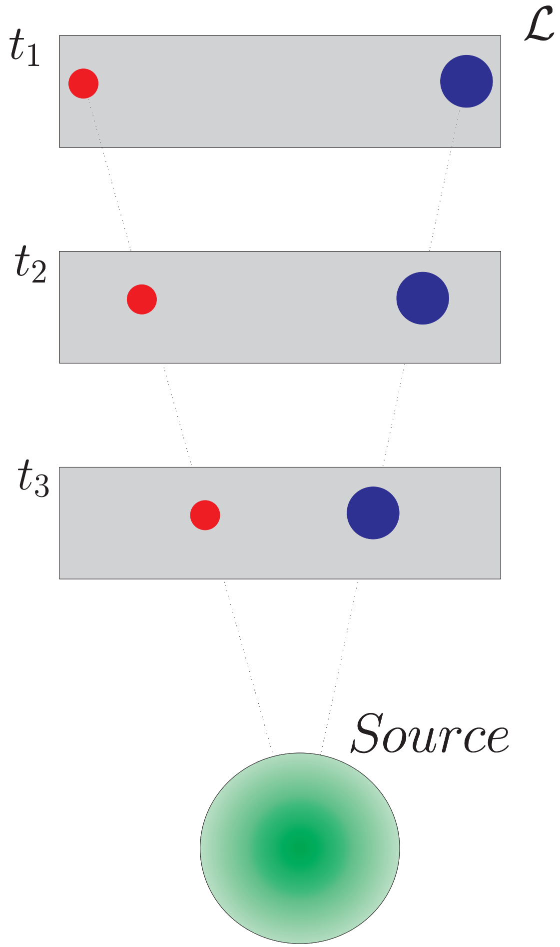
Si l'ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !



Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

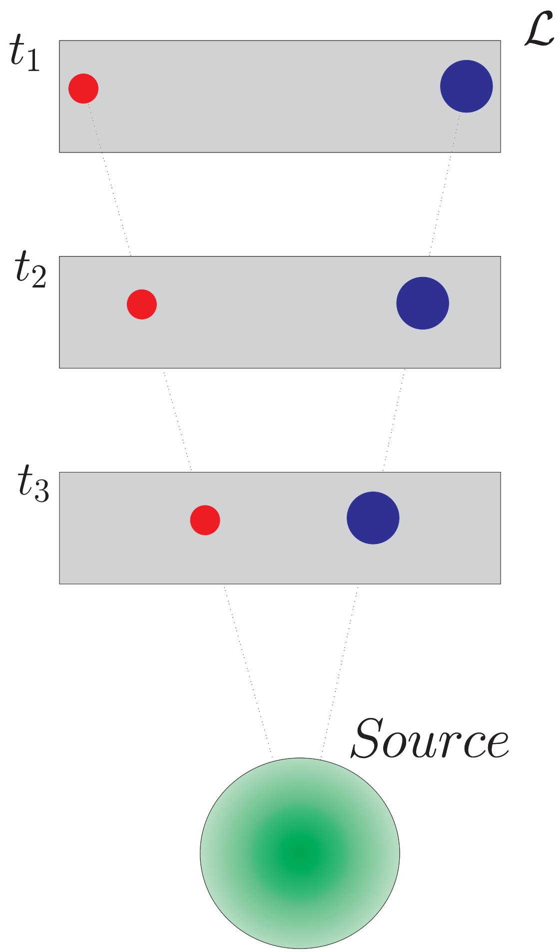
Si l'ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !



Le principe d'équivalence

Tout ceci n'est que local ...

Si l'ascenseur $\mathcal{L}$ était très grand !



