1 Contrôle des connaissances 2009/2010

Les trois exercices proposés sont indépendants. Le premier exercice porte sur la décomposition par les prix et le principe du problème auxiliaire appliqués à un réseau de télécommunications, le second traite de la décomposition d'un système hiérarchique, et le dernier de réseaux d'eau (encore et toujours…).

On s'attachera dans la rédaction à être aussi précis que possible, en particulier en précisant systématiquement par rapport à quelles variables se fait l'optimisation et en distinguant bien ces variables de celles qui sont figées dans les différentes étape des algorithmes.

Premier exercice : réseau de télécommunications

On s'intéresse à faire transiter sur un réseau de télécommunications un multiflot (c'est-à-dire plusieurs flots indépendants représentant, par exemple, du trafic téléphonique, du trafic internet, …), de manière à utiliser au mieux les caractéristiques du réseau.

0. Formalisation du problème

On considère un réseau représenté par un graphe comportant N_a arcs, N_n nœuds et de matrice d'incidence nœuds-arcs notée A.[1] Étant donné un vecteur de demande $d_f \in \mathbb{R}^{N_n}$, on appelle flot sur le réseau tout vecteur $q_f \in \mathbb{R}^{N_a}$ *à composantes positives ou nulles* vérifiant :

$$Aq_f - d_f = 0 \ .$$

La a-ème composante $q_{f,a}$ du vecteur q_f représente la valeur du flot sur l'arc a, et la relation précédente exprime le fait qu'il ne peut pas y avoir d'accumulation du flot en un nœud quelconque du graphe (*première loi de Kirchhoff*). De plus, faire circuler $q_{f,a}$ sur l'arc a engendre un *coût de congestion* noté $C_a(q_{f,a})$, où chaque C_a, $a = 1 \dots N_a$, est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue, fortement convexe et différentiable de dérivée lipschitzienne. Enfin, chaque arc a a une capacité maximale limitée donnée, que l'on note $\overline{q}_a$.

Le problème que l'on se propose de résoudre consiste à faire circuler sur le réseau N_f flots indépendants $(q_1, \dots, q_{N_f})$, de telle sorte que la congestion du réseau soit aussi faible que possible. *Supposant connues* les N_f demandes $(d_1, \dots, d_{N_f})$, on cherche à minimiser par rapport aux flots le critère :

$$\min_{(q_f \in \mathbb{R}^{N_a})_{f=1\dots N_f}} \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{a=1}^{N_a} C_a\left(q_{f,a}\right) \ , \tag{1a}$$

sous les contraintes de positivité :

$$q_{f,a} \geq 0 \ , \quad f = 1 \dots N_f \ , \quad a = 1 \dots N_a \ , \tag{1b}$$

de satisfaction des flots :

$$Aq_f - d_f = 0 \ , \quad f = 1 \dots N_f \ , \tag{1c}$$

1. Bien que ce ne soit utile pour la résolution du problème, on rappelle que les coefficients de la matrice d'incidence nœuds-arcs d'un graphe orienté comportant N_a arcs et N_n nœuds sont tels que :

$$A_{n,a} = \begin{cases} -1 & \text{si le nœud } n \text{ est l'origine de l'arc } a, \\ 1 & \text{si le nœud } n \text{ est l'extrémité de l'arc } a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et sous les contraintes de capacité des arcs :

$$\sum_{f=1}^{N_f} q_{f,a} - \overline{q}_a \leq 0 \;, \quad a = 1 \ldots N_a \;. \tag{1d}$$

1. Décomposition par les flots
On cherche à décomposer le problème (1) de telle sorte que chaque sous-problème à traiter ne dépende que d'un seul flot. En dualisant *uniquement* les contraintes couplant les flots entre eux, appliquer la méthode de décomposition par les prix. On écrira précisément les sous-problèmes apparaissant dans cette méthode ainsi que la phase de coordination.

2. Décomposition par les arcs
On cherche maintenant à décomposer le problème de telle sorte que chaque sous-problème ne dépende que d'un seul arc. Dualisant uniquement les contraintes couplant les arcs entre eux, appliquer la méthode de décomposition par les prix. De nouveau, on écrira précisément les sous-problèmes apparaissant dans cette méthode ainsi que la phase de coordination.

