

Chapitre 4

Algorithme du recouvrement progressif

Dans ce chapitre, on montre comment les méthodes proximales, et plus précisément le Lagrangien augmenté, permettent de résoudre de manière efficace certains problèmes de commande optimale stochastique en temps discret.

4.1 Optimisation stochastique et arbre de scénarios

On rappelle pour commencer le formalisme de la programmation stochastique.¹

4.1.1 Quelques mots sur l'optimisation stochastique

Beaucoup de problèmes d'optimisation apparaissant dans les questions de gestion de ressources d'un système mettent en jeu à la fois des *aspects dynamiques* (il faut prendre en compte la manière dont le système évolue au cours du temps) et des *aspects aléatoires* (il faut tenir compte du fait que des perturbations extérieures affectent le comportement du système). Ainsi, dans le monde de l'énergie, le problème de la gestion de la production et de la distribution d'électricité est de cette nature : les stocks d'énergie (barrages hydro-électriques, combustibles...) sont régis par des équations dynamiques, et de nombreuses sources d'aléas viennent perturber le système (précipitations, température, ensoleillement, vent...). Plus précisément, on s'intéresse ici aux problèmes d'optimisation formulés en temps discret, pour lesquels il faut prendre une décision à chaque instant de l'horizon. La décision à un instant t peut dépendre de l'information dont on dispose à cet instant, c'est-à-dire des observations que l'on a accumulées sur le système jusqu'à cet instant. Deux principes régissent alors la prise de décision.

- Le *principe de causalité* qui affirme que, à tout instant t , on peut disposer de la connaissance précise de ce qui s'est produit *avant* l'instant t (le passé), alors qu'on ne dispose que d'une connaissance statistique de ce qui peut se produire *après* l'instant t (le futur).
- Du principe de causalité découle le *principe de non anticipativité* qui dit que la décision que l'on prend ne peut pas dépendre du comportement futur du système : si deux trajectoires des aléas durant l'horizon d'optimisation sont identiques jusqu'à un instant t , alors les décisions prises le long de ces deux trajectoires doivent être identiques jusqu'à l'instant t .

La première question qui se pose est de modéliser les aléas du système de manière à pouvoir ensuite formuler un problème d'optimisation dont les solutions correspondent à l'objectif

1. "Stochastic Programming" en anglais : voir le site Web de la Stochastic Programming Society (<https://www.stopro.org/>) pour plus d'information sur ce thème.

poursuivi. Une possibilité pour faire cela est de discrétiser les aléas sous la forme d'un *arbre de scénarios*.

4.1.2 Bref aperçu des arbres de scénarios

Afin de représenter de manière réaliste les aléas affectant un système dynamique dans le but de le contrôler au cours du temps, il faut tenir compte des principes de causalité et de non anticipativité énoncés ci-dessus.

On prend l'exemple d'un processus aléatoire binaire évoluant sur 5 instants : à chaque instant t , l'aléa peut prendre la valeur « H » (haut) ou la valeur « B » (bas), avec la probabilité π ou $1 - \pi$. On suppose que les aléas à deux instants différents sont représentés par deux variables aléatoires indépendantes. L'arbre correspondant à cet exemple est représenté sur la figure 4.1. Chaque chemin de l'arbre reliant la racine de l'arbre (nœud à l'instant $t = 1$) à l'une des

