

Cours SOD314: TD3

Mardi 25 février 2020

Ex. 1: *Dualité linéaire.* Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs. On considère le problème d'optimisation linéaire sous forme canonique:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

1. Ecrire le Lagrangien en dualisant toutes les contraintes. Montrer que le problème dual s'écrit

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}_+^n} \quad & b^\top \lambda \\ \text{s.t.} \quad & A^\top \lambda + s = c \end{aligned} \tag{2}$$

2. Montrer qu'en dualisant uniquement la contrainte $Ax = b$, nous obtenons la même formulation duale.

3. Soit K un ensemble convexe. On définit le cône dual associé comme $K^* = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \langle \lambda, x \rangle \geq 0\}$. Un problème d'optimisation conique est une généralisation du problème d'optimisation linéaire (2). Il s'écrit:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in K. \end{aligned} \tag{3}$$

Montrer que le problème dual de (3) est

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \quad & b^\top \lambda \\ \text{s.t.} \quad & c - A^\top \lambda \in K^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Correction: i) Le résultat vient en considérant le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = c^\top x + \lambda^\top (b - Ax) - \mu^\top x.$$

Le problème dual s'écrit alors: $\phi(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} (c - A^\top \lambda - \mu)^\top x + b^\top \lambda$. Si $c - A^\top \lambda - \mu \neq 0$, alors $\phi(\lambda, \mu) = +\infty$. On en déduit que le problème dual $\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n} \phi(\lambda, \mu)$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n} \quad & b^\top \lambda \\ \text{sous} \quad & c - A^\top \lambda - \mu = 0. \end{aligned}$$

La variable $\mu \in \mathbb{R}^n$ peut être vue comme une variable de slack.

ii) Idem, en réécrivant cette fois-ci le Lagrangien comme

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = c^\top x + \lambda^\top (b - Ax).$$

iii) La mécanique est la même dans le cadre de l'optimisation conique.

Ex. 2: *Sous-différentiel d'un problème linéaire.* Soit $q \in \mathbb{R}^m$, $W \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $T \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & q^\top y \\ \text{s.t.} \quad & Wy + Tx = b. \end{aligned} \tag{5}$$

1. Montrer que le problème dual de (5) s'écrit

$$\begin{aligned} d(x) = \max_{\pi \in \mathbb{R}^p} \quad & \pi^\top (b - Tx) \\ \text{s.t.} \quad & W^\top \pi \leq q. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Montrer que $d = \sigma_D(b - Tx)$, où σ_D est la fonction support d'un ensemble D à déterminer.

3. En déduire que

$$\partial f(x) = -T^\top \mathcal{D}(x) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}(x) = \arg \max_{\pi \in D} \pi^\top (b - Tx) \quad (7)$$

Correction: i) D'après l'Exercice 1, on a directement que le problème dual s'écrit

$$\begin{aligned} d(x) &= \max_{\pi \in \mathbb{R}^p} \pi^\top (b - Tx) \\ \text{s.t. } &W^\top \pi \leq q. \end{aligned}$$

x n'apparaît que dans l'objectif, l'ensemble admissible $\Pi(q) = \{\pi \in \mathbb{R}^p : W^\top \pi \leq q\}$ étant indépendant de x . Supposons que f soit propre. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) < +\infty$, et le problème primal est alors admissible pour x_0 . Par le théorème fondamentale de la dualité linéaire, le problème dual $d(x_0)$ est aussi admissible, et la dualité forte s'applique: $f(x_0) = d(x_0)$. Comme $\Pi(q)$ ne dépend pas de x , le fait que f soit propre implique alors nécessairement que $\Pi(q)$ est non-vide et que pour tout x , le problème dual est admissible.

ii) On définit la fonction support de $\Pi(q)$:

$$\sigma_q(y) = \sup_{\pi \in \Pi(q)} \pi^\top y.$$

On a alors: $d(x) = \sigma_q(b - Tx)$. D'autre part, on sait que $\sigma_q^* = \chi_{\Pi(q)}$, fonction indicatrice de $\Pi(q)$, car $\chi_{\Pi(q)}$ est convexe, propre, s.c.i (voir TD2). D'après le Théorème 3 du Chapitre 1, on en déduit:

$$\pi_d \in \partial \sigma_q(y) \iff \pi_d \in \arg \max_{\pi} \pi^\top y - \chi_{\Pi(q)}(\pi) \iff \pi_d \in \arg \max_{\pi \in \Pi(q)} \pi^\top y,$$

car pour toute fonction convexe propre s.c.i. f , on a $p \in \partial f(x) \iff p^\top x = f(x) + f^*(p) \iff p \in \arg \max_y x^\top y - f^*(y)$. On déduit alors, en utilisant les propriétés de composition du sous-différentiel (Théorème 5, Chapitre 1):

$$\partial f(x) = -T^\top \mathcal{D}(x) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}(x) = \arg \max_{\pi \in D} \pi^\top (b - Tx).$$