Un champ de gravitation peut être localement compensé par une accélération absolue

ou

D'un point de vue local, il n'y a pas de différence entre une accélération absolue et un champ de gravitation

Principe d'équivalence *faible*

Les relativités

Les relativités

Un repère galiléen global associé à une variété plate $\dim = 4$.
$\longrightarrow$ PRR : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^\mu = \left[x^0, x^1, x^2, x^3\right]^T = [ct, x, y, z]^T \\ \eta_{00} = 1,\ i = 1, 2, 3\ \eta_{ii} = -1 \\ \text{Si } \mu \neq \nu \ \ \eta_{\mu\nu} = 0 \end{array}}$$

Les relativités

Un repère galiléen global associé à une variété plate $\dim = 4$.
$\longrightarrow$ PRR : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens

$$\begin{aligned} ds^2 \quad &= c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = \textstyle\sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x^\mu = \left[x^0, x^1, x^2, x^3\right]^T = \left[ct, x, y, z\right]^T \\ \eta_{00} = 1,\ i = 1,2,3\ \eta_{ii} = -1 \\ \text{Si } \mu \neq \nu \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \end{array}}$$

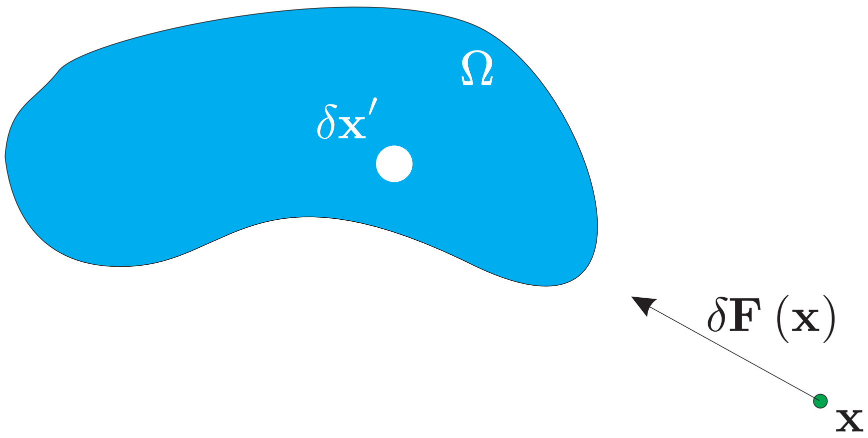
Principe d'équivalence : A cause des effets gravitationnels on ne peut pas trouver un référentiel galiléen global
$\longrightarrow$ PRG : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\left(x^\mu\right)$$

Espacetemps = variété riemannienne $\dim = 4$

Nature de la gravitation

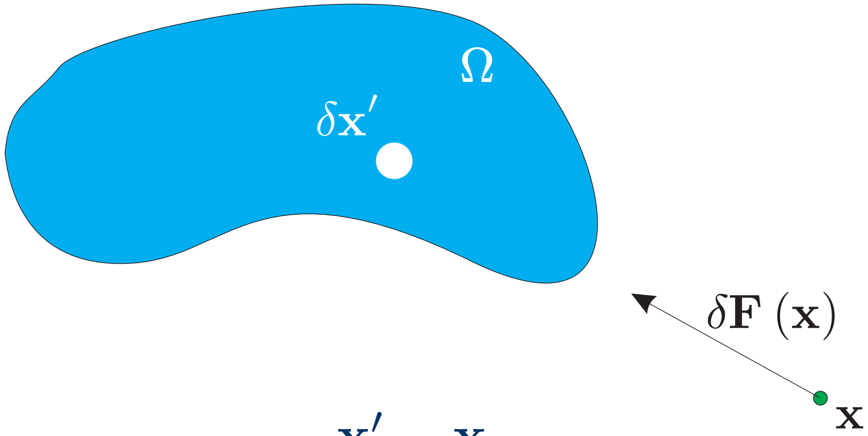
Nature de la gravitation



Densité de masse ($m_x = 1$)

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

Nature de la gravitation

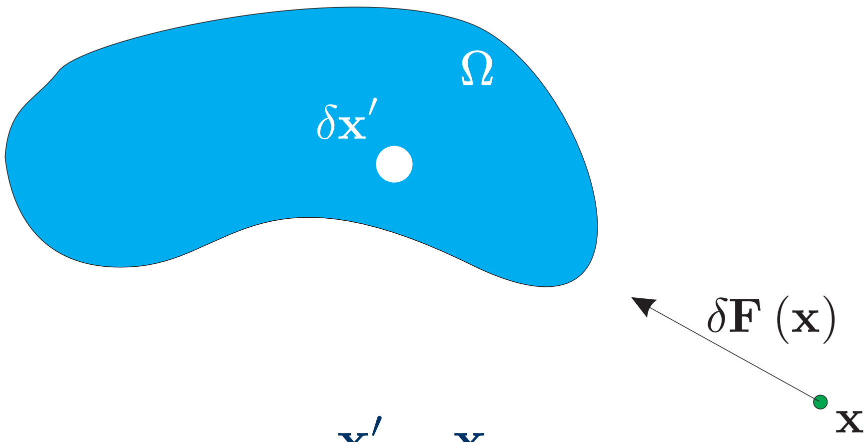


Densité de masse ($m_x = 1$)