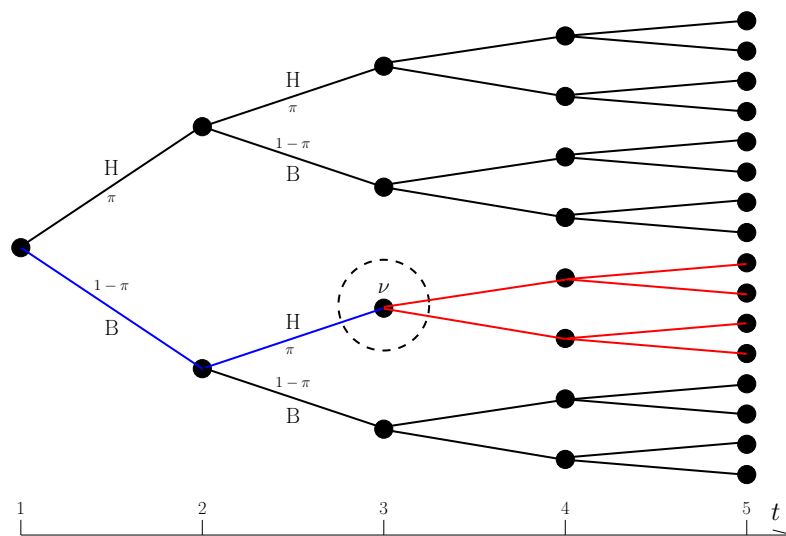


FIGURE 4.1 – Représentation d'un processus binaire par un arbre

feuilles de l'arbre (c'est-à-dire un nœud à l'instant $t = 5$) est appelé un *scénario*, qui décrit donc une trajectoire du processus de bruit au cours du temps. On voit que, par construction, l'arbre contient tous les scénarios possibles du processus binaire. Ces scénarios ne sont pas indépendants les uns des autres (comme cela pourrait être le cas si on effectuait un tirage de type Monte Carlo sur le processus de bruit), mais ils ont été regroupés suivant leur passé commun. Ceci permet de matérialiser le fait que, si l'on se trouve en un nœud de l'arbre à un instant t (par exemple le nœud ν entouré d'un cercle pointillé sur la figure), le chemin par lequel on est arrivé au nœud ν depuis la racine de l'arbre est *unique* (arcs bleus de la figure), ce qui correspond au passé du nœud ν , alors qu'il existe *plusieurs* chemins reliant ν aux feuilles de l'arbre (arcs rouges de la figure), ce qui correspond aux différents futurs possibles du nœud ν .

La constitution d'un arbre de scénarios à partir d'un processus de bruit quelconque peut être menée de manière similaire à celle que l'on vient de voir dans le cas du processus binaire : il faut alors passer par une phase de discrétisation des bruits afin de disposer d'une représentation finie des variables aléatoires constituant le processus. Il faut bien sûr tenir compte dans cette discrétisation d'éventuelles corrélations temporelles dans le processus. La technologie permettant d'obtenir des arbres de scénarios adaptés à l'optimisation stochastique dynamique est complexe : le lecteur intéressé pourra consulter les articles [Heitsch and Römisch, 2009a] et [Heitsch and Römisch, 2009b] pour plus de détails. On a représenté sur la figure 4.2 un arbre

de scénario très simple qui permet d'illustrer les différentes notions dont on aura besoin par la suite.

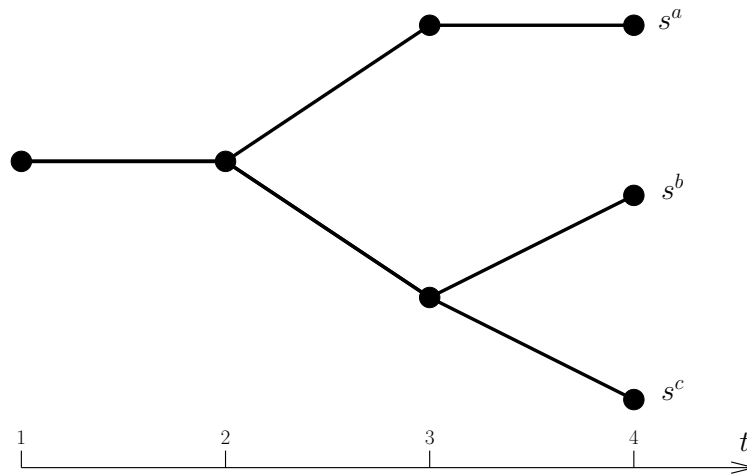


FIGURE 4.2 – Un exemple d'arbre de scénarios

Une fois l'arbre de scénarios constitué, le problème d'optimisation stochastique s'y formule de manière assez naturelle : à chaque nœud de l'arbre, représentant à la fois un instant et un passé des bruits, on associe un terme de coût, des contraintes à satisfaire et une commande à choisir. Le fait de choisir une commande en chaque nœud de l'arbre fait que l'on respecte le principe de non anticipativité puisque tous les scénarios passant par un nœud donné de l'arbre ont le même passé et que les commandes que l'on choisit sur ce passé commun sont donc par construction les mêmes pour tous les scénarios passant par ce nœud. La somme des termes de coût aux nœuds de l'arbre, pondérée par les probabilités d'occurrence de ces nœuds, correspond alors à une version discrétisée de l'espérance du coût dans le problème de départ.

