

Chaos temporel en convection de Rayleigh-Bénard

Ce projet s'intéresse aux mouvements d'une couche de fluide chauffée par le bas. Au-delà d'une différence de température critique, les mouvements dans le fluide s'organisent en cellules de convection, puis se déstabilisent pour faire apparaître d'autres mouvements. Cette expérience de convection, dite de Rayleigh-Bénard¹, permet de comprendre les mouvements que l'on observe en océanographie (courants marins), ainsi qu'en météorologie. Nous reprendrons le modèle simplifié proposé par E. Lorenz² en 1962. En particulier nous suivrons l'analyse qu'il a développé dans un article devenu célèbre³ puisqu'elle fut la première observation numérique d'un comportement de chaos temporel.

1 Formulation du problème

On considère une couche de fluide d'épaisseur $d=1$, comme montré figure 1. Les températures sont imposées de manière parfaite, sur la plaque du haut : $T = T_0$, sur la plaque du bas : $T = T_0 + \Delta T$. Le problème est supposé illimité dans la direction horizontale. La présence du chauffage modifie la densité du fluide, qui augmente quand on s'élève dans le fluide pour atteindre les régions plus froides. Ce mécanisme est potentiellement instable, puisque le champ de pesanteur a tendance à mettre le lourd en bas et le léger en haut. Pour des faibles écarts de température entre les plaques, le liquide est au repos. Au-delà d'un certain seuil, l'instabilité se développe et des rouleaux de convection apparaissent.

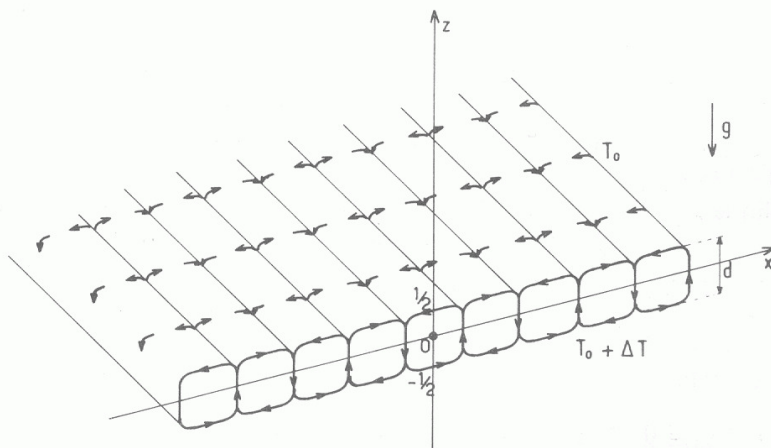


Figure 1: Illustration schématique des rouleaux de convection de l'expérience de Rayleigh-Bénard.

On note $\theta(x, z, t)$ l'écart de température par rapport à la situation de conduction pure, *i.e.* :

$$T = T_0 + \left(\frac{1}{2} - z\right) \Delta T + \theta, \quad (1)$$

¹Lord Rayleigh (1842-1919), prix Nobel de physique en 1904, est l'auteur de nombreux travaux fondamentaux sur des sujets aussi variés que l'optique, l'acoustique, les vibrations, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, ... En 1916 il prédit la valeur critique pour l'apparition des rouleaux de convection.

Henri Bénard (1874-1939) mena de nombreuses expériences de convection et détermina expérimentalement les seuils de stabilité au début du XXe siècle.

²Edward Lorenz (1917-2008), météorologue américain.

³E. Lorenz : Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Science*, **20**, 130-141, 1963.

où T est la température absolue au sein du fluide. Les mouvements du fluide sont décrits à l'aide des composantes horizontales $u(x, z, t)$ et verticales $v(x, z, t)$ de la vitesse. Le fluide est supposé incompressible, si bien que l'on résout à l'aide de la fonction de courant $\psi(x, z, t)$ définie par:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{2a}$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2b}$$

Afin de simplifier les équations générales du problème, Lorenz supposa que les inconnues (fonction de courant et température) avaient la dépendance spatiale suivante:

$$\psi(x, z, t) = X(t) \cos \pi z \sin qx \tag{3a}$$

$$\theta(x, z, t) = Y(t) \cos \pi z \cos qx + Z(t) \sin 2\pi z \tag{3b}$$

Cette hypothèse lui permit de trouver un modèle simple, connu désormais sous le nom de *système de Lorenz*, gouvernant la dynamique du système:

$$\dot{X} = P_r(Y - X) \tag{4a}$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \tag{4b}$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \tag{4c}$$

Les paramètres restant sont respectivement:

- Le nombre de Prandtl P_r , mesure le rapport entre la viscosité cinématique du fluide considéré et la dilatation thermique. Dans la suite du projet, on prendra $P_r = 10$.
- Le nombre b est une longueur caractéristique de l'expérience. Suivant Lorenz, On prendra $b = 8/3$.
- r est directement proportionnel à la différence de température ΔT entre les deux plaques : c'est le paramètre de contrôle de l'expérience.

Au cours du projet, deux objectifs seront à remplir. Premièrement on s'intéressera aux dynamiques engendrées par le système de Lorenz (4), ce qui nous permettra de mettre en évidence des comportements *chaotiques*. Deuxièmement, les mouvements dans l'espace physique seront reconstruits afin de visualiser l'écoulement lors des différents régimes.

