« Optimisation différentiable »

◇

Projet sur les réseaux de distribution d'eau

Pierre Carpentier

pierre.carpentier@ensta-paris.fr

ENSTA Paris

1 juin 2020

Site : `perso.ensta-paris.fr/~pcarpent/TP_Reseau/`

Objectif et modalités du projet

Prendre prétexte d'un problème d'ingénierie (lié à l'hydraulique urbaine) pour faire apparaître un problème d'optimisation, puis mettre en œuvre sur ce problème les différentes approches et les différents algorithmes présentés dans le cours d'optimisation.

Dans la "vraie vie", il est rare d'écrire une méthode d'optimisation comme le gradient conjugué ou quasi-Newton, car c'est un travail de professionnel. Pour ce projet, vous êtes les professionnels...

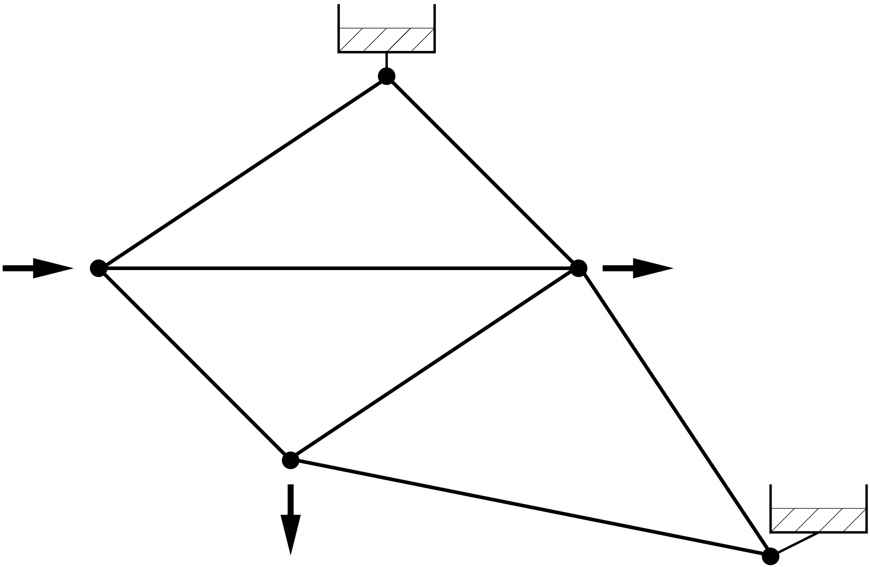
Langages de programmation supportés :

- Python
- Scilab

ainsi que

- Julia (sauf matrices creuses)
- Matlab (partiellement)

Schématique d'un réseau de distribution d'eau



Variables décrivant le réseau et notations

Tailles du réseau.

- n arcs (canalisations du réseau),
- m nœuds : m_r réservoirs, m_d consommateurs $(m = m_r + m_d)$.

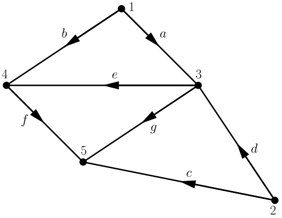
Variables hydrauliques du réseau.

- flux aux nœuds : $f = \begin{pmatrix} f_r \\ f_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ à calculer, connus.
- pressions aux nœuds : $p = \begin{pmatrix} p_r \\ p_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ connues, à calculer.
- résistances des arcs : $r \in \mathbb{R}^n$ connues.
- débits dans les arcs : $q \in \mathbb{R}^n$ à calculer.

$\rightsquigarrow$ $(m + n)$ inconnues à déterminer.

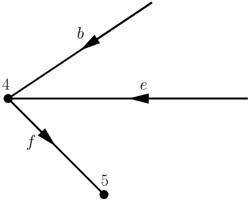
Matrice d'incidence et équations d'équilibre du réseau

Matrice d'incidence nœuds–arcs.