Remarque 25. Dans le cas du processus binaire, le nombre de scénarios qui permet de représenter l'aléa croît exponentiellement avec le nombre d'instant à prendre en compte. Ainsi, pour représenter exhaustivement ce processus sur 365 instants (correspondant à un problème d'optimisation à l'horizon annuel avec un pas de temps journalier), il faut un nombre de scénarios de l'ordre de 10^{110} , soit un nombre proprement astronomique. Cette explosion combinatoire subsiste lorsque l'on forme un arbre de scénarios pour représenter de manière approchée un processus de bruit général : c'est l'une des manifestations en optimisation stochastique de la « malédiction de la dimension » rencontrée dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées : on consultera l'article [Shapiro, 2006] pour plus de détails sur ce sujet. \diamond

On se donne un horizon de temps discret $\{1, 2, \dots, T\}$ que l'on note $\llbracket 1, T \rrbracket$ et un ensemble S de scénarios définis sur cet horizon. Un scénario $s \in S$ est de la forme : $s = (s_1, \dots, s_T)$. On introduit alors la notion de scénarios indiscernables.

Définition 9. Deux scénarios s et s' sont *indiscernables* à un instant $t \in \llbracket 1, T \rrbracket$ s'ils sont identiques depuis l'instant initial 1 jusqu'à l'instant t :

$$s_\tau = s'_\tau, \quad \forall \tau \in \llbracket 1, t \rrbracket. \quad (4.1)$$

Exemple 3. Dans l'exemple de la figure 4.2, les scénarios s^a , s^b et s^c sont indiscernables jusqu'à l'instant $t = 2$, alors que les scénarios s^b et s^c sont indiscernables jusqu'à l'instant $t = 3$. \triangle

On introduit alors sur l'ensemble des scénarios S les relations d'équivalence $\{\mathcal{A}_t\}_{t \in \llbracket 1, T \rrbracket}$ permettant de modéliser l'« indiscernabilité ».

Définition 10. On dit que deux scénarios s et s' sont en relation par \mathcal{A}_t s'ils sont indiscernables jusqu'à l'instant t :

$$s\mathcal{A}_t s' \iff s_\tau = s'_\tau \quad \forall \tau \in \llbracket 1, t \rrbracket . \quad (4.2)$$

Il est très facile de montrer que les relations \mathcal{A}_t sont des relations d'équivalence,² et donc que chaque relation \mathcal{A}_t induit une *partition* de l'ensemble S des scénarios. Cette partition est constituée des classes d'équivalence de la relation \mathcal{A}_t .

Définition 11. On note A_t la partition de l'ensemble S induite par la relation d'équivalence \mathcal{A}_t :

$$\forall A \in A_t, \quad \forall (s, s') \in A \times A, \quad s\mathcal{A}_t s' . \quad (4.3)$$

Les sous-ensembles A constituant la partition A_t sont appelés *paquets de scénarios* indiscernables à l'instant t .

Exemple 4. Dans l'exemple de la figure 4.2, les partitions induites par la relation d'équivalence d'indiscernabilité aux différents instants t sont :

$$\begin{aligned} t = 1 & : A_1 = (\{s^a, s^b, s^c\}), \\ t = 2 & : A_2 = (\{s^a, s^b, s^c\}), \\ t = 3 & : A_3 = (\{s^a\}, \{s^b, s^c\}), \\ t = 4 & : A_4 = (\{s^a\}, \{s^b\}, \{s^c\}). \end{aligned}$$

Ainsi, aux instants 1 et 2, les partitions A_1 et A_2 sont constituées d'un seul sous-ensemble regroupant tous les scénarios, qui sont à ces instants indiscernables. \triangle

4.2 Méthode du « Progressive Hedging »

La méthode du recouvrement progressif (Progressive Hedging en anglais) est une technique mathématique permettant de résoudre très efficacement un problème d'optimisation stochastique dynamique formulé sur un arbre de scénarios. L'une des clés du succès de cette méthode dans la pratique est que, du point de vue du développement de code informatique, elle se construit autour d'un solveur du problème formulé sur un seul scénario à la fois : si un tel solveur est disponible (il est raisonnable de le penser puisque ce solveur permet de résoudre le problème posé dans le cadre *déterministe*), il constituera la brique logicielle essentielle du problème *stochastique*.

4.2.1 Principe de la décomposition par scénario

Le principe de la méthode du Progressive Hedging (PH) est de résoudre le problème d'optimisation formulé sur un arbre de scénarios en le *décomposant* scénario par scénario : ainsi, on ne résoud que des sous-problèmes d'optimisation que l'on suppose de taille raisonnable, en utilisant les techniques de la commande optimale déterministe classique (par exemple le principe du minimum de Pontryagin) puisque un unique scénario entre en jeu dans chacun des sous-problèmes obtenus par cette décomposition.

