1 Contrôle des connaissances 2020/2021

Remarque préliminaire importante

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre. Le premier problème compte pour 60% de la note, et le second pour 40%.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,
- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition et de la coordination, on précisera systématiquement les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,
- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement les variables à optimiser de celles qui sont figées à cette itération ; ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr conseillé de lire entièrement et attentivement les énoncés des problèmes…

Premier problème : vallée hydraulique convergente

Formulation du problème. On considère, sur un horizon de temps discret $\{0, 1, \ldots, T\}$, un ensemble composé de quatre barrages produisant de l'électricité en turbinant l'eau qu'ils contiennent. Le système est fait de telle sorte que l'eau turbinée par les barrages 1 et 2 est collectée par le barrage 3, et que l'eau turbinée par le barrage 3 est collectée par le barrage 4 (voir Figure 1).

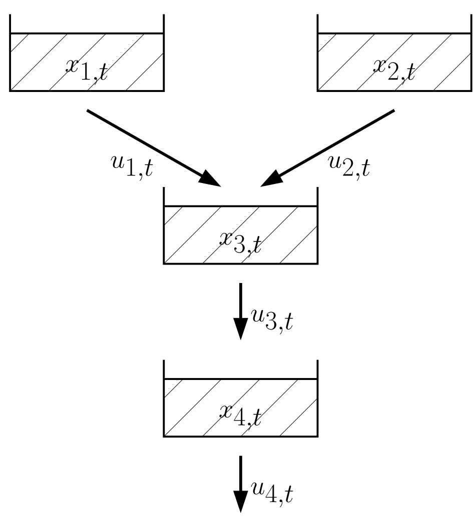

Figure 1 – Vallée hydraulique convergente à quatre barrages

Pour chaque barrage $i = 1, 2, 3, 4$, on note $x_{i,t}$ le volume d'eau contenu dans le barrage à l'instant t et $u_{i,t}$ la quantité d'eau turbinée par le barrage durant l'intervalle de temps $[t, t+1[$. Les équations décrivant la dynamique des barrages 1 et 2 au cours du temps sont les suivantes :

$$x_{1,0} \quad \text{donné} \;, \tag{1a}$$

$$x_{1,t+1} = f_{1,t}\big(x_{1,t}, u_{1,t}\big) \;, \qquad t = 0, \ldots, T-1 \;, \tag{1b}$$

$$x_{2,0} \quad \text{donné} , \tag{2a}$$
$$x_{2,t+1} = f_{2,t}\big(x_{2,t}, u_{2,t}\big) , \qquad t = 0, \ldots, T-1 , \tag{2b}$$

les équations décrivant la dynamique du troisième barrage sont :

$$x_{3,0} \quad \text{donné} , \tag{3a}$$
$$x_{3,t+1} = f_{3,t}\big(x_{3,t}, u_{3,t}, u_{1,t} + u_{2,t}\big) , \qquad t = 0, \ldots, T-1 . \tag{3b}$$

On remarquera la présence du terme $u_{1,t}+u_{2,t}$ dans les équations décrivant la dynamique du barrage 3, qui matérialise le fait que les barrages 1 et 2 se déversent dans le barrage 3. Enfin, les équations décrivant la dynamique du quatrième barrage sont :

$$x_{4,0} \quad \text{donné} , \tag{4a}$$
$$x_{4,t+1} = f_{4,t}\big(x_{4,t}, u_{4,t}, u_{3,t}\big) , \qquad t = 0, \ldots, T-1 , \tag{4b}$$

où l'on notera la présence du terme $u_{3,t}$ dû au fait que l'eau turbinée par la barrage 3 se déverse dans le barrage 4.