3. Problème modifié et utilisation du PPA
On considère dorénavant un problème un peu différent du précédent, dans lequel les contraintes de capacité sont directement prises en compte dans la fonction de congestion. Ce nouveau problème s'écrit :

$$\min_{(q_f \in \mathbb{R}^{N_a})_{f=1\ldots N_f}} \; \sum_{a=1}^{N_a} C_a\Big(\sum_{f=1}^{N_f} q_{f,a}\Big) \;, \tag{2a}$$

sous les seules contraintes de positivité :

$$q_{f,a} \geq 0 \;, \quad f = 1 \ldots N_f \;, \quad a = 1 \ldots N_a \;, \tag{2b}$$

et de flot :

$$A q_f - d_f = 0 \;, \quad f = 1 \ldots N_f \;. \tag{2c}$$

3.1 Afin d'obtenir une *décomposition du problème selon les flots*, appliquer le Principe du Problème Auxiliaire à la minimisation de (2) avec le choix de noyau suivant à l'itération k :

$$K^{(k)}(q_1, \ldots, q_{N_f}) = \sum_{f=1}^{N_f} \left(\sum_{a=1}^{N_a} C_a\Big(q_{f,a} + \sum_{\ell \neq f} q_{\ell,a}^{(k)}\Big) \right) \;,$$

et avec un coefficient ϵ égal à 1 ; écrire les sous-problèmes qui en découlent et décrire précisément la circulation des informations au cours de l'algorithme.

3.2 On suppose que l'on dispose d'un code informatique permettant de résoudre le problème à un seul flot. Un appel de ce code est de la forme :

$$q_f^\sharp = \texttt{optim}\,(A, d_f, q_{\min}) \;,$$

où $q_f^\sharp$ est solution du problème :

$$\min_{q_f \in \mathbb{R}^{N_a}} \sum_{a=1}^{N_a} C_a\,(q_{f,a}) \quad \text{sous les contraintes} \quad q_f \geq q_{\min} \;\text{ et }\; A q_f - d_f = 0 \;.$$

Montrer comment utiliser ce code dans la mise en œuvre de l'algorithme de la question 3.1.

3.3 On suppose que la mise en œuvre de l'algorithme de la question 3.1 conduit à une suite de valeurs du coût de congestion qui ne décroît pas au cours des itérations (alors que la théorie prévoit le contraire !). Indiquer (du point de vue mathématique) d'où peut provenir ce phénomène, et proposer un remède.

Deuxième exercice : contrôle hiérarchique

On s'intéresse à la commande d'un système hiérarchisé par niveaux, que l'on a représenté Figure 1. Au premier niveau, le sous-système U_0 dispose de variables de décision notées u_0, le coût associé à

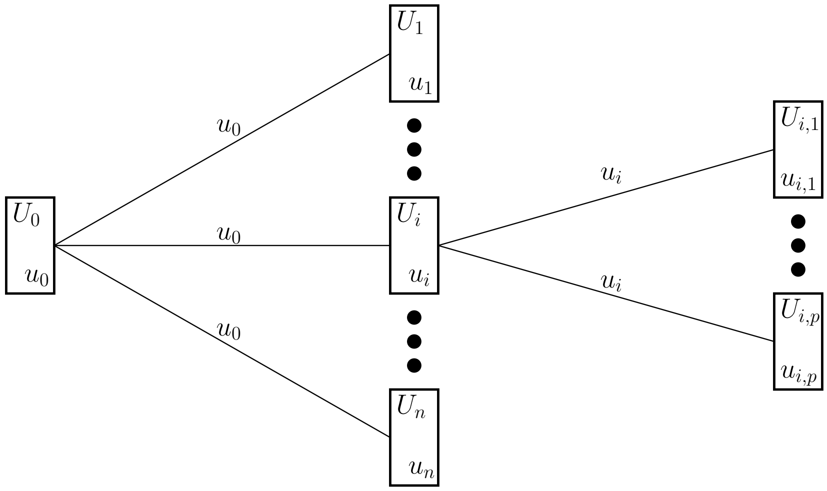

Figure 1 – Contrôle hiérarchique à trois niveaux

ces variables étant $J_0(u_0)$. Ce premier système agit à un second niveau sur n sous-systèmes $U_1 \ldots U_n$, le i-ème sous-système U_i disposant de variables de décision u_i avec un coût $J_i(u_0, u_i)$ dépendant de la décision u_0 prise au premier niveau. Il peut exister un troisième niveau, chaque sous-système u_i du second niveau influençant à son tour p sous-systèmes $U_{i,1} \ldots U_{i,p}$ situés à un troisième niveau, la variable de décision associée au sous-système $U_{i,j}$ étant notée $u_{i,j}$ pour un coût $J_{i,j}(u_0, u_i, u_{i,j})$ dépendant hiérarchiquement des deux niveaux précédents. Le problème d'optimisation que l'on se pose consiste à minimiser le coût global du système, ce qui s'écrit :

$$\min_{u_0, \left(u_i, (u_{i,j})_{j=1\ldots p}\right)_{i=1\ldots n}} J_0(u_0) + \sum_{i=1}^{n} J_i(u_0, u_i) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} J_{i,j}(u_0, u_i, u_{i,j}) \Big) . \tag{3}$$

