Equations de la structure interne d’une étoile classique et isotrope

Équilibre mécanique

Hypothèse : symétrie sphérique

Équilibre mécanique

Hypothèse : symétrie sphérique

Equation de poisson : $\Delta\psi = 4G\pi\rho$

Définition de la masse : $M\left(r\right) = \int_{|\mathbf{r}|<r} \rho\left(\mathbf{r}\right) d\mathbf{r} = 4\pi \int_0^r s^2 \rho\left(s\right) ds$

ainsi

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = GM\left(r\right)$$

Équilibre mécanique

Hypothèse : symétrie sphérique

Equation de poisson : $\Delta\psi = 4G\pi\rho$

Définition de la masse : $M(r) = \int_{|\mathbf{r}|<r} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 4\pi \int_0^r s^2 \rho(s)\, ds$

ainsi

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = GM(r)$$

Equation d'Euler (fluide auto-gravitant)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\psi$$

Équilibre mécanique

Hypothèse : symétrie sphérique

Equation de poisson : $\Delta\psi = 4G\pi\rho$

Définition de la masse : $M(r) = \int_{|\mathbf{r}|<r} \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = 4\pi \int_0^r s^2 \rho(s)\, ds$

ainsi

$$r^2 \frac{d\psi}{dr} = GM(r)$$

Equation d'Euler (fluide auto-gravitant)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\psi$$

à l'équilibre mécanique

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\,\rho(r)}{r^2}}$$

Équilibre thermique

Équilibre thermique

Production de l'énergie

Luminosité $L\left(r\right)$: Quantité de lumière émise par seconde à la distance r du centre de l'étoile.

$L\left(r+dr\right)-L\left(r\right)$: Variation d'énergie interne du gaz dans la couche

H Pas d'accumulation : $L\left(r+dr\right)-L\left(r\right) = \varepsilon 4\pi r^2 dr$

ε : Prod. volumique d'énergie

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon}$$

Équilibre thermique

Production de l'énergie

Luminosité $L(r)$: Quantité de lumière émise par seconde à la distance r du centre de l'étoile.

$L(r+dr) - L(r)$: Variation d'énergie interne du gaz dans la couche

H Pas d'accumulation : $L(r+dr) - L(r) \quad = \quad \varepsilon 4\pi r^2 dr$

ε : Prod. volumique d'énergie

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon}$$

Transport de l'énergie

Convection et/ou radiation : Loi de Fourier $F = -\kappa \dfrac{dT}{dr}$

on vu que $F = \dfrac{L}{4\pi r^2}$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dT}{dr} = -\frac{L}{4\pi \kappa r^2}}$$

Équilibre général

$$
\begin{cases}
\dfrac{dP}{dr} = -\dfrac{GM(r)\,\rho(r)}{r^2} \\[2ex]
\dfrac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \\[2ex]
\dfrac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon \\[2ex]
\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{L}{4\pi \kappa r^2}
\end{cases}
$$

Données du modèle
$P = P(\rho, T, X)$
$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, X)$
$\kappa = \kappa(\rho, T, X)$

Conditions aux limites
$\lim_{r \to 0} \left[M, L, \dfrac{dT}{dr} \right] = [0, 0, 0]$
$\lim_{r \to R_*} [M, P, \rho] = [M_*, 0, 0]$

+ Equation d'état !

Problème numérique relativement simple ...

Équations d'état

Contexte théorique

Contexte théorique

Enceinte de volume V, énergie totale E, entropie S, pression P
Découpage en cellules ε_i dégéméresence g_i

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \epsilon V$$

Contexte théorique

Enceinte de volume V, énergie totale E, entropie S, pression P
Découpage en cellules ε_i dégéméresence g_i

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \epsilon V$$

Premier principe : $dE = TdS - PdV$

passage à l'énergie libre : $\left[\begin{array}{c} F = E - TS \\ dF = -PdV - SdT \end{array} \right.$

d'où $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$

Contexte théorique

Enceinte de volume V, énergie totale E, entropie S, pression P
Découpage en cellules ε_i dégénéresence g_i