Bien sûr, on ne peut pas se contenter de résoudre les sous-problèmes indépendamment les uns des autres car les scénarios sont couplés entre eux. Comme on l'a vu au §4.1, certains nœuds de l'arbre sont communs à plusieurs scénarios : quand on résoud les sous-problèmes associés

2. c'est-à-dire vérifiant les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité

à deux scénarios différents, il n'y a aucune raison a priori pour que les commandes obtenues sur ces deux scénarios soient identiques sur leurs nœuds communs. On ne peut donc pas se contenter de décomposer le problème, et il faut ajouter un mécanisme prenant en compte ce type de contraintes entre les commandes. Ces contraintes correspondent à ce que l'on a appelé les contraintes de non-anticipativité, et le mécanisme assurant leur satisfaction est la *coordination*.

Remarque 26. Comme on l'a déjà vu, les contraintes d'égalité entre commandes sur les passés communs des scénarios sont naturellement « codées en dur » dans la structure de l'arbre de scénarios. La méthode du Progressive Hedging consiste à relaxer ces contraintes pour échapper à la malédiction de la dimension mentionnée à la remarque 25. \diamond

4.2.2 Modélisation mathématique

On se donne un horizon temporel discret dont la durée est notée T , chaque instant t de cet horizon appartenant donc à l'ensemble $\llbracket 1, T \rrbracket$. On se donne aussi un ensemble S de scénarios d'aléas définis sur cet horizon temporel, de cardinal N_S . Chaque scénario $s \in S$ correspond à une collection de valeurs de l'aléa à chaque instant de l'horizon :

$$s = (s_1, \dots, s_t, \dots, s_T) .$$

À chaque scénario s est associée une probabilité p_s , et on a donc :

$$\sum_{s \in S} p_s = 1 .$$

On note x_s la collection des commandes que l'on doit choisir le long du scénario s :

$$x_s = (x_{1,s}, \dots, x_{t,s}, \dots, x_{T,s}) ,$$

avec $x_{t,s} \in \mathbb{R}^m$ et donc $x_s \in \mathbb{R}^{mT}$. On se donne enfin une fonction de coût $f_s : \mathbb{R}^{mT} \rightarrow \mathbb{R}$ et un sous-ensemble $C_s \subset \mathbb{R}^{mT}$. Le problème d'optimisation associé au scénario s s'écrit alors :

$$\inf_{x_s \in C_s} f(x_s) . \quad (4.4)$$

On définit alors l'ensemble des *stratégies* de commande, c'est-à-dire les applications qui à chaque scénario s associent une collection x_s de commandes.

Définition 12. L'ensemble \mathcal{E} des *stratégies* du problème est l'ensemble des applications X qui, à un scénario s , associe une collection de commandes x_s le long du scénario :

$$\mathcal{E} = \left\{ X : S \rightarrow \mathbb{R}^{mT} , s \mapsto x_s = X(s) = (X_1(s), \dots, X_t(s), \dots, X_T(s)) \right\} . \quad (4.5a)$$

L'ensemble \mathcal{E} est un espace vectoriel de dimension finie que l'on peut munir d'un produit scalaire :

$$\langle X, Y \rangle_S = \sum_{s \in S} p_s \langle X(s), Y(s) \rangle_{\mathbb{R}^{mT}} . \quad (4.5b)$$

la norme associée étant :

$$\|X\|_S = \sqrt{\sum_{s \in S} p_s \|X(s)\|_{\mathbb{R}^{mT}}^2} . \quad (4.5c)$$

Une fois défini l'espace des stratégies, on précise celles qui vont satisfaire les contraintes du problème. Une première limitation correspond aux valeurs des commandes qui doivent appartenir aux ensembles C_s .

Définition 13. Une stratégie $X \in \mathcal{E}$ est dite *admissible* si elle vérifie la contrainte :

$$\forall s \in S, \quad X(s) \in C_s, \quad (4.6)$$

et on note \mathcal{C} le sous ensemble des stratégies de \mathcal{E} qui sont admissibles.

Une seconde limitation concerne la contrainte de non-anticipativité, qui dit qu'une stratégie doit proposer les mêmes commandes sur les portions communes des scénarios.

