1 Contrôle des connaissances 2015/2016

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre. Le premier problème compte pour 60% de la note, et le second pour 40%.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition et de la coordination, on précisera systématiquement les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,
- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération ; ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr conseillé de lire entièrement et attentivement les énoncés des problèmes. . .

Premier problème : système de barrages ≪ en Y ≫.

Formulation détaillée. On considère, sur un horizon de temps discret $\{0, 1, \ldots, T\}$, un ensemble composé de trois barrages produisant de l'électricité en turbinant l'eau qu'ils contiennent. Le système est fait de telle sorte que l'eau turbinée par les barrages 1 et 2 est collectée par le barrage 3 (voir la figure 1).

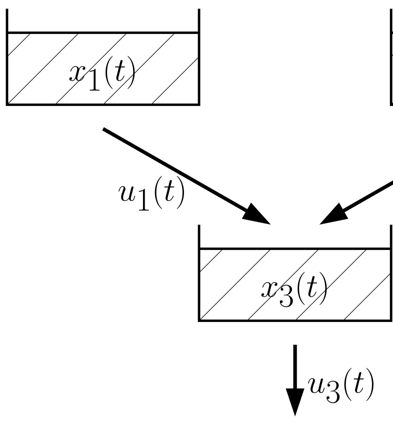

Figure 1: Schéma d'interconnexion du système des trois barrages

Pour chaque barrage i (avec $i = 1, 2, 3$), on note $x_i(t)$ le volume d'eau contenu dans le barrage à l'instant t et $u_i(t)$ la quantité d'eau turbinée par le barrage durant l'intervalle de temps $[t, t+1[$. Les équations décrivant la dynamique des barrages 1 et 2 au cours du temps sont les suivantes :

$$x_1(0) \quad \text{donné} \, , \tag{1a}$$

$$x_1(t+1) = f_1\big(x_1(t), u_1(t), t\big) \, , \quad t = 0, \ldots, T-1 \, , \tag{1b}$$

$$x_2(0) \quad \text{donné} \, , \tag{2a}$$

$$x_2(t+1) = f_2\big(x_2(t), u_2(t), t\big) \, , \quad t = 0, \ldots, T-1 \, , \tag{2b}$$

et les équations décrivant la dynamique du troisième barrage sont comme suit :

$$x_3(0) \quad \text{donné} \; , \tag{3a}$$

$$x_3(t+1) = f_3\big(x_3(t), u_3(t), u_1(t) + u_2(t), t\big) \; , \quad t = 0, \ldots, T-1 \; . \tag{3b}$$

On remarquera la présence des termes $u_1(t) + u_2(t)$ dans ces dernières équations, qui matérialisent le fait que les barrages 1 et 2 se déversent dans le barrage 3. De plus, le volume de chacun des barrages est astreint à rester entre des bornes correspondant à la capacité minimale et maximale du barrage, ce qui conduit aux contraintes suivantes pour chaque barrage $i = 1, 2, 3$:

$$\underline{x}_i \le x_i(t) \le \overline{x}_i \; , \quad t = 1, \ldots, T \; . \tag{4}$$

Le coût[1] du barrage i à l'instant t est noté $C_i\big(x_i(t), u_i(t), t\big)$, et on note $F_i\big(x_i(T)\big)$ le coût de pénalité associé au volume contenu dans le barrage à l'instant final T. Le coût total du barrage i s'écrit donc :

$$\sum_{t=0}^{T-1} C_i\big(x_i(t), u_i(t), t\big) + F_i\big(x_i(T)\big) \; . \tag{5}$$