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i = \epsilon V$$

Premier principe : $dE = TdS - PdV$

passage à l'énergie libre : $\left[\begin{array}{c} F = E - TS \\ dF = -PdV - SdT \end{array} \right.$

d'où $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$

Définition de l'entropie : $S = k \ln W$

W
nombre de complexions

Equilibre : Maximum de l'entropie

GP classique monoatomique

GP classique monoatomique

Dénombrement des complexions : $W_{cl} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (particules discernables)

Equilibre : $\max(S)$ sous contrainte $E =$ cste, $N =$ cste.

GP classique monoatomique

Dénombrement des complexions : $W_{cl} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (particules discernables)

Equilibre : $\max(S)$ sous contrainte $E =$ cste, $N =$ cste.

$$n_i^{eq} = g_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i} \qquad \beta = (kT)^{-1}$$

GP classique monoatomique

Dénombrement des complexions : $W_{cl} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (particules discernables)

Equilibre : $\max(S)$ sous contrainte $E =$ cste, $N =$ cste.

$$n_i^{eq} = g_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i} \qquad \beta = (kT)^{-1}$$

Limite continue $\begin{cases} E = \int \varepsilon g(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\ S = k\beta E + k \int g(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \end{cases}$

GP classique monoatomique

Dénombrement des complexions : $W_{cl} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (particules discernables)

Equilibre : $\max(S)$ sous contrainte $E =$ cste, $N =$ cste.

$$n_i^{eq} = g_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i} \qquad \beta = (kT)^{-1}$$

Limite continue $\begin{cases} E = \int \varepsilon g(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\ S = k\beta E + k \int g(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \end{cases}$

Facteur de dégénérescence :

$$g(p)\, dp = \frac{V}{h^3}\, 4\pi p^2 dp \quad \xrightarrow{\varepsilon = \frac{p^2}{2m}} \quad g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3}\, \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

GP classique monoatomique

Dénombrement des complexions : $W_{cl} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (particules discernables)

Equilibre : $\max(S)$ sous contrainte $E =$ cste, $N =$ cste.

$$n_i^{eq} = g_i \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i} \qquad \beta = (kT)^{-1}$$

Limite continue $\begin{cases} E = \int \varepsilon g(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\ S = k\beta E + k \int g(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \end{cases}$

Facteur de dégénérescence :

$$g(p)\, dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad \xrightarrow{\varepsilon = \frac{p^2}{2m}} \quad g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

$$\ldots\ E = \frac{3}{2}\frac{V}{h^3}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3/2} kT = \frac{3}{2} NkT \quad \ldots\ S = \frac{5}{3}\frac{E}{T}$$

on en déduit directement $\boxed{P = \frac{2}{3}\epsilon}$ soit $\boxed{P = \frac{N}{V} kT}$

