

MO102 : Instabilité de Von Karman et méthode de Boltzmann sur réseau

Elliot Brendel

elliott.brendel@ensta.org

ENSTA Paris — 23 octobre 2020

Introduction

L'instabilité de Von Karman [3] est un phénomène causé par la séparation d'un écoulement par un obstacle peu profilé, par exemple un cylindre. On observe alors une allée de tourbillons périodiques en aval de l'obstacle. Ce phénomène n'a lieu qu'à l'intérieur d'un intervalle donné de nombres de Reynolds.



FIGURE 1 – Tourbillons de Von Karman causés par le mont Rishiri au Japon [2]

L'objectif de ce projet est de simuler cette instabilité en mettant en œuvre une méthode de Boltzmann sur réseau [6] (ou *Lattice Boltzmann Method* en anglais). Cette méthode de dynamique des fluides présente l'avantage d'être rapide à implémenter et permet d'exprimer simplement les conditions aux limites. Son originalité par rapport aux méthodes classiques qui consistent à résoudre les équations de Navier-Stokes (par exemple, par éléments finis) est de travailler à partir de l'équation de Boltzmann en modélisant le fluide comme un ensemble de particules microscopiques. Par ailleurs, la méthode de Boltzmann sur réseau est parallélisable ce qui accélère grandement son exécution.



Travail attendu : Vous produirez un code lisible et commenté qui permet à l'utilisateur de visualiser l'évolution dans le temps de l'instabilité de Von Karman dans le cas de l'écoulement d'un fluide entre deux plaques autour de différents obstacles. Vous réaliserez une présentation orale de votre travail durant laquelle vous discuterez notamment des limites des techniques de simulation mises en œuvre durant ce projet. L'initiative personnelle est encouragée et sera récompensée.

Organisation des séances

1. Exercices, présentation du projet et questions 1 et 2 (définition et initialisation de variables).
2. Exercices et questions 3 à 5 (définition et initialisation de variables).

3. Exercices et question 6 (fonction de propagation).
4. Exercices et questions 7 et 8 (fonction de collision).
5. Questions 9 à 11 (gestion des obstacles et des conditions aux limites, algorithme principal).
6. Question 12 et 13 (ajout d'obstacles, visualisation des résultats) et préparation de l'évaluation.
7. Évaluation orale.

1 Rappel sur la théorie cinétique des gaz

La méthode de Boltzmann sur réseau est issue de la théorie cinétique des gaz. On modélise le gaz comme un ensemble de particules animées d'un mouvement aléatoire. L'équation de Boltzmann décrit alors l'échange d'énergie et de moment lié à la diffusion et à la collision des particules :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \cdot \nabla f = \Omega \quad (1)$$

où f est la fonction de distribution des particules, u est la vitesse d'une particule et Ω est un opérateur de collision.

2 Méthode de Boltzmann sur réseau

2.1 Maillage de l'espace

On simplifie l'idée de la théorie cinétique des gaz en réduisant le nombre de particules et en suivant leur mouvement sur un maillage de l'espace. Autrement dit, l'espace est discrétisé et les nœuds du maillage constituent les positions possibles des particules.

Question 1

Nous nous intéressons ici à un écoulement entre deux plaques en deux dimensions.

- (a) Définir les variables $N_x = 400$ et $N_y = 100$ qui correspondent chacune au nombre de positions selon une dimension de l'espace.
- (b) En utilisant la fonction *meshgrid*, définir le maillage du système $[1, N_x] \times [1, N_y]$.
- (c) En utilisant la fonction *size*, en déduire les dimensions des deux tableaux produits par *meshgrid*. Dans toutes les questions suivantes, vous ferez attention à définir des tableaux (pour chaque f_i , pour u_x et u_y , etc.) de tailles compatibles.

2.2 Directions de propagation

On définit ensuite un ensemble de directions selon lesquelles la particule peut se propager. Différents modèles existent, mais il est habituel en deux dimensions d'utiliser le modèle D2Q9 qui propose 9 directions de propagation :

$$\vec{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & i = 1 \\ (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) & i = \llbracket 2, 5 \rrbracket \\ (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1) & i = \llbracket 6, 9 \rrbracket \end{cases} \quad (2)$$

Question 2

- (a) Tracer (sur une feuille, pas sur Matlab) sur un même graphe les 9 directions de propagation du modèle D2Q9 en faisant apparaître le maillage.
- (b) Définir le tableau e_x contenant les coordonnées selon la première dimension de l'espace de chacune des 9 directions de propagation. Faire de même pour la seconde dimension de l'espace avec un tableau e_y .

