Projet sur les réseaux de distribution d'eau
◇
Retour sur le calcul différentiel

Pierre Carpentier

1 juin 2020

Site : `perso.ensta-paris.fr/~pcarpent/TP_Reseau/`

Rappel du problème

Le problème à résoudre durant la première partie du TP est :

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \underbrace{\frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + Bq_C \, , r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_C\big| \Big\rangle \; + \; \Big\langle p_r \, , A_r\big(q^{(0)} + Bq_C\big) \Big\rangle}_{F(q_C)} \; .$$

Pour écrire les oracles associés à cette fonction F, il faut d'abord calculer le gradient et le Hessien. Pour cela, on fait appel aux règles du calcul différentiel multivarié.

De manière générale, pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^\alpha \to \mathbb{R}^\beta$, on notera

- $\varphi'(x)$ la matrice de taille $\beta \times \alpha$ représentant l'application différentielle de φ au point x,
- $\nabla\varphi(x)$ la matrice de taille $\alpha \times \beta$ transposée de $\varphi'(x)$.

Dans le cas $\beta = 1$, $\nabla\varphi(x)$ est le gradient de la fonction φ en x.

Calcul du gradient de F

$$F(q_c) = \frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + Bq_c \, , r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_c\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_c\big|\Big\rangle \; + \; \Big\langle p_r \, , A_r\big(q^{(0)} + Bq_c\big)\Big\rangle$$

On écrit la fonction F comme une fonction composée $f \circ g$, avec :

$$g : \mathbb{R}^{n-m_d} \to \mathbb{R}^n \, , \quad g(q_c) = q^{(0)} + Bq_c \, ,$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \, , \qquad f(q) = \underbrace{\frac{1}{3}\big\langle q \, , r \bullet q \bullet |q|\big\rangle}_{f_1(q)} + \underbrace{\big\langle p_r \, , A_r q\big\rangle}_{f_2(q)} \, .$$

La règle de la chaîne s'applique et on a :

$$\big(f \circ g\big)'(q_c) = f'\big(g(q_c)\big) \cdot g'(q_c) \, ,$$

et donc, puisque $f = f_1 + f_2$,

$$\nabla F(q_c) = \nabla g(q_c) \cdot \nabla f_1\big(g(q_c)\big) + \nabla g(q_c) \cdot \nabla f_2\big(g(q_c)\big) \, .$$

Calcul du gradient de F

- La fonction g est affine, et donc $\nabla g(q_c) = B^\top$.

- La fonction f_2 est linéaire, et donc $\nabla f_2(q_c) = A_r^\top p_r$.

- La fonction f_1 est le produit scalaire de deux vecteurs : son gradient peut être obtenu par la règle du produit :

$$\nabla\big(\langle q \,, r \bullet q \bullet |q| \rangle\big) = \nabla\big(q\big) \cdot \big(r \bullet q \bullet |q|\big) + \nabla\big(r \bullet q \bullet |q|\big) \cdot q \,.$$

  - $\nabla\big(q\big)$ est le gradient de la fonction $q \mapsto q$:
    c'est donc la matrice identité de $\mathbb{R}^n$.
  - $\nabla\big(r \bullet q \bullet |q|\big)$ est le gradient de la fonction $q \mapsto r \bullet q \bullet |q|$:
    c'est une matrice diagonale (à calculer) que l'on note $R(q)$.

Regroupant tous les termes, on obtient le gradient de F :

$$\nabla F(q_c) = \frac{1}{3} B^\top \Big(r \bullet q \bullet |q| + R(q)\, q \Big) + B^\top A_r^\top p_r \,.$$

On montre facilement que la matrice diagonale $R(q)$ obtenue lors du calcul du gradient de la fonction F est telle que :

$$R(q)\,q = 2r \bullet q \bullet |q| \ .$$

L'expression complète du gradient de la fonction F est alors :

$$\nabla F(q_c) = B^\top \big(r \bullet q \bullet |q|\big) + B^\top A_r^\top p_r \ .$$

L'expression du Hessien est donnée par le gradient du gradient...
Le terme $B^\top A_r^\top p_r$ étant constant, il suffit donc de différentier :

$$q_c \ \mapsto \ q = q^{(0)} + Bq_c \ \mapsto \ z = r \bullet q \bullet |q| \ \mapsto \ B^\top z \ .$$

Le gradient de la fonction $q \mapsto z$ est $R(q)$ (obtenu lors du calcul du gradient), et les 2 autres fonctions dans l'expression ci-dessus sont affines. La règle de la chaîne fournit alors le résultat voulu.