Formulation compacte. Notant $X_i = \big(x_i(1), \ldots, x_i(T)\big)$ et $U_i = \big(u_i(0), \ldots, u_{i,}(T-1)\big)$ les trajectoires au cours du temps de l'état et de la commande du barrage i, les equations (1) et (2) décrivant la dynamique des barrages 1 et 2 se mettent respectivement sous la forme vectorielle :

$$\Theta_1\big(X_1, U_1\big) = 0 \; , \tag{6}$$

$$\Theta_2\big(X_2, U_2\big) = 0 \; , \tag{7}$$

avec $\Theta_i \; : \; \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ pour $i = 1, 2$, la t-ème composante de l'application Θ_i correspondant à l'évolution du barrage i sur le pas de temps $[t-1, t]$: $\Theta_{i,t}\big(X_i, U_i\big) = f_i\big(x_i(t-1), u_i(t-1), t-1\big) - x_i(t)$. De manière analogue, les équations (3) décrivant la dynamique du barrage 3 s'écrivent sous la forme :

$$\Theta_3\big(X_3, U_3, U_1 + U_2\big) = 0 \; . \tag{8}$$

Les contraintes de bornes (4) se mettent, avec des notations évidentes, sous la forme vectorielle :

$$X_i \in \big[\underline{X}_i, \overline{X}_i\big] \; . \tag{9}$$

Enfin, le coût total (5) de chaque barrage i, pour $i = 1, 2, 3$, peut lui aussi s'écrire sous la forme :

$$J_i\big(X_i, U_i\big) \; . \tag{10}$$

Le but du problème est de minimiser la somme des coûts de tous les barrages en respectant l'ensemble des contraintes associées à leur fonctionnement. Pour cela, on cherche à mettre en œuvre sur ce problème les méthodes de décomposition/coordination, de telle sorte que chacun des sous-problèmes que l'on formule dans l'étape de décomposition corresponde à la gestion d'un seul et unique barrage.

Question 1 — *Formulation du problème.*

1.a Écrire le problème d'optimisation à résoudre, d'abord dans la formulation détaillée initiale du problème, puis en utilisant les notations compactes.

[1] en fait l'opposé du gain procuré par la production électrique du barrage

1.b Pour pouvoir mettre en œuvre les méthodes de décomposition/coordination "classiques" (prix, allocation, prédiction), on transforme le problème en y introduisant les nouvelles variables $\widehat{u}_3(t)$ définies par la relation :

$$\widehat{u}_3(t) = u_1(t) + u_2(t) \ , \quad t = 0, \dots, T-1 \ ,$$

ainsi que la notation compacte : $\widehat{U}_3 = \big(\widehat{u}_3(0), \dots, \widehat{u}_3(T-1)\big)$. Écrire dans les notations compactes le problème d'optimisation obtenu en utilisant ces nouvelles variables et en tenant compte de ces nouvelles contraintes. Identifier dans ce dernier problème la relation qui induit un couplage entre les barrages.

Question 2 — *Décomposition par les prix.*

2.a On part de la formulation du problème obtenue à la question **1.b**. Écrire l'algorithme de décomposition par les prix obtenu *en ne dualisant que les contraintes couplant les barrages entre eux* : on écrira dans les notations compactes les sous-problèmes à résoudre à l'itération k de l'algorithme (étape de décomposition) ainsi que la remise à jour des multiplicateurs (étape de coordination). Indiquer brièvement les conditions de convergence de cet algorithme.

2.b On reprend le sous-problème d'optimisation obtenu lors de la question précédente pour le barrage 3. Écrire ce sous-problème dans les notations détaillées initiales. Appliquer la méthode de programmation dynamique à ce sous-problème et écrire les équations permettant le calcul de la fonction de Bellman associée.

Question 3 — *Décomposition par allocation de ressources.*

3.a Toujours à partir de la formulation obtenue à la question **1.b**, écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k de l'algorithme de décomposition par allocation de ressources[2], et donner la formule de remise à jour des variables de coordination.

3.b Revenant aux notations détaillées initiales, examiner les contraintes présentes dans les sous-problèmes associés aux barrages 1 et 2 et discuter de la possibilité (ou de l'impossibilité) de résoudre ces sous-problèmes de manière effective.