Les quantités d'eau turbinées à chaque barrage i et à chaque instant t sont soumises à des contraintes de bornes :

$$u_{i,t} \in [\underline{u}_i, \overline{u}_i] , \qquad i = 1,2,3,4 , \qquad t = 0, \ldots, T-1 . \tag{5}$$

Le coût [1] du barrage i à l'instant t est noté $L_{i,t}\big(x_{i,t}, u_{i,t}\big)$. Le coût total du barrage i s'écrit donc :

$$\sum_{t=0}^{T-1} L_{i,t}\big(x_{i,t}, u_{i,t}\big) . \tag{6}$$

Le but du problème est de minimiser la somme des coûts de tous les barrages en respectant l'ensemble des contraintes associées à leur fonctionnement. Pour cela, on cherche à mettre en œuvre sur ce problème des méthodes de décomposition/coordination, de telle sorte que chaque sous-problème que l'on formule dans l'étape de décomposition corresponde à la gestion d'un seul et unique barrage.

Question 1 — *Formulations détaillées du problème.*

1.a Écrire la formulation détaillée du problème d'optimisation décrit par les équations (1) à (6), et préciser dans quelles relations se trouvent les couplages entre les barrages.

1.b Pour pouvoir mettre en œuvre les méthodes de décomposition/coordination « classiques » (prix, allocation, prédiction), on transforme le problème en y introduisant les nouvelles variables $w_{3,t}$ et $w_{4,t}$ définies par les relations :

$$u_{1,t} + u_{2,t} - w_{3,t} = 0 , \qquad t = 0, \ldots, T-1 , \tag{7a}$$
$$u_{3,t} - w_{4,t} = 0 , \qquad t = 0, \ldots, T-1 . \tag{7b}$$

Écrire la formulation détaillée du problème d'optimisation obtenue en utilisant ces nouvelles variables $w_{3,t}$ et $w_{4,t}$ et en tenant compte des nouvelles contraintes (7). Expliquer en quoi cette nouvelle formulation permet d'appliquer les méthodes de décomposition « classiques ».

1. en fait l'opposé du gain procuré par la production électrique du barrage

Question 2 — *Formulations compactes du problème.*

On note $x_i = \big(x_{i,1}, \dots, x_{i,T}\big) \in \mathbb{R}^T$ et $u_i = \big(u_{i,0}, \dots, u_{i,T-1}\big) \in \mathbb{R}^T$ les trajectoires au cours du temps de l'état et de la commande du barrage i, $i = 1, 2, 3, 4$.

2.a Montrer que les équations de dynamique (1)-(2)-(3)-(4) décrivant la dynamique des quatre barrages se mettent sous la forme vectorielle suivante : [2]

$$x_1 = F_1(u_1) \ , \tag{8a}$$
$$x_2 = F_2(u_2) \ , \tag{8b}$$
$$x_3 = F_3(u_3, u_1 + u_2) \ , \tag{8c}$$
$$x_4 = F_4(u_4, u_3) \ , \tag{8d}$$

que les contraintes de bornes (5) se mettent sous la forme vectorielle :

$$u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \ , \tag{9}$$

et que le coût total (6) de chaque barrage i peut s'écrire sous la forme :

$$J_i\big(x_i, u_i\big) \ . \tag{10}$$

Avec ces nouvelles notations, écrire la formulation compacte du problème d'optimisation.

2.b On note $w_3 = \big(w_{3,0}, \dots, w_{3,T-1}\big)$ et $w_4 = \big(w_{4,0}, \dots, w_{4,T-1}\big)$ les trajectoires au cours du temps des variables ajoutées à la question **1.b**. Écrire les équations (7) avec ces nouvelles notations et écrire la formulation compacte du problème d'optimisation obtenue en utilisant les variables w_3 et w_4 et les contraintes associées.

Question 3 — *Décomposition par les prix.*

On part de la formulation du problème obtenue à la question **2.b**. Écrire l'algorithme de décomposition par les prix obtenu *en ne dualisant que les contraintes couplant les barrages entre eux* : on écrira dans les notations compactes les sous-problèmes à résoudre à l'itération k de l'algorithme (étape de décomposition) ainsi que la remise à jour des multiplicateurs (étape de coordination). Indiquer brièvement les conditions de convergence de cet algorithme.

Question 4 — *Décomposition par allocation de ressources.*

4.a Toujours à partir de la formulation obtenue à la question **2.b**, écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par allocation de ressources, et donner la formule de remise à jour des variables de coordination.

4.b Examiner les contraintes présentes dans les sous-problèmes associés aux barrages et discuter de la possibilité (ou non) de blocage dans la résolution de ces sous-problèmes.

