1 Contrôle des connaissances 2013/2014

Remarque préliminaire

Le contrôle se compose de deux problèmes qui sont indépendants l'un de l'autre.

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible. Ainsi,

- lors de l'écriture de chaque problème d'optimisation et de chaque sous-problème issu de la décomposition et de la coordination, on précisera systématiquement les variables par rapport auxquelles se fait l'optimisation, ainsi que les espaces et les parties de ces espaces dans lesquels vivent ces variables,

- à chaque itération k des algorithmes que l'on sera amené à écrire, on distinguera clairement entre les variables à optimiser et les variables qui sont figées à cette itération ; ces dernières seront repérées par un indice supérieur $^{(k)}$ (comme dans le cours).

Il est bien sûr conseillé de lire attentivement les énoncés des problèmes...

Premier problème : compromis investissement/fonctionnement.

On considère un ensemble de N unités de production. Le fonctionnement de l'unité i est régi par la variable de décision $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^{n_i}$, et est limité par un niveau d'investissement $x \in X^{\mathrm{ad}} \subset \mathbb{R}^m$, identique pour toutes les unités et faisant partie des variables de décision du problème. Le coût de l'unité i à fonctionnement u_i donné et à niveau d'investissement x fixé est égal à : $J_i(u_i, x)$. Le problème d'optimisation global s'écrit alors :

$$\min_{\substack{x \in X^{\mathrm{ad}} \\ u_1 \in U_1^{\mathrm{ad}}, \dots, u_N \in U_N^{\mathrm{ad}}}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i, x) \ . \tag{1}$$

Sous cette forme, le problème n'a pas une structure additive puisque la variable x est commune à toutes les unités. On introduit alors une variable d'investissement x_i pour chaque unité i, et on contraint ces variables à être toutes égales entre elles. On obtient alors un nouveau problème d'optimisation, à savoir :

$$\min_{\substack{x \in X^{\mathrm{ad}} \\ u_1 \in U_1^{\mathrm{ad}}, \dots, u_N \in U_N^{\mathrm{ad}}}} \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i, x_i) \ , \tag{2a}$$

sous les contraintes d'égalité entre les x_i écrites sous la forme suivante :

$$x_1 - x_i = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, N\} \ . \tag{2b}$$

Question 1 *Structure du problème et méthode de décomposition par les prix.*

1.a Justifier le fait que les problèmes d'optimisation (1) et (2) sont équivalents. Indiquer pourquoi il est possible d'appliquer les méthodes de décomposition par les prix, les quantités et par prédiction au problème (2).

1.b Écrire précisément les sous-problèmes apparaissant dans la méthode de décomposition par les prix à l'itération k de l'algorithme, et donner la formule de remise à jour des multiplicateurs des contraintes couplantes. Préciser les hypothèses sous lesquelles cet algorithme converge.

Question 2 *Méthode de décomposition par les quantités.*

2.a Appliquer pour commencer la méthode de manière "brutale" en écrivant les $N-1$ contraintes (2b) sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{N} \Theta_i(x_i) = 0 \ ,$$

avec $\Theta_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}^{m(N-1)}$, et en introduisant comme dans le cours l'allocation $(v_1, \dots, v_N)$ associée à la contrainte sous cette nouvelle forme. Écrire les sous-problèmes correspondants ainsi que l'étape de coordination associée, et discuter de la mise en œuvre pratique de l'algorithme obtenu.

2.b Proposer ensuite une mise en œuvre plus "subtile" de la méthode permettant de contourner les difficultés identifiées à la question précédente, en définissant un sous-ensemble réduit de variables tel que le problème se décompose une fois ces variables fixées. De nouveau, écrire les sous-problèmes et l'étape de coordination associé, et justifier le fait que cette mise en œuvre soit réalisable en pratique.

Question 3 *Méthode de décomposition par prédiction.*

Pour mettre en œuvre la méthode de décomposition par prédiction, on décide d'affecter la contrainte $x_1 - x_i = 0$ à l'unité de production i, pour tout $i \in \{2, \dots, N\}$. Écrire les sous-problèmes apparaissant dans cette méthode à l'itération k, et préciser l'étape de coordination associée à la mise en œuvre de type "point-fixe" de la méthode.

Question 4 *Principe du Problème Auxiliaire.*

Revenant à la formulation initiale (1) du problème sans contrainte, on applique le Principe du Problème Auxiliaire.

4.a On effectue un premier choix de noyau décomposition :

$$K^{(k)}(x, u_1, \dots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i, x^{(k)}) + \frac{1}{2}\rho\|x\|^2 \ .$$

Écrire les sous-problèmes apparaissant dans l'algorithme avec ce choix de noyau, en précisant les hypothèses sous lesquelles l'algorithme converge. Spécifier les sous-problèmes dans le cas où les coefficients $\epsilon^{(k)}$ apparaissant dans le PPA sont pris égaux à 1, et justifier le fait de pouvoir choisir ces coefficients égaux à 1.