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

$$\delta \mathbf{F} = -G \, \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; \delta^3 \mathbf{x}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = -G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; d^3 \mathbf{x}'$$

Nature de la gravitation



Densité de masse ($m_x = 1$)

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

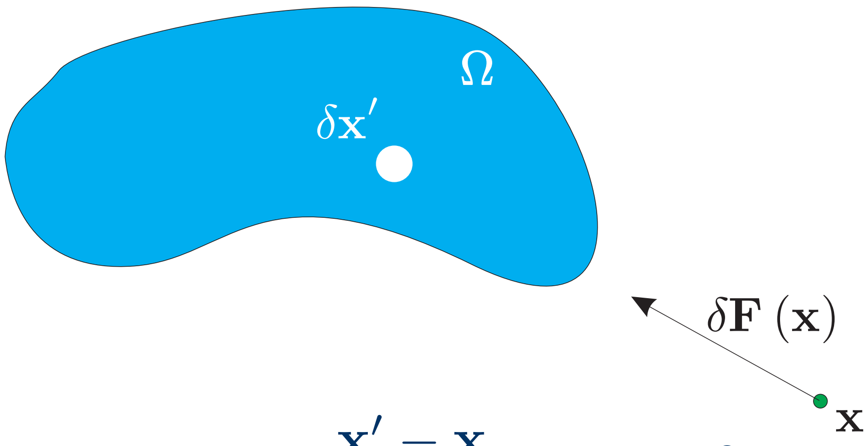
$$\delta\mathbf{F} = -G \, \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; \delta^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; d^3\mathbf{x}'$$

Potentiel gravitationnel

$$\psi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \; d^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla\psi$$

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) * \frac{1}{|\mathbf{x}|} = S_3 G\rho(\mathbf{x}) * g_{\Delta_3}(\mathbf{x})}$$

Nature de la gravitation



Densité de masse ($m_x = 1$)

$$\rho = \begin{cases} \rho(\mathbf{x}') & \text{si} \quad \mathbf{x}' \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}' \notin \Omega \end{cases}$$

$$\delta\mathbf{F} = -G \, \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; \delta^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \, \rho(\mathbf{x}') \; d^3\mathbf{x}'$$

Potentiel gravitationnel

$$\psi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \; d^3\mathbf{x}' \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla\psi$$

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) * \frac{1}{|\mathbf{x}|} = S_3 G\rho(\mathbf{x}) * g_{\Delta_3}(\mathbf{x})}$$

La gravitation est une propriété de l'espace ...

Equations d’Einstein

Equations d'Einstein

Physique classique : Équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$

Equations d'Einstein

Physique classique : Équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$

Relativité générale : Équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Tenseur d'Einstein	Tenseur énergie-impulsion
Géométrie de l'espacetemps	Contenu de l'espacetemps

Equations d'Einstein

Physique classique : Équation de Poisson $\Delta\psi = 4\pi G\rho$

Relativité générale : Équations d'Einstein

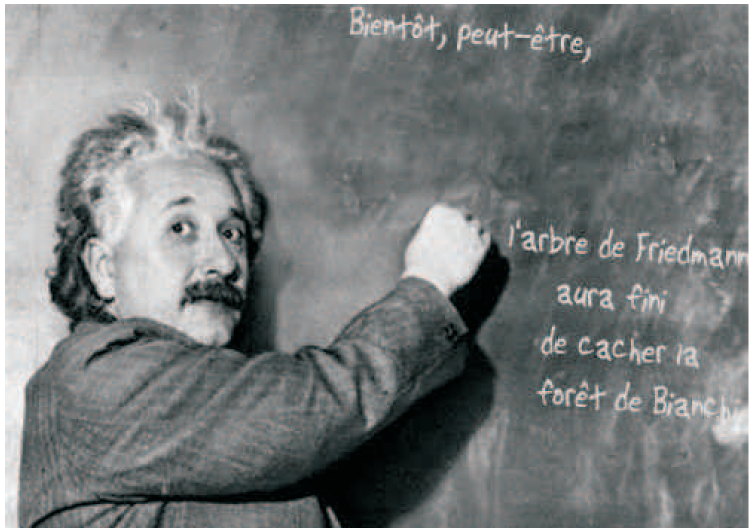
$$\boxed{G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}$$