Question 5 — *Décomposition par prédiction.*

Pour appliquer la méthode par prédiction, on choisit d'allouer les contraintes couplantes (7a) au sous-problème du barrage 3 et les contraintes couplantes (7b) au sous-problème du barrage 4. Dans la formulation de la question **2.b**, écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans cette méthode de décomposition, et préciser l'étape de coordination associée dans la mise en œuvre de type « point-fixe » de la méthode de prédiction.

2. la t-ème composante de l'application F_i correspondant à l'évolution du barrage i sur le pas de temps $[t-1, t[$

Question 6 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

6.a On utilise la formulation compacte du problème obtenue à la question **2.a**. Écrire le problème d'optimisation obtenu en substituant dans cette formulation les variables x_1, x_2, x_3 et x_4 par les expressions (8). On notera $\widehat{J}_i$ la fonction coût du barrage i après substitution.

6.b Appliquer le Principe du Problème Auxiliaire en choisissant les coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à 1 et avec la famille de noyaux de décomposition suivants :

$$K^{(k)}\big(u_1, u_2, u_3, u_4\big) = \widehat{J}_1\big(u_1\big) + \widehat{J}_2\big(u_2\big) + \widehat{J}_3\big(u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3\big) + \widehat{J}_4\big(u_3^{(k)}, u_4\big) \ .$$

Préciser à quelle méthode de décomposition « classique » s'apparente cet algorithme. Proposer un moyen de pouvoir choisir $\epsilon^{(k)} = 1$ dans le cas où les constantes de forte convexité des fonctions J_i ne sont pas assez grandes pour le permettre.

Formulation du problème. On considère, sur un horizon de temps discret $\{0, 1, \ldots, T\}$, trois stocks de produits dénommés respectivement H, M et L. On note $\mathcal{S} = \{\mathrm{H}, \mathrm{M}, \mathrm{L}\}$ l'ensemble des stocks et $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T-1\}$ l'ensemble des pas de temps de l'horizon d'optimisation. Chaque stock $\alpha \in \mathcal{S}$ est vide à l'instant initial, et on le remplit à chaque pas de temps t par une commande d'approvisionnement $u_{\alpha,t} \in \mathbb{R}$ qui induit un coût noté $L_{\alpha,t}(u_{\alpha,t})$. Les équations décrivant l'évolution du stock α sont écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} & x_{\alpha,0} = 0 \ , \\ & x_{\alpha,t+1} = f_{\alpha,t}(x_{\alpha,t}, u_{\alpha,t}) \ , \ \ t \in \mathcal{T} \ . \end{aligned}$$

L'état final $x_{\alpha,T}$ du stock α à l'instant T s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x_{\alpha,T} &= f_{\alpha,T-1}(x_{\alpha,T-1}, u_{\alpha,T-1}) \\ &= f_{\alpha,T-1}\big(f_{\alpha,T-2}(x_{\alpha,T-2}, u_{\alpha,T-2}), u_{\alpha,T-1}\big) \\ &\ \ \vdots \\ &= f_{\alpha,T-1}\Big(f_{\alpha,T-2}\big(\ldots f_{\alpha,1}(f_{\alpha,0}(0, u_{\alpha,0}), u_{\alpha,1}) \ldots, u_{\alpha,T-2}\big), u_{\alpha,T-1}\Big) \ . \end{aligned}$$

Notant $u_\alpha = \{u_{\alpha,0}, u_{\alpha,1}, \ldots, u_{\alpha,T-1}\} \in \mathbb{R}^T$ le vecteur des commandes d'approvisionnement au cours du temps du stock α, l'état final du stock α peut donc s'écrire comme une fonction f_α du vecteur u_α :

$$x_{\alpha,T} = f_\alpha(u_\alpha) \ . \tag{11}$$

De même, le coût total associé au stock α est la somme au cours du temps des coûts d'approvisionnement du stock α, que l'on peut écrire comme une fonction J_α du vecteur u_α :

$$J_\alpha(u_\alpha) = \sum_{t \in \mathcal{T}} L_{\alpha,t}(u_{\alpha,t}) \ . \tag{12}$$