4.b On effectue un second choix de noyau décomposition :

$$K^{(k)}(x, u_1, \dots, u_N) = \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i, x^{(k)}) + \sum_{i=1}^{N} J_i(u_i^{(k)}, x) \ .$$

Écrire les sous-problèmes apparaissant dans l'algorithme avec ce choix de noyau, en précisant les hypothèses sous lesquelles l'algorithme converge. Spécifier les sous-problèmes dans le cas où les coefficients $\epsilon^{(k)}$ apparaissant dans le PPA sont pris égaux à 1.

Question 5 *Comparaisons et conclusions.*

Discuter les différents algorithmes obtenus lors des questions précédentes (facilité de mise en œuvre, admissibilité, vitesse...), et comparer les différentes méthodes entre elles.

Deuxième problème : cascade de barrages hydroélectriques.

On s'intéresse au fonctionnement d'un ensemble de barrages hydrauliques utilisés pour la production d'électricité, sur un horizon de temps discret $\{0, \ldots, T\}$. Ces barrages sont connectés en chaîne et se déversent l'un dans l'autre, du barrage 1 (amont) au barrage N (aval). Le principe de fonctionnement de la chaîne est le suivant (voir figure 1) : à l'instant t, le barrage i

- contient un volume d'eau noté x_t^i, compris entre 0 et $\overline{x}^i$,
- reçoit des apports naturels a_t^i (pluie, ruissellement), qui sont des *données du problème*,
- reçoit une quantité d'eau z_t^i provenant du barrage aval $i-1$,
- turbine une quantité d'eau u_t^i produisant l'électricité, comprise entre 0 et $\overline{u}^i$,
- déborde d'une quantité d'eau d_t^i si le volume d'eau dans le barrage devient supérieur à $\overline{x}^i$.

La quantité totale qui sort du barrage i, égale à $u_t^i + d_t^i$, est envoyée vers le barrage $i+1$.

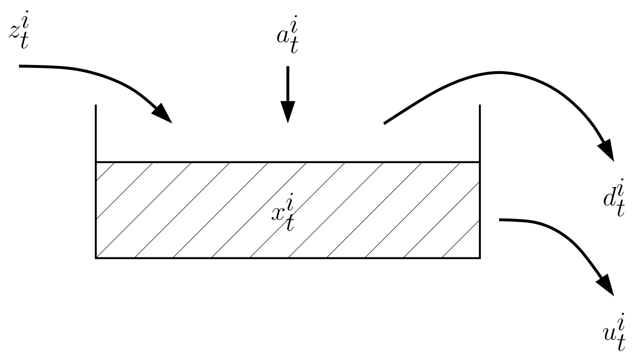

Figure 1: Schéma de principe de fonctionnement d'un barrage

À chaque instant $t \in \{0, \ldots, T-1\}$ et pour tout barrage i, le fonctionnement de ce système hydroélectrique est donc défini par :

1. la dynamique temporelle du barrage :

$$x_{t+1}^i = x_t^i + a_t^i + z_t^i - u_t^i - d_t^i \ , \tag{3a}$$

   l'état du barrage x_0^i à l'instant initial 0 étant supposé connu ;

2. le débordement de l'éventuel trop-plein du barrage :

$$d_t^i = \min\{x_t^i + a_t^i + z_t^i - u_t^i - \overline{x} \ , \ 0\} \ ; \tag{3b}$$

3. l'équation de bilan avec le barrage $i+1$:

$$z_t^{i+1} = u_t^i + d_t^i \ , \tag{3c}$$

   avec la convention $z_t^1 = 0$ pour tout t, car il n'y a pas de barrage en amont du barrage 1 !

   On notera que, en l'absence de débordement,[1], la variable z_t^{i+1} est égale à u_t^i. Cette remarque pourra être utile lorsqu'il faudra discuter de l'intérêt des différentes méthodes de décomposition appliquées au problème.

[1] ce qui est quand même le cas le plus fréquent lorsque le barrage est “bien” géré…

Pour rendre les notations plus compactes, on écrit les équations décrivant le couplage temporel (3a) s'appliquant au barrage i sous la forme :

$$x_{t+1}^i = f_t^i(x_t^i, u_t^i, z_t^i) \quad \text{pour} \;\; i \in \{1, \ldots, N\} \;\; \text{et} \;\; t \in \{0, \ldots, T-1\} \; . \tag{4a}$$

Combinant les équations (3b) et (3c), on obtient les équations décrivant le couplage spatial entre les barrages :

$$z_t^{i+1} = u_t^i + \min\{x_t^i + a_t^i + z_t^i - u_t^i - \overline{x} \; , \; 0\} \; ,$$

que l'on écrit sous la forme compacte suivante :[2]

$$z_t^{i+1} = g_t^i(x_t^i, u_t^i, z_t^i) \quad \text{pour} \;\; i \in \{1, \ldots, N-1\} \;\; \text{et} \;\; t \in \{0, \ldots, T-1\} \; . \tag{4b}$$

On rappelle que les variables u_t^i et x_t^i sont soumises à des contraintes de bornes, à savoir :[3]

$$u_t^i \in [0, \overline{u}^i] \quad \text{et} \quad x_{t+1}^i \geq 0 \quad \text{pour} \;\; i \in \{1, \ldots, N\} \;\; \text{et} \;\; t \in \{0, \ldots, T-1\} \; . \tag{4c}$$