Tenseur d'Einstein	Tenseur énergie-impulsion
Géométrie de l'espacetemps	Contenu de l'espacetemps

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu,\lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\lambda}$$
$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$$
$$\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu}\right) g^{\nu\sigma}$$

Principe d'équivalence : $\psi \Leftrightarrow g_{\mu\nu}$



Solution de Schwarzchild

Solution de Schwarzchild

Espacetemps contenant une boule homogène de masse M et de rayon R entourée de vide.

$$ds^2 = \mathrm{e}^{a(r)}dt^2 - \left(e^{b(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Solution de Schwarzchild

Espacetemps contenant une boule homogène de masse M et de rayon R entourée de vide.

$$ds^2 = \mathrm{e}^{a(r)} dt^2 - \left(e^{b(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

Boule de fluide parfait : $T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \epsilon) \dfrac{u^\mu \, u^\nu}{c^2}$

Solution de Schwarzchild

Espacetemps contenant une boule homogène de masse M et de rayon R entourée de vide.

$$ds^2 = \mathrm{e}^{a(r)} dt^2 - \left(e^{b(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$

Boule de fluide parfait : $T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \epsilon) \dfrac{u^\mu \ u^\nu}{c^2}$

Modèles d'étoiles relativistes

Solution de Schwarzchild

Espacetemps contenant une boule homogène de masse M et de rayon R entourée de vide.

$$ds^2 = \mathrm{e}^{a(r)}dt^2 - \left(e^{b(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Boule de fluide parfait : $T^{\mu\nu} = Pg^{\mu\nu} + (P+\epsilon)\,\dfrac{u^\mu\, u^\nu}{c^2}$

Modèles d'étoiles relativistes

$$\frac{\mathrm{e}^{-b(r)}}{r}\,(a' + b') = \frac{8\pi G}{c^4}\,(P+\epsilon)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-b(r)}}{r}\left(\frac{b'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{8\pi G\epsilon}{c^4}$$

$$a' = -\frac{2}{P+\epsilon}P'$$

Solution de Schwarzchild

Espacetemps contenant une boule homogène de masse M et de rayon R entourée de vide.

$$ds^2 = \mathrm{e}^{a(r)} dt^2 - \left(e^{b(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

Boule de fluide parfait : $T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P+\epsilon)\,\dfrac{u^\mu\, u^\nu}{c^2}$

Modèles d'étoiles relativistes

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{e}^{-b(r)}}{r}(a'+b') &= \frac{8\pi G}{c^4}(P+\epsilon) \\ \frac{\mathrm{e}^{-b(r)}}{r}\left(\frac{b'}{r}+\frac{1}{r^2}\right) &= \frac{8\pi G\epsilon}{c^4} \\ a' &= -\frac{2}{P+\epsilon}P' \end{aligned}}$$

A l'extérieur : $P = \epsilon = 0$

$$\mathrm{e}^{a(r)} = e^{-b(r)} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

Solution de Schwarzchild

Espacetemps contenant une boule homogène de masse M et de rayon R entourée de vide.

$$ds^2 = \mathrm{e}^{a(r)}dt^2 - \left(e^{b(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Boule de fluide parfait : $T^{\mu\nu} = Pg^{\mu\nu} + (P+\epsilon)\,\dfrac{u^\mu\, u^\nu}{c^2}$

Modèles d'étoiles relativistes

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{e}^{-b(r)}}{r}\,(a' + b') = \frac{8\pi G}{c^4}\,(P+\epsilon) \\ &\frac{\mathrm{e}^{-b(r)}}{r}\left(\frac{b'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{8\pi G\epsilon}{c^4} \\ &a' = -\frac{2}{P+\epsilon}P' \end{aligned}}$$