GP quantique monoatomique

GP quantique monoatomique

GP quantique monoatomique

Bosons

$$W_b = \prod_i C_{g_i}^{g_i+n_i}$$

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_i-\mu} - 1}$$

μ : potentiel chimique

Gaz de photon : Corps noir

$$\mu = 0$$

GP quantique monoatomique

Bosons

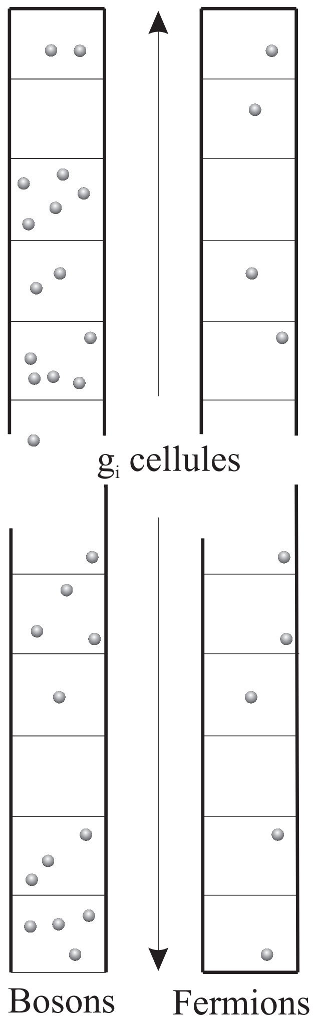
$$W_b = \prod_i C_{g_i}^{g_i+n_i}$$

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_i-\mu} - 1}$$

μ : potentiel chimique

Gaz de photon : Corps noir

$$\mu = 0$$



Fermions

$$W_f = \prod_i C_{g_i}^{n_i}$$

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_i-\mu} + 1}$$

$\mu = \beta\varepsilon_f$, ε_f energie de Fermi

Gaz de fermions dégénérés

$$\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i-\varepsilon_f)} \simeq 0 \implies n_i \simeq g_i$$

Particules relativistes avec $\mu = 0$

Particules relativistes avec $\mu = 0$

Bosons : Photons, le corps noir ...

Particules relativistes avec $\mu = 0$

Bosons : Photons, le corps noir ...

Energie : $\varepsilon = cp$ Facteur de dégénérescence : $g\left(\varepsilon\right) d\varepsilon = \dfrac{8\pi V}{c^3 h^3}\, \varepsilon^2 d\varepsilon$

Particules relativistes avec $\mu = 0$

Bosons : Photons, le corps noir ...

Energie : $\varepsilon = cp$ Facteur de dégénérescence : $g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \dfrac{8\pi V}{c^3 h^3}\, \varepsilon^2 d\varepsilon$

$$\ldots\ E = \frac{8\pi V}{\beta^4 c^3 h^3} \int \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} dx \ = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} V T^4 = a T^4 \qquad \ldots\ S = \frac{4}{3}\, \frac{E}{T}$$

on en déduit directement $\boxed{P = \frac{1}{3}\epsilon}$ soit $\boxed{P = \frac{1}{3}\, a T^4}$

Particules relativistes avec $\mu = 0$

Bosons : Photons, le corps noir ...

Energie : $\varepsilon = cp$ Facteur de dégénérescence : $g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \dfrac{8\pi V}{c^3 h^3}\, \varepsilon^2 d\varepsilon$

$$\ldots\ E = \frac{8\pi V}{\beta^4 c^3 h^3} \int \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} dx \;=\; \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} V T^4 = a T^4 \qquad \ldots\ S = \frac{4}{3}\,\frac{E}{T}$$

on en déduit directement $\boxed{P = \dfrac{1}{3}\epsilon}$ soit $\boxed{P = \dfrac{1}{3}\, a T^4}$

Fermions : Neutrinos, un autre fond diffus ...

Particules relativistes avec $\mu = 0$

Bosons : Photons, le corps noir ...

Energie : $\varepsilon = cp$ Facteur de dégénérescence : $g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \dfrac{8\pi V}{c^3 h^3}\, \varepsilon^2 d\varepsilon$

$$\ldots\ E = \frac{8\pi V}{\beta^4 c^3 h^3} \int \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} dx = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} V T^4 = a T^4 \quad \ldots\ S = \frac{4}{3}\, \frac{E}{T}$$

on en déduit directement $\boxed{P = \frac{1}{3}\epsilon}$ soit $\boxed{P = \frac{1}{3}\, a T^4}$

Fermions : Neutrinos, un autre fond diffus ...

des calculs similaires donnent

$\boxed{P = \frac{1}{3}\epsilon}$ ou encore $\boxed{P = \frac{7}{8}\, a T^4}$

Fermions classiques dégénérés

Fermions classiques dégénérés

Cadavres d'étoiles (e^- : naines blanches, n : étoiles à neutrons)

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} + 1}$$

Etat dégénéré

$$\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} \simeq 0$$

$$n_i \simeq g_i$$

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

Fermions classiques dégénérés

Cadavres d'étoiles (e^- : naines blanches, n : étoiles à neutrons)