3.c Répondre aux mêmes interrogations qu'à la question **3.b** pour ce qui concerne le sous-problème associé au barrage 3.

Question 4 — *Décomposition par prédiction.*

4.a On part encore de la formulation du problème obtenue à la question **1.b**. Justifier en fonction des conclusions obtenues à la question **3** le fait d'allouer la contrainte couplante au sous-problème associé au barrrage 3 dans la méthode de décomposition par prédiction.

4.b Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans cette méthode de décomposition, et préciser l'étape de coordination associée dans la mise en œuvre de type "point-fixe" de la méthode de prédiction.

Question 5 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

Dans cette question, on suppose que les contraintes (4) de bornes sur le volume des barrages ne sont plus présentes dans la formulation du problème.

[2] On appliquera de manière directe la méthode, sans chercher une allocation adaptée au problème.

5.a Utilisant la forme récurrente en temps des équations de dynamique (1)–(2)–(3), montrer que les équations en notation compacte (6)–(7)–(7) peuvent s'écrire sous la forme :

$$X_1 = \Phi_1\big(U_1\big) \ , \tag{11a}$$

$$X_2 = \Phi_2\big(U_2\big) \ , \tag{11b}$$

$$X_3 = \Phi_3\big(U_3, U_1 + U_2\big) \ . \tag{11c}$$

5.b On revient à la formulation compacte du problème obtenue à la question **1.a**. Écrire le problème d'optimisation obtenu en substituant dans cette formulation les variables X_1, X_2 et X_3 par les expressions (11). On rappelle que les contraintes (9) ne font plus partie du problème.

5.c Appliquer le Principe du Problème Auxiliaire en choisissant les coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à 1 et avec les noyaux de décomposition suivants :

$$K^{(k)}\big(U_1, U_2, U_3\big) = J_1\big(\Phi_1(U_1), U_1\big) + J_2\big(\Phi_2(U_2), U_2\big) + J_3\big(\Phi_3(U_3, U_1^{(k)} + U_2^{(k)}), U_3\big) \ .$$

Préciser à quel méthode de décomposition “classique” s'apparente cet algorithme. Proposer un moyen de pouvoir choisir $\epsilon^{(k)} = 1$ dans le cas où les constantes de forte convexité des fonctions J_i sont trop faibles pour le permettre.

Deuxième problème : grille à interactions multiples

Formulation du problème. On considère une grille de production composée d'une entité centrale E_c connectée à N entités périphériques $E_1, \dots, E_N$. L'entité centrale décide, d'une part d'un investissement $v_c \in \mathbb{R}$, et d'autre part d'une production $u_c \in \mathbb{R}$ qui est distribuée entre les entités périphériques, la partie de la production centrale fournie à l'entité périphérique i étant notée $u_{c,i}$. On a donc :

$$u_c = \sum_{i=1}^{N} u_{c,i} \ , \tag{12a}$$

et le coût de production de l'entité centrale est noté :

$$J_c(u_c, v_c) \ . \tag{12b}$$

Chaque entité périphérique i décide en interne de sa production $u_i \in \mathbb{R}$, et reçoit de l'entité $i-1$ qui la précède une production $v_i \in \mathbb{R}$, donnée par la relation :

$$v_i = \varphi_i(u_{i-1}) \ . \tag{13a}$$

L'entité qui précède l'entité 1 est par construction l'entité N (voir la figure 2), et on utilisera (pour simplifier les écritures) la convention $u_0 \equiv u_N$ de telle sorte que la relation (13a) reste valable pour $i = 1$. La production interne de l'entité périphérique i est soumise à des contraintes de borne :

$$u_i \in [0, \overline{u}_i] \ , \tag{13b}$$

et le coût de l'entité périphérique i a la forme suivante :