Définition 14. Une stratégie $X \in \mathcal{E}$ est dite *non-anticipative* si elle vérifie la contrainte :

$$\forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket, \quad \forall A \in A_t, \quad \forall (s, s') \in A \times A, \quad \forall \tau \in \llbracket 1, t \rrbracket, \quad X_\tau(s) = X_\tau(s'). \quad (4.7)$$

et on note \mathcal{N} le sous ensemble des stratégies de \mathcal{E} qui sont non-anticipatives. Ce sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de l'espace \mathcal{E} .

On dira qu'une stratégie X est *réalisable* si elle est à la fois admissible et non anticipative :

$$X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{N}.$$

On est alors en mesure de poser le problème d'optimisation stochastique sur l'arbre de scénarios. Notant :

$$F(X) = \sum_{s \in S} p_s f_s(X(s)),$$

le problème s'écrit sous la forme suivante :

$$\inf_{X \in \mathcal{C} \cap \mathcal{N}} F(X). \quad (4.8)$$

Le problème (4.8) formulé sur l'arbre de scénarios est bien celui que l'on souhaite traiter comme approximation du « vrai » problème d'optimisation stochastique :

- le coût $F(X)$ correspond à l'approximation sur l'arbre de l'espérance du coût,
- l'équation $X \in \mathcal{C}$ représente les contraintes portant sur l'admissibilité des commandes,
- l'équation $X \in \mathcal{N}$ représente les contraintes de causalité entre les scénarios.

4.2.3 Opérateur d'agrégation

Pour définir l'algorithme du Progressive Hedging, on a besoin d'un opérateur permettant d'associer à toute stratégie X une stratégie non anticipative \widehat{X} . Cet opérateur est défini comme suit.

Définition 15. L'opérateur d'agrégation $\mathcal{J} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}$ associe à une stratégie quelconque $X \in \mathcal{E}$ la stratégie non anticipative $\widehat{X} \in \mathcal{N}$ obtenue en faisant à chaque instant t la moyenne pondérée des valeurs de X par paquet de scénarios de la partition A_t :

$$\forall X \in \mathcal{E}, \quad \forall t \in \llbracket 1, T \rrbracket, \quad \forall A \in A_t, \quad \forall s \in A, \quad \widehat{X}_t(s) = \frac{\sum_{s' \in A} p_{s'} X_t(s')}{\sum_{s' \in A} p_{s'}}. \quad (4.9)$$

La valeur commune de la stratégie \widehat{X} pour tous les scénarios d'un même paquet $A \in A_t$ est noté $\widehat{X}_t(A)$:

$$\forall s \in A, \quad \widehat{X}_t(s) = \widehat{X}_t(A).$$

Exemple 5. Dans l'exemple de la figure 4.2, on note (p_a, p_b, p_c) la probabilité des scénarios. L'opérateur d'agrégation appliquée à une stratégie X fournit la stratégie non-anticipative \widehat{X} suivante :

$$\begin{aligned} t = 1 & : \widehat{X}_1(s^a) = \widehat{X}_1(s^b) = \widehat{X}_1(s^c) = p_a X_1(s^a) + p_b X_1(s^b) + p_c X_1(s^c), \\ t = 2 & : \widehat{X}_2(s^a) = \widehat{X}_2(s^b) = \widehat{X}_2(s^c) = p_a X_2(s^a) + p_b X_2(s^b) + p_c X_2(s^c), \\ t = 3 & : \widehat{X}_3(s^a) = X_3(s^a), \widehat{X}_3(s^b) = \widehat{X}_3(s^c) = (p_b X_3(s^b) + p_c X_3(s^c)) / (p_b + p_c), \\ t = 4 & : \widehat{X}_4(s^a) = X_4(s^a), \widehat{X}_4(s^b) = X_4(s^b), \widehat{X}_4(s^c) = X_4(s^c). \end{aligned}$$

On rappelle que l'on a $p_a + p_b + p_c = 1$ par définition d'une loi de probabilité. \triangle

Remarque 27. On notera que l'opérateur \mathcal{J} ne conserve a priori pas l'admissibilité :

$$X \in \mathcal{C} \not\Rightarrow \mathcal{J}(X) \in \mathcal{C}.$$

Ainsi, sur l'exemple de la figure 4.2, supposant que les scénarios b et c sont équiprobables et que la relation d'admissibilité $X(s) \in C_s$ soit simplement $X_3(s) \leq X_4(s)$ (ce qui implique que l'ensemble \mathcal{C} est convexe...), on vérifie qu'avoir $X_3(s^b) \leq X_4(s^b)$ et $X_3(s^c) \leq X_4(s^c)$ n'implique pas toujours que $(X_3(s^b) + X_3(s^c))/2 \leq \min \{X_4(s^b), X_4(s^c)\}$. \diamond

La proposition suivante montre que l'opérateur \mathcal{J} correspond à une projection orthogonale.