2.3 Grandeurs physiques

2.3.1 Modélisation

La fonction de distribution f de l'équation de Boltzmann est ici discrétisée et représentée par 9 fonctions f_i où $i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$. $f_i(\vec{r}, t_k)$ est la probabilité qu'une particule ayant une vitesse \vec{e}_i se situe à la position $\vec{r} = (x, y)$ sur le maillage, au temps t_k . On peut alors définir la densité macroscopique du fluide :

$$\rho(\vec{r}, t_k) = \sum_{i=1}^9 f_i(\vec{r}, t_k) \quad (3)$$

et la vitesse macroscopique du fluide :

$$\vec{u}(\vec{r}, t_k) = \begin{pmatrix} u_x(\vec{r}, t_k) \\ u_y(\vec{r}, t_k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t_k)} \sum_{i=1}^9 f_i(\vec{r}, t_k) \vec{e}_i \quad (4)$$

Question 3

À un temps t_k fixé :

- Comment stocker les fonctions f_i dans Matlab ? Définir la ou les variables représentant les f_i .
- Définir la variable représentant ρ et écrire une fonction Matlab calculant ρ à partir des f_i .
- Définir les variables représentant u_x et u_y et écrire une fonction Matlab calculant u_x et u_y à partir des f_i (indication : s'aider des tableaux e_x et e_y).



Remarque : En toute rigueur, on devrait écrire :

$$\vec{u}(\vec{r}, t_k) = \frac{c}{\rho(\vec{r}, t_k)} \sum_{i=1}^9 f_i(\vec{r}, t_k) \vec{e}_i \quad (5)$$

où $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ est la vitesse du maillage, mais on considère ici que cette vitesse est égale à 1. Dans la suite du sujet, les formules sont présentées sans cette vitesse c , le lecteur est libre de consulter la littérature pour connaître l'écriture des formules lorsque $c \neq 1$. De même, on prend $\Delta x = 1$ et $\Delta t = 1$, ces grandeurs n'apparaîtront donc plus dans nos équations.

2.3.2 Initialisation

On initialise les grandeurs de façon à être à l'équilibre du système constitué d'un écoulement entre deux plaques sans obstacle. L'équilibre de ce système correspond à l'écoulement de Poiseuille :

$$\begin{cases} u_x(\vec{r}, 0) = \frac{4u_{\max}(y-1.5)(N_y-2-(y-1.5))}{(N_y-2)^2} \\ u_y(\vec{r}, 0) = 0 \\ \rho(\vec{r}, 0) = 1 \end{cases} \quad (6)$$

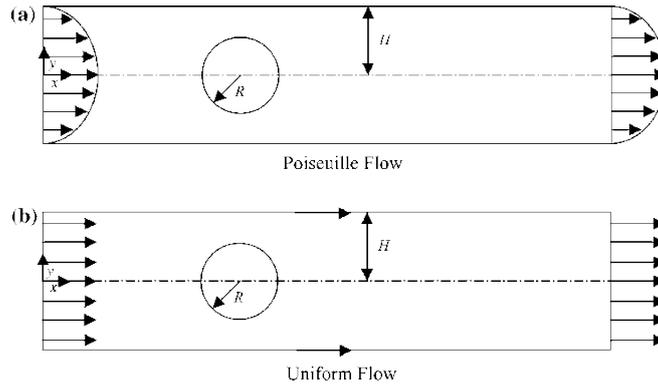


FIGURE 2 – Écoulement uniforme et écoulement de Poiseuille entre deux plaques [1]

Question 4

Initialiser les grandeurs \vec{u} et ρ (de manière efficace). On prendra $u_{\max} = 0.1$.

2.4 Résolution de l'équation de Boltzmann

2.4.1 L'équation de Boltzmann discrétisée

$$f_i(\vec{r} + \vec{e}_i, t_{k+1}) - f_i(\vec{r}, t_k) = -\frac{f_i(\vec{r}, t_k) - f_i^{\text{eq}}(\vec{r}, t_k)}{\tau} \quad (7)$$

Cette équation de récurrence en temps nous permet de mettre en œuvre un algorithme de résolution constitué d'une boucle. On pourra donc évaluer en chaque temps t_k (ou à chaque itération k) les fonctions de distribution f_i , et donc les grandeurs physiques ρ et \vec{u} . τ est le temps de relaxation. Dans le modèle D2Q9, il est lié à la viscosité cinématique du fluide ν par l'équation suivante :

$$\nu = \frac{2\tau - 1}{6} \quad (8)$$

Question 5

- (a) Définir une variable représentant le temps de simulation total, ou autrement dit, puisque $\Delta t = 1$, le nombre total d'itérations de la boucle.
- (b) Définir les variables représentant ν et τ . On prendra $\nu = 0.02$.

2.4.2 Phase de propagation

Cette phase correspond au membre à gauche du signe égal dans l'équation de Boltzmann discrétisée. Pour cette étape, on fait abstraction des frontières du système et on considère qu'il est périodique. Autrement dit, la position $(x_{\max} + 1, y)$ est identique à la position $(1, y)$. De même pour y_{\max} .