$$J_i(u_i, v_i, u_{c,i}) \ . \tag{13c}$$

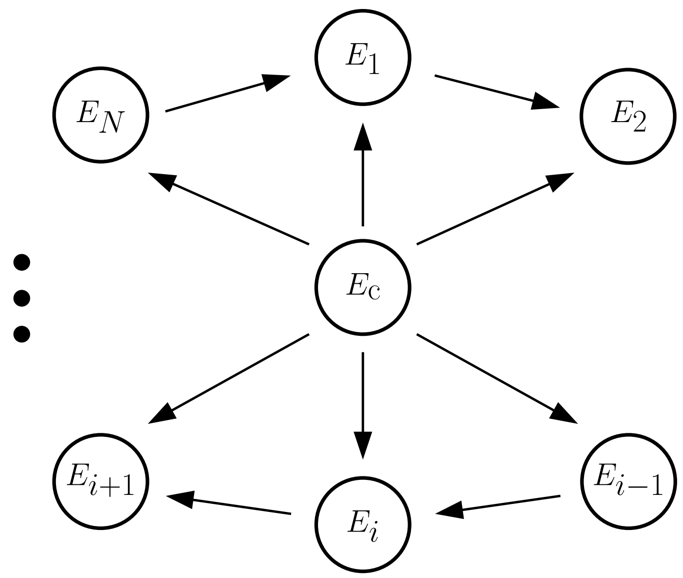

Figure 2: Schéma d'interconnexion de la grille de production

Le but du problème est de minimiser la somme des coûts de toutes les entités en respectant l'ensemble des contraintes associées à leur production. Pour cela, on va mettre en œuvre sur ce problème des méthodes de décomposition/coordination, de telle sorte que chacun des sous-problèmes que l'on formule dans l'étape de décomposition corresponde à la gestion d'une seule entité.

Question 1 — *Formulation du problème et décomposition par les prix.*

1.a Écrire le problème d'optimisation à résoudre, et identifier les contraintes qui créent des couplages entre les $N + 1$ entités.

1.b Écrire l'algorithme de décomposition/coordination par les prix *en ne dualisant que les contraintes couplant les entités entre elles* : on écrira les $N + 1$ sous-problèmes à résoudre à l'itération k de l'algorithme (étape de décomposition) ainsi que la remise à jour des multiplicateurs (étape de coordination). On fera attention à prendre en compte, dans chaque sous-problème, *tous* les termes de dualité qui lui sont rattachés.

Question 2 — *Décomposition par prédiction*

On met en œuvre la méthode décomposition/coordination par prédiction avec le choix suivant d'allocation des contraintes :

- la contrainte (12a) est affectée à l'entité E_{c},
- pour i variant de 1 à N, la i-ème contrainte (13a) est affectée à l'entité E_i.

2.a Écrire les sous-problèmes apparaissant à l'itération k dans cette méthode, et écrire l'étape de coordination de type "point-fixe" associée.

2.b Toujours dans la méthode de prédiction avec ce choix d'allocation des contraintes, donner l'étape de coordination de type "variationnel" associée.

Question 3 — *Utilisation du Principe du Problème Auxiliaire.*

3.a Écrire le problème d'optimisation obtenu en substituant dans le critère de la formulation obtenue à la question **1.a** les variables u_{c} et $(v_1, \ldots, v_N)$ par leurs valeurs données respectivement par les contraintes (12a) et (13a).

3.b Appliquer le Principe du Problème Auxiliaire en choisissant des coefficients $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à 1 et avec les noyaux de décomposition suivants :

$$K^{(k)}\big(u_1, \ldots, u_N, u_{\mathrm{c},1}, \ldots, u_{\mathrm{c},N}, v_{\mathrm{c}}\big) = J_{\mathrm{c}}\Big(\sum_{i=1}^{N} u_{\mathrm{c},i}^{(k)}, v_{\mathrm{c}}\Big) + \sum_{i=1}^{N} J_i\big(u_i, \varphi_i(u_{i-1}^{(k)}), u_{\mathrm{c},i}\big) \ .$$

Préciser à quel méthode de décomposition "classique" s'apparente cet algorithme.