Proposition 15. *L'opérateur linéaire \mathcal{J} correspond à la projection orthogonale, sur \mathcal{N} pour la norme $\|\cdot\|_S$: c'est donc un opérateur symétrique et idempotent :*

$$\mathcal{J}^\top = \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}^2 = \mathcal{J}.$$

En conséquence, une stratégie $X \in \mathcal{E}$ est non-anticipative si et seulement si elle vérifie :

$$X = \mathcal{J}(X).$$

Démonstration. La preuve est laissée au soin du lecteur. \square

On introduit alors l'opérateur \mathcal{K} associé à la projection orthogonale \mathcal{J} .

Définition 16. On définit l'opérateur $\mathcal{K} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{K} = \text{Id} - \mathcal{J}.$$

Les propriétés de l'opérateur \mathcal{K} sont données par la proposition suivante.

Proposition 16. *L'opérateur \mathcal{K} est l'opérateur de projection orthogonale sur le sous-espace \mathcal{M} orthogonal au sous-espace des stratégies non anticipatives \mathcal{N} :*

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp.$$

En conséquence, une stratégie $X \in \mathcal{E}$ est non-anticipative si et seulement si on a :

$$\mathcal{K}(X) = 0.$$

Démonstration. La preuve est laissée au soin du lecteur. \square

On déduit de ces propositions que le problème d'optimisation (4.8) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\inf_{X \in \mathcal{C}} F(X) , \quad (4.10a)$$

$$\text{sous } \mathcal{K}(X) = 0 . \quad (4.10b)$$

Le problème (4.10) est appelé *problème primal*, et il est équivalent à :

$$\inf_{X \in \mathcal{C}} \sup_{W \in \mathcal{E}} F(X) + \langle W, \mathcal{K}(X) \rangle . \quad (4.11)$$

Le *problème dual* du problème (4.10) s'écrit :

$$\sup_{W \in \mathcal{E}} \inf_{X \in \mathcal{C}} F(X) + \langle W, \mathcal{K}(X) \rangle . \quad (4.12)$$

4.2.4 Algorithme du Progressive Hedging

On est maintenant en mesure de décrire la méthode du Progressive Hedging.

4.2.4.1 Principe de la méthode

La méthode du Progressive Hedging consiste à résoudre le problème (4.10) en dualisant la contrainte (4.10b) à l'aide d'un Lagrangien augmenté de paramètre $r > 0$. Notant W le multiplicateur associé à la contrainte, l'expression de ce Lagrangien est

$$L_r(X, W) = F(X) + \langle W, \mathcal{K}(X) \rangle_S + \frac{r}{2} \|\mathcal{K}(X)\|_S^2 ,$$

et donc, par définition de l'opérateur \mathcal{K} et comme cet opérateur est symétrique,

$$= F(X) + \langle X, \mathcal{K}(W) \rangle_S + \frac{r}{2} \|X - \widehat{X}\|_S^2 .$$

Comme l'opérateur \mathcal{K} est la projection orthogonale sur \mathcal{M} , on a $\mathcal{K}(W) = W$ pour tout $W \in \mathcal{M}$. On a donc :

$$\forall (X, W) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M} , \quad L_r(X, W) = F(X) + \langle X, W \rangle_S + \frac{r}{2} \|X - \widehat{X}\|_S^2 .$$

Remarque 28. On déduit des considérations précédentes que le problème dual (4.12) s'écrit de manière équivalente :

$$\sup_{W \in \mathcal{M}} \inf_{X \in \mathcal{C}} F(X) + \langle W, X \rangle ,$$

puisque $\mathcal{K}(W) = W$ pour tout $W \in \mathcal{M}$. ◇

La première idée du Progressive Hedging est d'appliquer l'algorithme du Lagrangien augmenté en initialisant l'algorithme avec un $W^{(0)} \in \mathcal{M}$. L'itération k consiste donc à enchaîner les deux étapes suivantes :

- minimisation en X : $X^{(k+1)} \in \arg \min_{X \in \mathcal{C}} L_r(X, W^{(k)}) ,$
- mise à jour en W : $W^{(k+1)} = W^{(k)} + r \mathcal{K}(X^{(k+1)}) .$

On notera que l'on a toujours $W^{(k+1)} \in \mathcal{M}$ puisque l'opérateur \mathcal{K} est à valeurs dans \mathcal{M} .