Question 6

On cherche à calculer les f_i^* telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \quad , \quad f_i^* (\vec{r} + \vec{e}_i) = f_i (\vec{r}) \quad (9)$$

- (a) En repartant de votre graphe de la question 2, illustrer sur un nouveau graphe cette phase de propagation.
- (b) Écrire une fonction *propagation.m* qui prend en entrée la ou les variables représentant les f_i à un t_k donné et retourne les f_i^* . Il y a de nombreuses façons d'écrire cette fonction, l'objectif étant d'obtenir la solution la plus efficace.

2.4.3 Phase de collision

Cette phase correspond au membre à droite du signe égal dans l'équation de Boltzmann discrétisée. Les f_i^{eq} sont les fonctions de distribution d'équilibre :

$$\forall i \in \llbracket 1, 9 \rrbracket \quad , \quad f_i^{\text{eq}} (\vec{r}, t) = w_i \rho (\vec{r}, t) \left[1 + 3\vec{e}_i \cdot \vec{u} + \frac{9}{2} (\vec{e}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] \quad (10)$$

où :

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & i = 1 \\ \frac{1}{9} & i \in \llbracket 2, 5 \rrbracket \\ \frac{1}{36} & i \in \llbracket 6, 9 \rrbracket \end{cases} . \quad (11)$$

Question 7

- (a) Écrire une fonction qui permet de calculer les f_i^{eq} à un temps t_k fixé.
- (b) Écrire une fonction *collision.m* qui réalise l'étape de collision et retourne $f_i - \frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{\text{eq}})$ (donc, en recalculant f_i^{eq} en fonction des \vec{u} et ρ courants).

Question 8

À $t = 0$, on initialisera les f_i à f_i^{eq} . Ajouter le code correspondant à l'initialisation effectuée dans la partie 2.3.2.

2.4.4 Gestion des obstacles

Lorsque l'écoulement rencontre un obstacle (par exemple, les parois supérieure et inférieure du système), on applique des conditions de type « bounce-back » (« rebond ») : lorsqu'une particule rencontre un obstacle, on considère qu'elle se propage dans la même direction mais avec une vitesse opposée. Ainsi, sur un point de l'obstacle, f_1 reste la même, f_2 et f_4 sont échangées, de même pour f_3 et f_5 , f_6 et f_8 , f_7 et f_9 .

La fonction collision prend donc en entrée les f_i et renvoie, en un point d'un obstacle, les f_i^\dagger tels que $f_1^\dagger = f_1$, $f_2^\dagger = f_4$, $f_4^\dagger = f_2$, ... Sinon, en un point quelconque, elle retourne $f_i - \frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{\text{eq}})$ comme précédemment.

Question 9

- Faire un dessin pour bien comprendre la condition « bounce-back ».
- Discuter de la validité des conditions aux frontières de type « bounce-back ». Sont-elles toujours valables ? Que se passe-t-il si une particule doit se propager « à l'intérieur » d'un obstacle ? Que nous apporte l'hypothèse de périodicité ? Quelle est l'influence de la forme de l'obstacle sur ces conditions aux limites ?
- Définir sous forme d'un tableau booléen une variable permettant de déterminer la position des obstacles sur le maillage. On ne considère pour l'instant que les parois du système situées en $y = 1$ et $y = N_y$.
- En utilisant ce tableau booléen, modifier la fonction *collision.m* pour prendre en compte ces conditions aux frontières.

2.4.5 Conditions aux limites

À l'entrée $x = 1$ et à la sortie $x = N_x$ du système, on peut appliquer les conditions aux limites de Zou-He [7] qui nous permettent de spécifier à l'entrée un profil de vitesse et à la sortie une densité constante. Ces conditions sont de nature :

— macroscopique :

- En $x = 1$:

$$\begin{cases} u_x &= \frac{4u_{\max}(y-1.5)(N_y-2-(y-1.5))}{(N_y-2)^2} \\ u_y &= 0 \\ \rho &= \frac{f_1+f_3+f_5+2(f_4+f_7+f_8)}{1-u_x} \end{cases} \quad (12)$$

- En $x = N_x$:

$$\begin{cases} \rho &= 1 \\ u_x &= -1 + \frac{f_1+f_3+f_5+2(f_2+f_6+f_9)}{\rho} \\ u_y &= 0 \end{cases} \quad (13)$$

— microscopique :

- En $x = 1$:

$$\begin{cases} f_2 &= f_4 + \frac{2}{3}\rho u_x \\ f_6 &= f_8 + \frac{f_5-f_3}{2} + \frac{\rho u_y}{2} + \frac{\rho u_x}{6} \\ f_9 &= f_7 + \frac{f_3-f_5}{2} - \frac{\rho u_y}{2} + \frac{\rho u_x}{6} \end{cases} \quad (14)$$