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} + 1}$$

Etat dégénéré

$$\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} \simeq 0$$
$$n_i \simeq g_i$$

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

$$N = \sum_i n_i \longrightarrow N = \int g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi\sqrt{2}V m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon$$

soit $\varepsilon_f = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$

Fermions classiques dégénérés

Cadavres d'étoiles (e^- : naines blanches, n : étoiles à neutrons)

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} + 1}$$

Etat dégénéré

$$\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} \simeq 0$$

$$n_i \simeq g_i$$

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

$$N = \sum_i n_i \longrightarrow N = \int g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi\sqrt{2}V m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon$$

$$\text{soit } \varepsilon_f = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

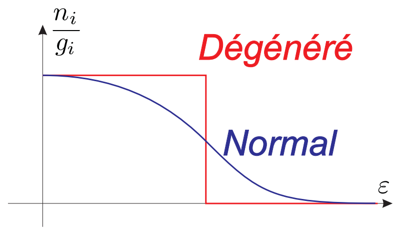
$$E = \sum_i \varepsilon_i\, n_i \longrightarrow E = \int \varepsilon g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi\sqrt{2}V m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon$$

$$\text{soit } E = \frac{3}{5} N\, \varepsilon_f = \frac{3N\, h^2}{40\, m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

Fermions classiques dégénérés

Cadavres d'étoiles (e^- : naines blanches, n : étoiles à neutrons)

$$n_i^{eq} = \frac{g_i}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} + 1}$$



Etat dégénéré

$$\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_f)} \simeq 0$$

$$n_i \simeq g_i$$

$$\varepsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

$$N = \sum_i n_i \longrightarrow N = \int g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi\sqrt{2}V m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon$$

$$\text{soit } \varepsilon_f = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

$$E = \sum_i \varepsilon_i\, n_i \longrightarrow E = \int \varepsilon g(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi\sqrt{2}V m^{3/2}}{h^3} \int_0^{\varepsilon_f} \varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon$$

$$\text{soit } E = \frac{3}{5} N\, \varepsilon_f = \frac{3N\, h^2}{40\, m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

on en déduit directement $\boxed{P = \frac{2}{3}\epsilon}$ soit $\boxed{P = \frac{2}{5}\, N\, \frac{\varepsilon_f}{V}}$

avec des fermions relativistes $\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

équilibre mécanique : masse critique ...

Cas spéciaux ...

Cas spéciaux ...

Gaz de poussières froides

E et F indépendants de V

$$E = E_o,\, \epsilon = \epsilon_o, \quad \text{ainsi} \quad \boxed{P = 0}$$

Cas spéciaux ...

Gaz de poussières froides

E et F indépendants de V

$$E = E_o,\, \epsilon = \epsilon_o, \quad \text{ainsi} \quad \boxed{P = 0}$$

Champ scalaire sans spin ...

$$\frac{1}{2} T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Fluide parfait $\quad \mathcal{L} = 3P - \epsilon \quad \longrightarrow \quad T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \epsilon) \frac{u^\mu \, u^\nu}{c^2}$

Champ scalaire $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad \longrightarrow \quad T^{\mu\nu} = V(\varphi)\, g^{\mu\nu}$

Equation d'état effective : $\boxed{P = V(\varphi) = -\epsilon}$

Cas spéciaux ...

