

Projet sur les réseaux de distribution d'eau



Introduction à la séance sur la dualité

Pierre Carpentier

1 juin 2020

Site : `perso.ensta-paris.fr/~pcarpent/TP_Reseau/`

Problèmes associés à l'équilibre d'un réseau d'eau

Depuis le début du TP, pour résoudre le **problème primal**

$$\min_{q_C \in \mathbb{R}^{n-m_d}} \frac{1}{3} \langle q^{(0)} + Bq_C, r \bullet (q^{(0)} + Bq_C) \bullet |q^{(0)} + Bq_C| \rangle + \langle p_r, A_r(q^{(0)} + Bq_C) \rangle,$$

on a écrit des oracles et des algorithmes (gradient, Newton...).

On revient maintenant au **problème sous contrainte** équivalent :

$$\begin{aligned} \min_{q \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{3} \langle q, r \bullet q \bullet |q| \rangle + \langle p_r, A_r q \rangle, \\ \text{s.t.} \quad & A_d q - f_d = 0, \end{aligned}$$

que l'on va résoudre par **dualité**. Pour cela, il faut

- 1 former le **problème dual**,
- 2 écrire les **oracles** associés,
- 3 résoudre avec les **algorithmes** écrits précédemment.

On prend un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité :

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u) \quad \text{s.t.} \quad \Theta(u) = 0 \in \mathbb{R}^p .$$

Le **Lagrangien** de ce problème est par définition

$$L(u, \lambda) = J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle ,$$

et le problème initial est **toujours** équivalent au problème

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} L(u, \lambda) .$$

Sous certaines hypothèses (*voir le cours*), il est **aussi** équivalent à

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda) .$$

Partant du problème en **max – min**

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda),$$

on définit la **fonction duale** φ de la manière suivante :

$$\varphi(\lambda) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda).$$

Le problème initial se réécrit donc sous la forme équivalente

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^p} \varphi(\lambda),$$

que l'on appelle **problème dual**. C'est ce problème de **maximisation sans contraintes** que l'on va maintenant résoudre.

$$\varphi(\lambda) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} J(u) + \langle \lambda, \Theta(u) \rangle .$$

- ① Il faut pour commencer **calculer la fonction** φ . On écrit la condition d'optimalité associée à la minimisation en u :

$$\nabla J(u) + \nabla \Theta(u) \cdot \lambda = 0 ,$$

dont la **solution** est notée $\hat{u}(\lambda)$. La fonction φ vaut alors

$$\varphi(\lambda) = J(\hat{u}(\lambda)) + \langle \lambda, \Theta(\hat{u}(\lambda)) \rangle .$$

- ② Le **calcul du gradient de** φ peut se faire par calcul, **mais**... supposant toutes les fonctions différentiables, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(\lambda) &= \nabla \hat{u}(\lambda) \cdot \left(\nabla J(\hat{u}(\lambda)) + \nabla \Theta(\hat{u}(\lambda)) \cdot \lambda \right) + \Theta(\hat{u}(\lambda)) \\ &= \Theta(\hat{u}(\lambda)) \end{aligned}$$

car le premier terme est nul par optimalité de $\hat{u}(\lambda)$.¹

1. En fait, ce résultat se démontre sans supposer la différentiabilité de \hat{u} ...

Dans le cas des réseaux d'eau, la **fonction duale** est :

$$\varphi(\lambda) = \min_{q \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{3} \langle q, r \bullet q \bullet |q| \rangle + \langle p_r, A_r q \rangle + \langle \lambda, A_d q - f_d \rangle .$$

De l'expression de la **solution** $\hat{q}(\lambda)$ fournie par la condition d'optimalité de ce problème, on peut calculer les valeurs $\varphi(\lambda)$, $\nabla \varphi(\lambda)$ et $\nabla^2 \varphi(\lambda)$. On dispose ainsi des éléments permettant d'écrire les **oracles** associés au problème dual et donc utiliser les **algorithmes** écrits précédemment pour le problème primal.

On utilisera le fait que maximiser la fonction duale est équivalent à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$- \min_{\lambda \in \mathbb{R}^{m_d}} -\varphi(\lambda) .$$

Objectifs de la séance portant sur la dualité.

- 1 Faire les calculs permettant d'écrire les oracles duaux.
- 2 Mettre en œuvre les algorithmes avec ces oracles.

Attention : les algorithmes doivent pouvoir être appliqués indifféremment au problème primal ou au problème dual.
- 3 Comparer les résultats obtenus par les différents algorithmes et par les deux méthodes.