1. Problème à deux niveaux

On considère pour commencer un problème plus simple ne comportant que deux niveaux :

$$\min_{u_0 \in U_0^{\mathrm{ad}}, (u_i \in U_i^{\mathrm{ad}})_{i=1\ldots n}} J_0(u_0) + \sum_{i=1}^{n} J_i(u_0, u_i) . \tag{4}$$

1.1 Proposer une mise en œuvre de la méthode de décomposition par les prix sur le problème (4).

1.2 Dans l'esprit de la méthode de décomposition par allocation, [2] écrire pour ce problème un algorithme de décomposition/coordination unité par unité.

1.3 Appliquer au problème (4) le principe du problème auxiliaire avec le choix suivant de noyau à l'itération k :

$$K^{(k)}(u_0, u_1, \ldots, u_n) = J_0(u_0) + \sum_{i=1}^{n} J_i(u_0^{(k)}, u_i) .$$

2. qui est de trouver des variables conduisant à une décomposition “naturelle” du problème lorsqu'elles sont fixées, ces variables étant remises à jour dans l'algorithme par une méthode de type gradient

2. Problème à trois niveaux

Sans entrer dans des calculs fastidieux, indiquer comment les méthodes utilisées lors de la question précédente se mettent en œuvre sur le problème (3).

Troisième exercice : interaction débit-pression

On considère un réseau de distribution d'eau constitué de deux sous-réseaux connectés par une canalisation sous pression, que l'on a schématisé Figure 1. Dans chaque sous-réseau i, on dispose

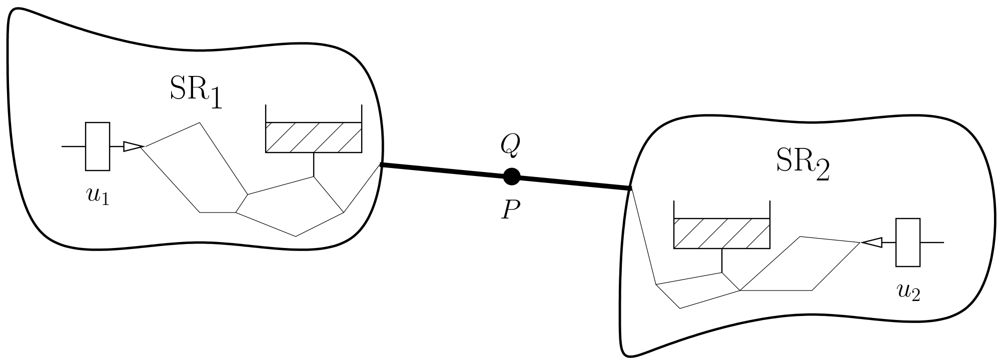

Figure 2 – Réseaux connectés par une canalisation

d'une variable de commande u_i, $i = 1, 2$. La commande u_i du sous-réseau i est soumise à des contraintes locales $u_i \in U_i^{\mathrm{ad}}$, et sa mise en œuvre engendre un coût $J_i(u_i)$. On note (Q, P) le couple des variables de débit et de pression à l'interface des deux sous-réseaux. Les lois de l'hydraulique imposent des relations entre les variables Q et P. Une manière d'écrire ces relations est :

$$P = \Theta_1(u_1, Q) \qquad \text{et} \qquad Q = \Theta_2(u_2, P) \; , \tag{5a}$$

qui montre que, vue du sous-réseau 1 (resp. du sous-réseau 2), la valeur de la pression P (resp. du débit Q) au nœud d'interconnexion entre les sous-réseaux est une fonction de la commande u_1 (resp.de la commande u_2) et du débit Q (resp. de la pression P). Pour effectuer des calculs sur le sous-réseau 1 (resp. le sous-réseau 2) seul, il faut donc se donner une valeur du débit (resp. de la pression) au nœud d'interconnexion.

Le but recherché est de minimiser le coût global de fonctionnement du réseau :

$$\min_{u_1 \in U_1^{\mathrm{ad}}, u_2 \in U_2^{\mathrm{ad}}} J_1(u_1) + J_2(u_2) \; , \tag{5b}$$

en résolvant des sous-problèmes ne faisant intervenir qu'un seul des sous-réseaux à la fois.

1. Décomposition par les prix
Appliquer au problème (5) la méthode de décomposition/coordination par les prix. On écrira précisément les deux sous-problèmes apparaissant dans cette méthode ainsi que la phase de coordination.

2. Décomposition par prédiction
Proposer une mise en œuvre de la méthode de décomposition/coordination par prédiction, dans sa version "point-fixe".