Cependant, cet algorithme de Lagrangien augmenté n'est pas *décomposable* scénario par scénario dans la mesure où le terme :

$$\|X - \widehat{X}\|_S^2 = \sum_{s \in S} p_s \|X(s) - \widehat{X}(s)\|_{\mathbb{R}^{mT}}^2,$$

induit des couplages entre les scénarios, les valeurs $\widehat{X}_t(s)$ devant être identiques pour tous les éléments d'un même paquet de scénarios de la partition A_t . La seconde idée, mise en œuvre pour palier cette difficulté, est d'effectuer une « relaxation locale » de la contrainte : on remplace dans l'étape de minimisation en X du Lagrangien le terme quadratique $\|X - \widehat{X}\|_S^2$ par le terme $\|X - \widehat{X}^{(k)}\|_S^2$, avec $\widehat{X}^{(k)}$ fixé, la valeur $\widehat{X}^{(k)}$ étant mise à jour dans une autre phase de l'algorithme.

4.2.4.2 Algorithme proprement dit

Sur la base des idées développées au paragraphe précédent, l'algorithme du Progressive Hedging s'écrit comme suit.

Algorithme 6.

1. Initialisation. Choisir une stratégie $X^{(0)} \in \mathcal{E}$, un multiplicateur $W^{(0)} \in \mathcal{M}$ et une tolérance de convergence $\sigma > 0$. Calculer $\widehat{X}^{(0)} = \mathcal{J}(X^{(0)})$ et poser $k = 0$.
2. Itération k .
 - a) Calculer $X^{(k+1)}(s) \in \arg \min_{x \in C_s} f_s(x) + \langle x, W_s^{(k)} \rangle_{\mathbb{R}^{mT}} + \frac{r}{2} \|x - \widehat{X}^{(k)}(s)\|_{\mathbb{R}^{mT}}^2 \quad \forall s \in S$.
 - b) Calculer $W^{(k+1)} = W^{(k)} + r \mathcal{K}(X^{(k+1)})$.
 - c) Calculer $\widehat{X}^{(k+1)} = \mathcal{J}(X^{(k+1)})$.
3. Test d'arrêt. Si $\|X^{(k+1)} - \widehat{X}^{(k+1)}\|_S \leq \sigma$, stop. Sinon, incrémenter k et retourner en (1).

L'étape a) de l'itération k de cet algorithme correspond à la minimisation en X du Lagrangien augmenté L_r à $W = W^{(k)}$ et $\widehat{X} = \widehat{X}^{(k)}$ fixés. Cette étape se décompose naturellement scénario par scénario car la minimisation globale en X porte sur une somme de termes ne dépendant chacun que d'un seul scénario. L'étape b) est la remise à jour du multiplicateur par un pas de gradient de longueur r . À l'étape c), on projette la solution $X^{(k+1)}$ sur le sous-espace \mathcal{N} des stratégies non anticipatives.

4.2.4.3 Interprétation proximale

Pour effectuer une interprétation proximale de l'algorithme du Progressive Hedging, on introduit la fonction \widetilde{L}_r suivante :

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_r : \mathcal{N} \times \mathcal{M} &\rightarrow [-\infty, +\infty] \\ (X, W) &\mapsto \inf_{Y \in \mathcal{M}} \frac{1}{r} F(Y + rX) + \chi_{\mathcal{C}}(Y + rX) + \langle Y, W \rangle, \end{aligned}$$

où $\chi_{\mathcal{C}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble \mathcal{C} :

$$\chi_{\mathcal{C}}(Y) = \begin{cases} 0 & \text{si } Y \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}.$$

On note alors :

$$T_r = \partial_X \widetilde{L}_r \left(X, \frac{W}{r} \right) \times \partial_W (-L_r) \left(X, \frac{W}{r} \right).$$

Théorème 26. *L'algorithme du Progressive Hedging avec paramètre fixe r est l'algorithme proximal associé à l'opérateur T_r avec paramètre unité.*

Démonstration. Voir [Rockafellar and Wets (1991), Theorem 5.1]. \square

4.2.4.4 Convergence

On se place dans le cadre d'hypothèses suivant.

Hypothèse 5.

1. Pour tout $s \in S$, le sous-ensemble C_s de \mathbb{R}^{mT} est fermé non vide.
2. Pour tout $s \in S$, la fonction f_s est convexe et coercive sur C_s .