À la fin de l'horizon d'optimisation, les stocks sont mélangés et le volume total z_T de produit disponible est alors :

$$z_T = \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} x_{\alpha,T} \ . \tag{13}$$

Cette quantité totale z_T est alors traitée : lui appliquant une commande $u_T \in \mathbb{R}^d$, le traitement induit un coût noté :

$$J_T(z_T, u_T) \ . \tag{14}$$

Enfin, les variables de décision $u_{\alpha,t}$ et u_T sont soumises à des contraintes de bornes :

$$\begin{aligned} & u_{\alpha,t} \in [0, \overline{u}_\alpha] \ , \ \ \forall \alpha \in \mathcal{S} \ , \ \ \forall t \in \mathcal{T} \ , \\ & u_T \in [\underline{u}_T, \overline{u}_T] \ , \end{aligned}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$u_\alpha \in U_\alpha^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^T \ , \tag{15a}$$

$$u_T \in U_T^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^d \ . \tag{15b}$$

Le but du problème est de minimiser la somme des coûts d'approvisionnement des stocks et du coût de traitement en respectant les contraintes associées. Pour cela, on cherche à mettre en œuvre sur ce problème des méthodes de décomposition/coordination, de manière à formuler dans l'étape de décomposition un sous-problème pour chaque stock et un sous-problème associé au traitement.

Question 1 — *Formulation du problème.*

Écrire la formulation du problème d'optimisation décrit par les équations (11)–(12)–(13)–(14)–(15), et préciser dans quelles relations se trouvent les couplages entre les stocks et le traitement.

Question 2 — *Décomposition par les prix.*

Écrire l'algorithme de décomposition par les prix appliqué au problème formulé à la question **1**, *en ne dualisant que la contrainte couplant les stocks et le traitement.* On écrira précisément les sous-problèmes à résoudre à l'itération k de l'algorithme (étape de décomposition) ainsi que la remise à jour des multiplicateurs (étape de coordination).

Question 3 — *Décomposition par allocation de ressources.*

3.a Toujours à partir de la formulation obtenue à la question **1**, écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par allocation de ressources,[3] et donner la formule de remise à jour des variables de coordination.

3.b Que pensez vous des possibilités de blocage de cet algorithme (réponse à justifier).

Question 4 — *Décomposition par prédiction.*

Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans l'algorithme de décomposition par prédiction, en affectant la contrainte couplante au sous-problème associé au traitement. Donner l'étape de coordination associée dans la mise en œuvre de type « point-fixe » de la méthode de prédiction.

Question 5 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

5.a Substituant dans le coût de traitement (14) la variable z_T par sa valeur donnée par les équations (13) et (11), on obtient un critère ne dépendant plus que des variables u_{H}, u_{M}, u_{L} et u_T. Écrire l'algorithme de décomposition obtenu en y appliquant le Principe du Problème Auxiliaire au problème avec le choix suivant de noyaux de décomposition :

$$K\big(u_{\mathrm{H}}, u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{L}}, u_T\big) = J_{\mathrm{H}}\big(u_{\mathrm{H}}\big) + J_{\mathrm{M}}\big(u_{\mathrm{M}}\big) + J_{\mathrm{L}}\big(u_{\mathrm{L}}\big) + \frac{1}{2a}\|u_T\|^2 .$$

5.b Même question qu'à la question **5.a** avec le choix de noyaux de décomposition :

$$K^{(k)}\big(u_{\mathrm{H}}, u_{\mathrm{M}}, u_{\mathrm{L}}, u_T\big) = J_{\mathrm{H}}\big(u_{\mathrm{H}}\big) + J_{\mathrm{M}}\big(u_{\mathrm{M}}\big) + J_{\mathrm{L}}\big(u_{\mathrm{L}}\big) + J_T\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}} f_\alpha(u_\alpha^{(k)}), u_T\Big) .$$

Préciser à quelle méthode de décomposition « classique » s'apparente l'algorithme ainsi obtenu.

5.c Donner les conditions permettant de choisir dans ces algorithmes du PPA les coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à 1.

3. On appliquera de manière directe la méthode, sans chercher une allocation adaptée au problème.