Enfin, à chaque pas de temps t, le fait pour le barrage i de turbiner la quantité u_t^i et de recevoir du barrage amont $i-1$ la quantité z_t^i engendre un coût de la forme $L_t^i(x_t^i, u_t^i, z_t^i)$. De plus, l'état final x_T^i du barrage i à l'instant T est affecté d'un coût $K^i(x_T^i)$ afin d'empêcher le barrage de se vider en fin de période d'optimisation. Le coût total de fonctionnement du barrage i s'écrit en conséquence :

$$\sum_{t=0}^{T-1} L_t^i(x_t^i, u_t^i, z_t^i) \; + \; K^i(x_T^i) \; . \tag{4d}$$

Question 0 *Écriture et analyse du problème.*

Écrire à l'aide des équations (4) le problème global d'optimisation associé à la gestion de la cascade. Préciser où sont localisés dans ce problème les couplages en temps et les couplages en espace.

On cherche à décomposer ce problème global dans sa dimension spatiale, et donc à formuler des sous-problèmes barrage par barrage. Indiquer pourquoi il est possible d'appliquer les méthodes de décomposition par les prix, les quantités et par prédiction dans ce cas.

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à la décomposition "barrage par barrage".

Question 1 *Méthode de décomposition par les prix.*

Écrire précisément les sous-problèmes apparaissant dans la méthode de décomposition par les prix à l'itération k de l'algorithme, et donner l'interprétation des sous-problèmes en terme de gestion du barrage. Écrire la formule de remise à jour des multiplicateurs des contraintes couplantes. On s'attachera à ne dualiser que les contraintes couplant les barrages entre eux, les autres contraintes étant considérées comme locales à chacun des barrages.

Question 2 *Méthode de décomposition par les quantités.*

Proposer une mise en œuvre, aussi astucieuse que possible, de la méthode décomposition par allocation de ressources. Que pensez vous de l'utilisation de cette méthode à ce problème ?

[2] On remarquera que les quantités $g_t^N(x_t^N, u_t^N, z_t^N)$ déversées par le barrage N (le plus en aval de la cascade) sortent du système et ne donnent pas matière à un couplage dans la cascade considérée : les équations (4b) ne sont donc écrites que pour les indices i compris entre 1 et $N-1$.

[3] On rappelle que la contrainte $x_t^i \leq \overline{x}^i$ a été intégrée dans la modélisation du débordement.

Question 3 *Méthode de décomposition par prédiction.*

Mettre en œuvre l'algorithme de décomposition par prédiction en affectant la contrainte couplant les barrages i et $i+1$ au sous-problème associé au barrage $i+1$. Écrire les sous-problèmes à résoudre à l'itération k dans cette méthode, et donner l'interprétation des sous-problèmes en terme de gestion du barrage. Écrire la phase de coordination associée à cette méthode.

Que pensez vous de la possibilité d'affecter la contrainte couplant les barrages i et $i+1$ au sous-problème associé au barrage i (réponse à justifier) ?

Question 4 *Application du PPA dans un cadre simplifié.*

On suppose maintenant que les barrages ne peuvent pas déborder ($d_t^i \equiv 0$), de telle sorte que l'équation de couplage spatial entre les barrages (4b) se réduit à :

$$z_t^{i+1} = u_t^i \ . \tag{5}$$

On en déduit alors, par application répétée de la dynamique en temps, que l'état du barrage i peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= f_t^i(x_t^i, u_t^i, u_t^{i-1}) \\ &= f_t^i\big(f_{t-1}^i(x_{t-1}^i, u_{t-1}^i, u_{t-1}^{i-1}), u_t^i, u_t^{i-1}\big) \\ &\ \ \dots \\ &= \varphi_t^i(u_0^{i-1}, \dots, u_t^{i-1}, u_0^i, \dots, u_t^i) \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Notant alors $u^i = (u_0^i, \dots, u_{T-1}^i)$ le vecteur des décisions associé au barrage i, et éliminant les variables z_t^i et x_t^i dans les fonctions de coût (4d) à l'aide des équations (5) et (6), le coût global de fonctionnement de la cascade se met sous la forme compacte :

$$J^1(u^1) + \sum_{i=2}^{N} J^i(u^{i-1}, u^i) \ ,$$

coût que l'on souhaite minimiser sous les contraintes $u^i \in U_{\mathrm{ad}}^i$ (forme compacte des contraintes (4c)).

Appliquer à cette nouvelle formulation du problème le Principe du Problème Auxiliaire en utilisant la famille de noyaux de décomposition suivante :

$$K^{(k)}(u^1, \dots, u^N) = J^1(u^1) + \sum_{i=2}^{N} J^i\big((u^{i-1})^{(k)}, u^i\big) \ .$$

On discutera la possibilité de choisir des pas $\epsilon^{(k)}$ tous égaux à 1 et on interprétera l'algorithme obtenu.