On dispose alors des deux propositions suivantes.

Proposition 17. *Sous l'hypothèse 5, on a que :*

- chaque sous-problème $\inf_{x \in C_s} f_s(x)$ admet au moins une solution x_s^\sharp , qui a pour valeur f_s^\sharp ,
- la somme pondérée par les poids de probabilité p_s des valeurs optimales f_s^\sharp fournit une borne inférieure de la valeur optimale du problème primal (4.10).

Démonstration. Cela provient de résultats classiques de l'optimisation en dimension finie. \square

Proposition 18. *Sous l'hypothèse 5, les sous-problèmes de minimisation à résoudre à chaque itération de l'algorithme du Progressive Hedging admettent au moins une solution.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la proposition précédente. \square

On introduit une notion de norme pour le couple de variables primale et duale.

Définition 17. On définit la *norme- r* d'un couple primal-dual $(X, W) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ par :

$$\|(X, W)\|_r = \sqrt{\|X\|_S^2 + \frac{1}{r^2} \|W\|_S^2}$$

La convergence de l'algorithme du Progressive Hedging est donnée par le théorème suivant.

Théorème 27. *On suppose que les ensembles C_s sont convexes fermés non vides et que les fonctions f_s sont convexes et coercives. Alors, les suites $\{\widehat{X}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{W^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ engendrées par l'algorithme du Progressive Hedging sont bornées si et seulement si le problème primal (4.11) et le problème dual (4.12) admettent des solutions, et on a alors que :*

- la suite $\{(\widehat{X}^{(k)}, W^{(k)})\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution primale-duale (X^\sharp, W^\sharp) ,
- pour tout k , $\|(\widehat{X}^{(k+1)}, W^{(k+1)}) - (X^\sharp, W^\sharp)\|_r \leq \|(\widehat{X}^{(k)}, W^{(k)}) - (X^\sharp, W^\sharp)\|_r$
avec inégalité stricte si $(\widehat{X}^{(k)}, W^{(k)}) \neq (X^\sharp, W^\sharp)$,
- pour tout k , $\|(\widehat{X}^{(k+1)}, W^{(k+1)}) - (\widehat{X}^{(k)}, W^{(k)})\|_r \leq \|(\widehat{X}^{(k)}, W^{(k)}) - (\widehat{X}^{(k-1)}, W^{(k-1)})\|_r$.

Démonstration. Voir [Rockafellar and Wets (1991)]. \square

Dans le cas linéaire-quadratique, on dispose du résultat suivant précisant la vitesse de convergence de l'algorithme du Progressive Hedging.

Théorème 28. *Si on suppose que :*

- la fonction F est quadratique convexe,

— les ensembles C_s sont définis par des contraintes linéaires,
 — les problèmes (4.11) et (4.12) admettent chacun une solution unique,
 alors l'algorithme du Progressive Hedging converge q -linéairement :

$$\exists Q_r \in]0, 1[, \quad \|(\widehat{X}^{(k+1)}, W^{(k+1)}) - (X^\#, W^\#)\|_r \leq Q_r \|(\widehat{X}^{(k)}, W^{(k)}) - (X^\#, W^\#)\|_r \quad \forall k .$$

Démonstration. Voir [Rockafellar and Wets (1991)]. □

Remarque 29. Il existe aussi des résultats de convergence de l'algorithme du Progressive Hedging

- lorsque les sous-problèmes de minimisation sont résolus de manière approchée,
- dans des cas non convexes.

On pourra par exemple consulter [Watson and Woodruff, 2011] pour une approche dans le cas non convexe (en nombres entiers). ◇

4.2.4.5 Choix des paramètres de réglages

Le coefficient r du Lagrangien augmenté, dit *paramètre de pénalisation*, doit être choisi « assez grand » pour que la convergence de l'algorithme soit suffisamment rapide. Mais il faut aussi éviter d'introduire dans le problème un terme quadratique « trop important », qui aurait pour conséquence une vérification prématurée du critère d'arrêt de l'algorithme. . .

On notera qu'il existe des résultats théoriques permettant de calibrer au mieux ce paramètre r . Il existe même des versions heuristiques de l'algorithme dans lesquelles r varie au cours des itérations. Mais dans ce cas, il n'est plus possible de garantir la convergence. Pour un contre-exemple de convergence avec un paramètre r variable, et plus généralement pour une présentation détaillée, tant théorique que pratique, de l'algorithme du Progressive Hedging, on consultera [Chiche (2012)].