Gaz de poussières froides

E et F indépendants de V

$$E = E_o,\ \epsilon = \epsilon_o, \quad \text{ainsi} \quad \boxed{P = 0}$$

Champ scalaire sans spin ...

$$\frac{1}{2} T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Fluide parfait $\quad \mathcal{L} = 3P - \epsilon \quad \longrightarrow \quad T^{\mu\nu} = P g^{\mu\nu} + (P + \epsilon) \dfrac{u^\mu\, u^\nu}{c^2}$

Champ scalaire $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \quad \longrightarrow \quad T^{\mu\nu} = V(\varphi)\, g^{\mu\nu}$

Equation d'état effective : $\boxed{P = V(\varphi) = -\epsilon}$

Matière raide ...

$$c_s = c \ \ldots \quad P = \epsilon$$

Résumé

Equation d'état très générale $\boxed{P = (\Gamma - 1)\,\epsilon}$

Γ : indice barotropique

Résumé

Equation d'état très générale $\boxed{P = (\Gamma - 1)\,\epsilon}$

Γ : indice barotropique

$\Gamma = 0$	$\mapsto$	$P = -\epsilon$	Champ scalaire

Résumé

Equation d'état très générale $\boxed{P = (\Gamma - 1)\,\epsilon}$

Γ : indice barotropique

$\Gamma = 0$	$\mapsto$	$P = -\epsilon$	Champ scalaire	
$\Gamma = \frac{5}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{2}{3}\epsilon$	$P = N\frac{kT}{V}$	Gaz parfait classique non relativiste
			$P = \frac{2}{5}N\frac{\varepsilon_f}{V}$	Gaz parfait quantique fermions dég. non relativiste

Résumé

Equation d'état très générale $\boxed{P = (\Gamma - 1)\,\epsilon}$

Γ : indice barotropique

$\Gamma = 0$	$\mapsto$	$P = -\epsilon$	Champ scalaire	
$\Gamma = \frac{5}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{2}{3}\epsilon$	$P = N\frac{kT}{V}$	Gaz parfait classique non relativiste
			$P = \frac{2}{5}N\frac{\varepsilon_f}{V}$	Gaz parfait quantique fermions dég. non relativiste
$\Gamma = \frac{4}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{1}{3}\epsilon$	$P = \frac{1}{3}aT^4$	Gaz parfait quantique bosons relativistes sans pot. chim.
			$P = \frac{7}{8}aT^4$	Gaz parfait quantique fermions relativistes sans pot. chim.

Résumé

Equation d'état très générale $\boxed{P = (\Gamma - 1)\,\epsilon}$

Γ : indice barotropique

$\Gamma = 0$	$\mapsto$	$P = -\epsilon$	Champ scalaire	
$\Gamma = \frac{5}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{2}{3}\epsilon$	$P = N\frac{kT}{V}$	Gaz parfait classique non relativiste
			$P = \frac{2}{5}N\frac{\varepsilon_f}{V}$	Gaz parfait quantique fermions dég. non relativiste
$\Gamma = \frac{4}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{1}{3}\epsilon$	$P = \frac{1}{3}aT^4$	Gaz parfait quantique bosons relativistes sans pot. chim.
			$P = \frac{7}{8}aT^4$	Gaz parfait quantique fermions relativistes sans pot. chim.
$\Gamma = 1$	$\mapsto$	$P = 0$	Fluide incohérent, gaz de poussières froides ...	

Résumé

Equation d'état très générale $\boxed{P = (\Gamma - 1)\,\epsilon}$

Γ : indice barotropique

$\Gamma = 0$	$\mapsto$	$P = -\epsilon$		Champ scalaire
$\Gamma = \frac{5}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{2}{3}\epsilon$	$P = N\frac{kT}{V}$	Gaz parfait classique non relativiste
			$P = \frac{2}{5}N\frac{\varepsilon_f}{V}$	Gaz parfait quantique fermions dég. non relativiste
$\Gamma = \frac{4}{3}$	$\mapsto$	$P = \frac{1}{3}\epsilon$	$P = \frac{1}{3}aT^4$	Gaz parfait quantique bosons relativistes sans pot. chim.
			$P = \frac{7}{8}aT^4$	Gaz parfait quantique fermions relativistes sans pot. chim.
$\Gamma = 1$	$\mapsto$	$P = 0$		Fluide incohérent, gaz de poussières froides ...
$\Gamma = 2$	$\mapsto$	$P = \epsilon$		Matière raide, vitesse du son = c