A l'extérieur : $P = \epsilon = 0$

$$\mathrm{e}^{a(r)} = e^{-b(r)} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$$

A l'intérieur : $M' = 4\pi r^2 \epsilon$

$$P' = -\frac{G\,(P+\epsilon)}{c^2}\,\frac{\left[M + \dfrac{4}{3}\pi r^3\,\dfrac{3P}{c^2}\right]}{r^2\left[1 - \dfrac{2GM}{rc^2}\right]}$$

Solution de Friedmann-Lemaître

Solution de Friedmann-Lemaître

Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = dt^2 - a^2\left(t\right)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left({}^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$a\left(t\right)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure

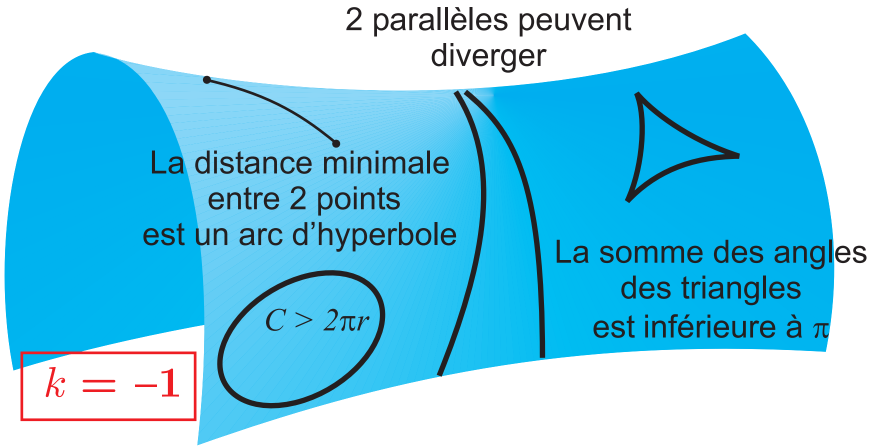
Solution de Friedmann-Lemaître

Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left({}^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$a(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure



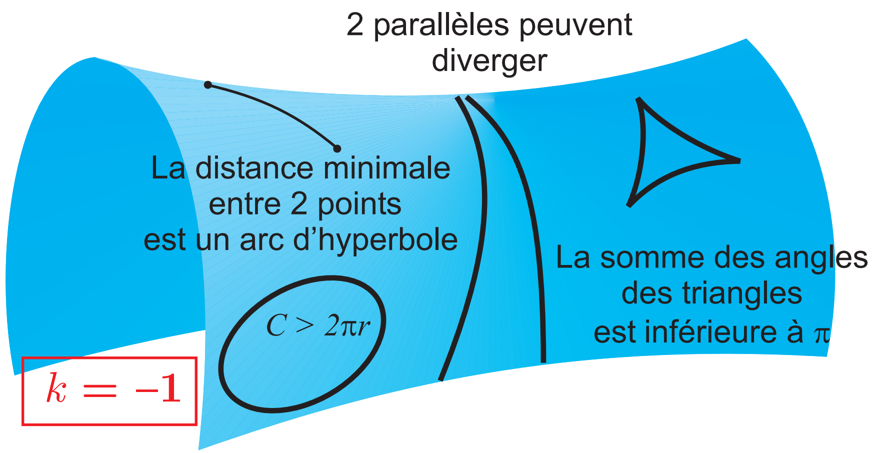
Solution de Friedmann-Lemaître

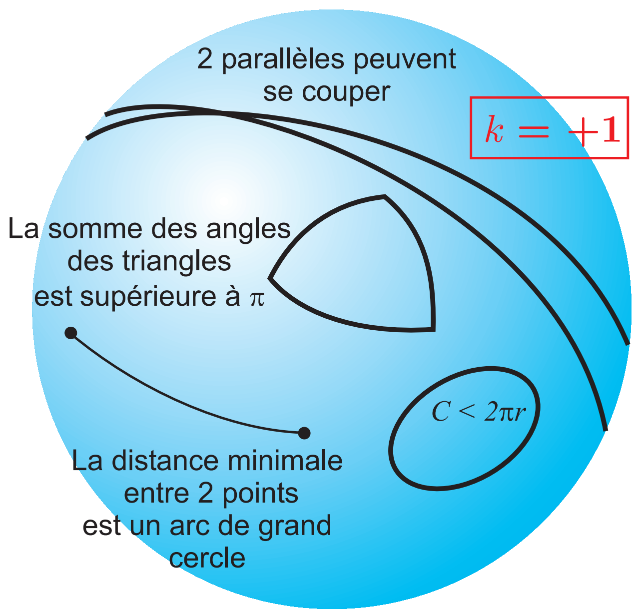
Univers homogène et isotrope

$$ds^2 = dt^2 - a^2\left(t\right)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left({}^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$a\left(t\right)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure

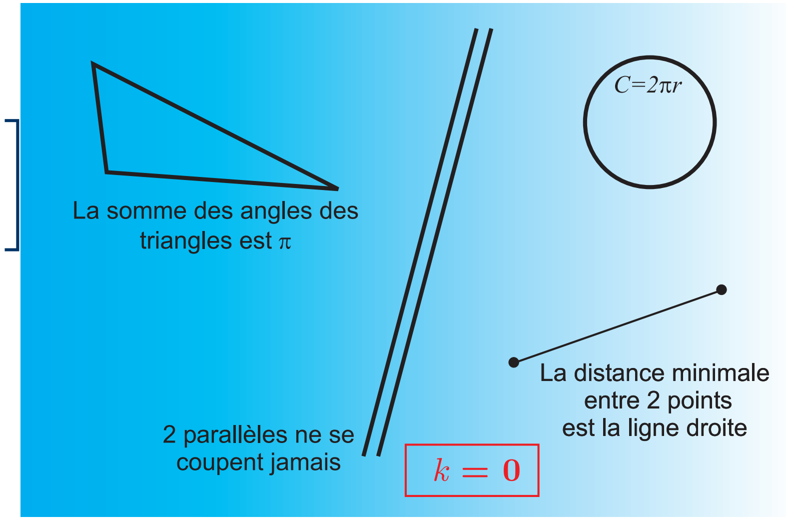




Solution de Friedmann-Lemaître

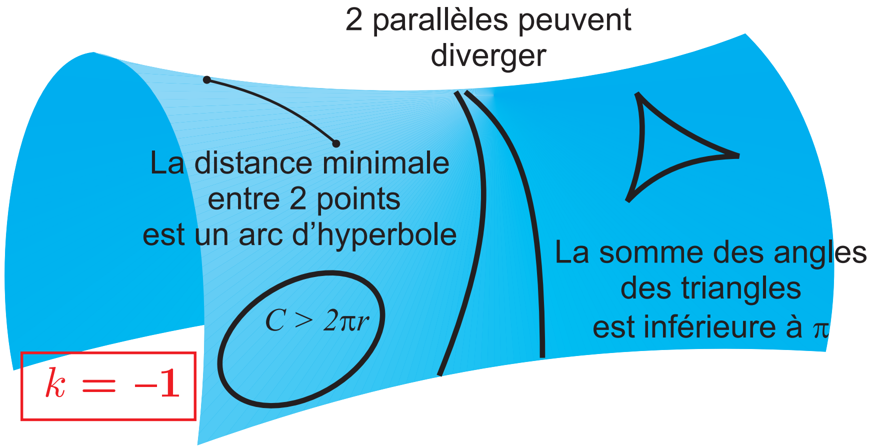
Univers homogène et isotrope

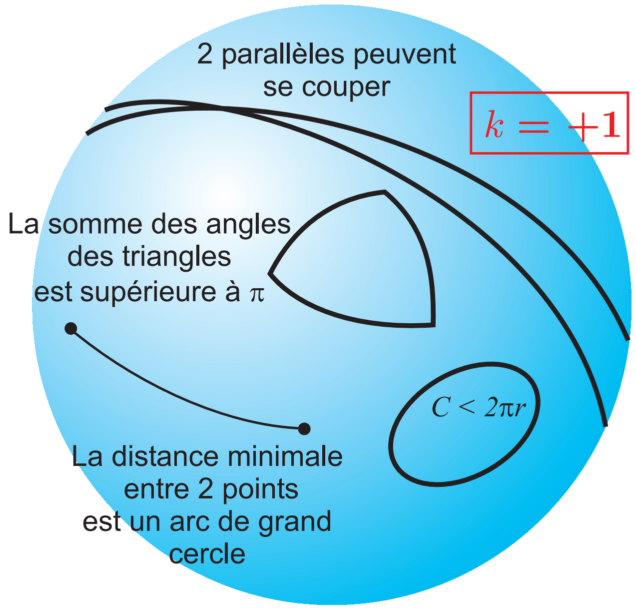
$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left({}^2d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$