$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\
A = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
+1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & +1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & +1 & 0 & 0 & +1 & +1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

Équations décrivant l'état d'équilibre.



$$\textit{Noeud 4} \quad : \quad q_b + q_e - q_f = f_4.$$

$$\rightsquigarrow \quad Aq - f = 0.$$

$$\textit{Arc f} \quad : \quad p_4 - p_5 = r_f q_f |q_f|.$$

$$\rightsquigarrow \quad A^\top p + r \bullet q \bullet |q| = 0.$$

$$\rightsquigarrow \quad (m+n) \text{ équations.}$$

Problème d'optimisation associé à l'équilibre (1)

En 1978, Collins et al [1] ont montré que ces équations d'équilibre :

$$A q - f = 0 \; ,$$
$$A^\top p + r \bullet q \bullet |q| = 0 \; ,$$

sont en fait les conditions d'optimalité du problème d'optimisation :

$$\min_{(q \in \mathbb{R}^n \, , \, f_r \in \mathbb{R}^{m_r})} \quad \frac{1}{3} \Big\langle q \, , r \bullet q \bullet |q| \Big\rangle + \Big\langle p_r \, , f_r \Big\rangle \; ,$$

sous la contrainte $\quad A q - f = 0 \; .$

1. *M. Collins, L. Cooper, R. Helgason, J. Kennington and L. LeBlanc.* **Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques.** Management Science, Vol.24, No.7, pp 747-760, March 1978.

Le problème initial précédent peut se simplifier :

- d'une part en éliminant les variables de flux f_r (qui peuvent être exprimées en fonction de q à l'aide des contraintes) :

$$\min_{q \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{3}\langle q \, , r \bullet q \bullet |q| \rangle + \langle p_r \, , A_r q \rangle \, ,$$

$$\text{sous la contrainte} \quad A_d q - f_d = 0 \, ,$$

- d'autre part en écrivant la contrainte $A_d q - f_d = 0$ sous la forme équivalente $q = q^{(0)} + B q_C$, ce qui conduit au problème d'optimisation équivalent sans contrainte suivant :

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + B q_C \, , r \bullet \big(q^{(0)} + B q_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + B q_C\big| \Big\rangle + \Big\langle p_r \, , A_r \big(q^{(0)} + B q_C\big) \Big\rangle \, .$$

C'est ce problème que l'on va résoudre *(pour commencer...)* **!**

But du projet

Écrire des méthodes génériques d'optimisation (recherche linéaire, gradient conjugué, quasi-Newton, Newton) qui ne communiquent avec le problème que par l'intermédiaire d'un oracle associé à :

$$F : q_c \mapsto \frac{1}{3}\left\langle q^{(0)} + Bq_c \,, r \bullet \left(q^{(0)} + Bq_c\right) \bullet \left|q^{(0)} + Bq_c\right| \right\rangle + \left\langle p_r \,, A_r\left(q^{(0)} + Bq_c\right) \right\rangle .$$

Oracle

Fonction qui pour tout q_c calcule $F(q_c)$, $\nabla F(q_c)$, $\nabla^2 F(q_c)$:

```
[F,G,H] = Oracle(qc).
```

Algorithme d'optimisation

Fonction qui minimise F en partant d'un point initial q_{ini} :

```
[Fopt,qopt,Gopt] = Minimise(Oracle,qini).
```

Recherche linéaire

Fonction qui assure la décroissance de F dans une direction d.