- En $x = N_x$:

$$\begin{cases} f_4 &= f_2 - \frac{2}{3}\rho u_x \\ f_8 &= f_6 + \frac{f_3-f_5}{2} - \frac{\rho u_y}{2} - \frac{\rho u_x}{6} \\ f_7 &= f_9 + \frac{f_5-f_3}{2} + \frac{\rho u_y}{2} - \frac{\rho u_x}{6} \end{cases} \quad (15)$$

Question 10

- Vérifier la cohérence de ces formules avec les définitions de la partie 2.3.1.
- Quel intérêt voyez-vous à l'utilisation de telles formules spécifiquement aux limites du domaine ? (indication : à une frontière, quelles données possédons-nous ?)
- Implémenter ces conditions aux limites (voir 2.4.6).

2.4.6 Algorithme de résolution

Algorithm 1: main.m

Input: $\rho(\vec{r}, 0), \vec{u}(\vec{r}, 0)$

Result: $\rho(\vec{r}, t_{\max}), \vec{u}(\vec{r}, t_{\max})$

Initialisation des $f_i(\vec{r}, 0)$;

while $t < t_{\max}$ **do**

 Calcul des grandeurs ρ et \vec{u} d'après 2.3.1 ;

 Application des conditions aux limites de Zou-He d'après 2.4.5 ;

 Phase de collision d'après 2.4.3 ;

 Phase de propagation d'après 2.4.2 et 2.4.4 ;

end

Question 11

Mettre en œuvre l'algorithme ci-dessus.

3 Ajout d'obstacles

Question 12

En modifiant le tableau booléen créé dans la partie 2.4.4, vous pourrez ajouter au système différents obstacles. Vous implémenterez et présenterez les résultats associés aux formes suivantes (dans cet ordre) :

- (a) une plaque rectangulaire verticale de longueur $\frac{N_y}{5} + 2$ et de largeur 1 ;
- (b) un disque de rayon $\frac{N_y}{10} + 1$;
- (c) un profil d'aile symétrique d'équation :

$$\begin{cases} |y| \leq \frac{tc}{0.2} \left(0.2969 \sqrt{\frac{x}{c}} - 0.126 \frac{x}{c} - 0.3516 \left(\frac{x}{c}\right)^2 + 0.2843 \left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.1015 \left(\frac{x}{c}\right)^4 \right) \\ x \in [0, c] \end{cases} \quad (16)$$

avec $c = \frac{N_x}{4}$ et $t = \sqrt{\frac{\frac{N_y}{10} + 1}{1.1019c}}$.

Tous les obstacles seront centrés en $\left(\frac{N_x}{5} + 1, \frac{N_y}{2} + 3\right)$. **Vous êtes encouragés à expérimenter d'autres formes et à en présenter les résultats.**

4 Visualisation des résultats

Question 13

En utilisant l'aide Matlab, vous ferez en sorte de sauvegarder une vidéo permettant à l'utilisateur de visualiser vos résultats. Cette vidéo comportera un titre se mettant à jour et indiquant l'évolution du temps. Elle sera constituée de trois graphes représentant sur le domaine :

- (a) la norme de la vitesse ;
- (b) les lignes de courant [4] ;
- (c) la vorticité [5] (ou sa valeur absolue) qui permet de caractériser la présence de tourbillons :

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (17)$$

Vous pourrez vous aider des fonctions suivantes mais ce n'est pas obligatoire (d'autres façons de faire existent) : *subplot*, *imagesc*, *colorbar*, *streamline*, *diff*, *colormap*, *writeVideo*, *contourf*...

Références

- [1] Ju Kim, Chongyoup Kim, Changkwon Chung, Kyung Ahn, and Seung Jong Lee. Negative wake generation of fene-cr fluids in uniform and poiseuille flows past a cylinder. 44 :600–613, 07 2005.
- [2] NASA. STS-100 Shuttle Mission Imagery. <https://spaceflight.nasa.gov/gallery/images/shuttle/sts-100/html/sts100-710-182.html>.
- [3] Wikipédia. Allée de tourbillons de Karman. https://fr.wikipedia.org/wiki/All%C3%A9e_de_tourbillons_de_Karman.
- [4] Wikipédia. Ligne de courant. https://fr.wikipedia.org/wiki/Ligne_de_courant.
- [5] Wikipédia. Ligne de courant. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Tourbillon_\(physique\)#Vecteur_tourbillon](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tourbillon_(physique)#Vecteur_tourbillon).
- [6] Wikipédia. Méthode de Boltzmann sur réseau. https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Boltzmann_sur_r%C3%A9seau.
- [7] Qisu Zou and Xiaoyi He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Physics of Fluids*, 9(6) :1591–1598, 1997.