$a(t)$: Facteur d'échelle

k : constante de courbure





Equations de Friedmann

Equations de Friedmann

Equations d'Einstein $\longrightarrow$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (F_1)$$

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (F_2)$$

$$a^3\frac{dP}{dt} = \frac{d\left[(\epsilon + P)\,a^3\right]}{dt} \qquad (F3)$$

conservation de l'énergie impulsion

Equations de Friedmann

Equations d'Einstein $\longrightarrow$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (F_1)$$

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\epsilon + 3P\right) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (F_2)$$

$$a^3\frac{dP}{dt} = \frac{d\left[\left(\epsilon + P\right)a^3\right]}{dt} \qquad (F3)$$

conservation de l'énergie impulsion

- (F_1) : $\left(a > 0, \frac{da}{dt} > 0, \frac{d^2a}{dt^2} < 0\right) \Rightarrow a$ concave $\Rightarrow$ Big-Bang

Equations de Friedmann

Equations d'Einstein $\rightarrow$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G\epsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (F_1)$$

$$\frac{1}{a}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}\,(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \qquad (F_2)$$

$$a^3\frac{dP}{dt} = \frac{d\left[(\epsilon + P)\,a^3\right]}{dt} \qquad (F3)$$

conservation de l'énergie impulsion

- (F_1) : $\left(a > 0, \frac{da}{dt} > 0, \frac{d^2a}{dt^2} < 0\right) \Rightarrow a$ concave $\Rightarrow$ Big-Bang
- (F_2) : Constante de Hubble : $H = \dot{a}/a$

Densité critique : $\epsilon_o = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1,1 \times 10^{-29}\left[\frac{cH}{75 \text{ km/s/Mpc}}\right]^2$ g/cm^3

Mesurer k ?

$$3k = 8\pi G a^2\,(\epsilon - \epsilon_o)$$

Solutions pour $\Lambda = 0$

Fluide parfait barotropique $P = (\Gamma - 1)\,\epsilon$
Temps conforme : $d\tau = dt/a$

$\Gamma \backslash k$	0	1	-1
1 Poussières	$\propto t^{2/3}$	$\propto (1 - \cos\tau)$	$\propto (1 - \cosh\tau)$
$4/3$ Rayonnement	$\propto\ t^{1/2}$	$\propto \sin\tau$	$\propto \sinh\tau$

Solutions pour $\Lambda = 0$

Fluide parfait barotropique $P = (\Gamma - 1)\,\epsilon$
Temps conforme : $d\tau = dt/a$

Γ \ k	0	1	-1
1 Poussières	$\propto t^{2/3}$	$\propto (1 - \cos\tau)$	$\propto (1 - \cosh\tau)$
$4/3$ Rayonnement	$\propto\ t^{1/2}$	$\propto \sin\tau$	$\propto \sinh\tau$

Quand $t \rightarrow 0$, les solutions dégénèrent $\approx k = 0$

Solutions pour $\Lambda = 0$

Fluide parfait barotropique $P = (\Gamma - 1)\,\epsilon$
Temps conforme : $d\tau = dt/a$

Γ \ k	0	1	-1
1 Poussières	$\propto t^{2/3}$	$\propto (1 - \cos\tau)$	$\propto (1 - \cosh\tau)$
$4/3$ Rayonnement	$\propto\ t^{1/2}$	$\propto \sin\tau$	$\propto \sinh\tau$

Quand $t \longrightarrow 0$, les solutions dégénèrent $\approx k = 0$

Si $\Gamma = 0$ (Champ scalaire, vide ...) $a\,(t) \propto$ e$^{\kappa t}$ avec $\kappa = 40$:Inflation !!!