L'algorithme du gradient à pas fixe (Scilab)

```
function [Fopt,qopt,Gopt]=Gradient_F(Oracle,qini)

   iter = 5000 ; tol = 0.000001 ; alpha = 0.0005; qc = qini;

   for k = 1:iter

      [F,G] = Oracle(qc);
      if norm(G) <= tol then
         kstar = k; break
      end
      qc = qc - (alpha*G);

      logG = [ logG ; log10(norm(G)) ]; Cout = [ Cout ; F ];

   end

   Fopt = F; qopt = x; Gopt = G;

   Visualg(logG,Cout);

endfunction
```

Moniteur pour la résolution du problème (SCILAB)

```
// Acquisition des donnees du probleme
exec('Probleme_R.sce'); exec('Structures_N.sce');

// Fonction de visualisation du deroulement de l'algorithme
exec('Visualg.sci');

// Fonctions de verification des resultats
exec('HydrauliqueP.sci'); exec('Verification.sci');

// Oracle et algorithme d'optimisation
exec('Oracle.sci'); exec('Gradient_F.sci');

// Optimisation
qini = 0.1 * rand(n-md,1);
[Fopt,qopt,Gopt] = Gradient_F(Oracle,qini);

// Verification des resultats
[q,z,f,p] = HydrauliqueP(qopt); Verification(q,z,f,p);
```

Variables descriptives du problème de réseau d'eau

Description de la variable	Nom math.	Variable info.	Espace
Nombre total d'arcs	n	`n`	$\mathbb{N}$
Nombre total de nœuds	m	`m`	$\mathbb{N}$
Nombre de nœuds de demande	m_d	`md`	$\mathbb{N}$
Nombre de nœuds réservoir	m_r	`mr`	$\mathbb{N}$
Flux aux nœuds de demande	f_d	`fd`	$\mathcal{M}(m_d, 1)$
Pressions aux nœuds réservoir	p_r	`pr`	$\mathcal{M}(m_r, 1)$
Résistances des arcs	r	`r`	$\mathcal{M}(n, 1)$
Vecteur initial des débits	$q^{(0)}$	`q0`	$\mathcal{M}(n, 1)$
Matrice d'incidence nœuds-arcs	A	`A`	$\mathcal{M}(m, n)$
Sous-matrice "demande" de A	A_d	`Ad`	$\mathcal{M}(m_d, n)$
Sous-matrice "réservoir" de A	A_r	`Ar`	$\mathcal{M}(m_r, n)$
Sous-matrice "arbre" de A_d	$A_{d,T}$	`AdT`	$\mathcal{M}(m_d, m_d)$
Sous matrice "coarbre" de A_d	$A_{d,C}$	`AdC`	$\mathcal{M}(m_d, n - m_d)$
Matrice inverse de $A_{d,T}$		`AdI`	$\mathcal{M}(m_d, m_d)$
Matrice d'incidence arcs-cycles	B	`B`	$\mathcal{M}(n, n - m_d)$

Attention : en SCILAB, les variables sont globales !

Programmation du projet

1. **1-ère séance (3 heures)**

   $\leadsto$ lecture du sujet ; écriture de l'oracle et test

2. **2-ème séance (3 heures)**

   $\leadsto$ recherche linéaire ; méthodes de type gradient

3. **3-ème séance (3 heures)**

   $\leadsto$ méthodes de type Newton ; matrices creuses

4. **4-ème séance (3 heures)**

   $\leadsto$ formulation duale du problème et résolution

Programme de travail de la première séance

1. Lire attentivement le document descriptif du TP...

2. Récupérer les documents et les codes du TP :

   `http://perso.ensta-paris.fr/~pcarpent/TP_Reseau/`

3. Calculer analytiquement le gradient de la fonction :

$$
\begin{aligned}
F : \mathbb{R}^{n-m_d} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
q_C &\mapsto \frac{1}{3}\Big\langle q^{(0)} + Bq_C \, , r \bullet \big(q^{(0)} + Bq_C\big) \bullet \big|q^{(0)} + Bq_C\big| \Big\rangle + \\
&\qquad \Big\langle p_r \, , A_r\big(q^{(0)} + Bq_C\big) \Big\rangle \, .
\end{aligned}
$$

4. Écrire l'oracle codant la fonction et son gradient.

5. Mettre en œuvre l'algorithme du gradient à pas fixe.

Ce projet...

Le vrai problème. . .