2 Définition de l'espace physique

Le paramètre q apparaissant dans les équations (3) définit une longueur d'onde spatiale dans la direction horizontale. Dans la suite du projet on prendra $q = \pi/\sqrt{2}$. Pour la représentation, on limitera le domaine physique selon (Ox) à l'intervalle $[-\frac{2\pi}{q}; \frac{2\pi}{q}]$.

- Calculez les composantes du champ de vitesse à partir de l'expression de la fonction de courant (3a). Représentez le champ de vitesse à l'aide de la fonction `quiver` de matlab pour une valeur constante de $X(t) = X_0$.
- Ecrire un programme matlab qui calcule la vorticité $\omega = \text{rot}(V)$, où $V = (u, v)$ est la vitesse du fluide. Représentez cette quantité sur le même graphique que le champ de vitesses. (On pourra utiliser les fonctions `meshgrid` et `surf` de matlab).
- Représentez le champ de température θ pour des valeurs fixes de $Y(t)$ et $Z(t)$.

3 Etude de la dynamique

3.1 Intégration temporelle

Afin de résoudre numériquement les équations (4) de la dynamique du système, il faut procéder à une discrétisation du système, opération qui consiste à remplacer les équations continues par des itérations (équations aux différences). En annexe du projet, on donne quelques définitions de base ainsi que 3 schémas numériques simples permettant de procéder pratiquement à la discrétisation temporelle.

- Ecrire un programme matlab réalisant l'intégration des équations (4) à l'aide du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, *i.e.* permettant de calculer \mathbf{y}_{n+1} connaissant \mathbf{y}_n . On a noté $\mathbf{y}_n = (X(t_n), Y(t_n), Z(t_n))^t$.
- Ecrire un programme matlab permettant d'intégrer le système (4) sur un intervalle de temps $[0, T]$, avec un pas de temps dt , et pour une condition initiale $\mathbf{y}_0 = (X(0), Y(0), Z(0))^t$ donnée.

3.2 Mise en évidence des différents régimes

Dans cette partie du projet on utilise le programme d'intégration temporelle défini précédemment afin de mettre en évidence numériquement différents régimes exhibés par le système de Lorenz. Ce faisant, nous allons suivre pas à pas la démarche employée par Lorenz en 1962.

- Pour $0 < r < 1$, et pour différentes conditions initiales, calculer des trajectoires du système et en déduire son état stationnaire. A quels mouvements de fluide cela correspond-il ?
- Effectuer la même étude pour $0 < r < 20$. Que se passe-t-il en $r = 1$? quels états stables trouve-t-on pour $r > 1$?
- Calculer les courbes solutions pour $r = 28$. Qu'observe-t-on ?

Le comportement observé en $r = 28$ est à la base des analyses développées par Lorenz dans son article de 1963. Il venait ainsi de découvrir un comportement aperiodique engendré par un système dynamique déterministe. Les travaux ultérieurs menés par les mathématiciens sur ce type d'objet ont conduit à qualifier ce comportement de *chaotique*. L'ensemble limite sur lequel convergent les trajectoires fut quant à lui appelé par la suite *attracteur étrange*. Toujours à l'aide de simulations numériques, nous allons mettre en évidence quelques conséquences de ce comportement chaotique.

Sensibilité aux conditions initiales

- Intégrer numériquement 3 trajectoires pour 3 conditions initiales différentes à 10^{-3} près. Représenter les 3 composantes X, Y et Z en fonction de t , puis dans l'espace des phases.

Cette expérience numérique montre le caractère imprédictible d'une dynamique chaotique, car une erreur (la plus petite soit elle) sur les conditions initiales entraîne à long terme une trajectoire (et donc un comportement) complètement différente. Afin d'aller plus loin dans la compréhension de ce régime, Lorenz eut l'idée de réduire la dynamique à une itération discrète en considérant les maxima successifs de la variable Z .

- Ecrire un programme matlab qui donne les maxima successifs d'une série temporelle $Z(t)$. On notera Z_k ces maxima. Représentez ensuite sur un graphe la fonction ϕ définie par : $Z_{k+1} = \phi(Z_k)$. Commenter l'allure de cette fonction.

3.3 Diagrammes de bifurcations

Afin d'avoir une vue plus générale des transitions observées dans la dynamique lorsqu'on fait varier le paramètre de contrôle r , le but de cette section consiste à tracer des *diagrammes de bifurcations*, où l'on reportera en abscisse le paramètre de contrôle, et en ordonnée une quantité cohérente à définir, permettant de décrire la dynamique du système. On s'intéresse d'abord aux premières transitions, on fera donc varier le paramètre r entre 0 et 30.

- Avant le régime chaotique, les états stables du système sont des points fixes. Une manière simple de coder le diagramme de bifurcation consiste donc à effectuer une simulation temporelle suffisamment longue pour passer le transitoire, et à ne conserver que les N derniers points. Ecrire un programme matlab donnant un diagramme de bifurcation ainsi défini, pour la plage de r fixée entre 0 et 30. Donner la valeur de r_C pour laquelle s'instaure le régime chaotique.
- Pour $r > r_C$, il n'y a plus de points fixes, si bien qu'une manière plus habile de coder le diagramme de bifurcation consiste à retenir les maxima successifs Z_k de $Z(t)$. Plus précisément, on ne retiendra que N_p points $Z_k - r$, afin de s'affranchir des grandes variations de r . Ecrire un programme matlab effectuant cette opération, et tracer un diagramme de bifurcation pour $r \in [30, 350]$.

4 Reconstruction des mouvements au sein du fluide

Dans cette partie du projet, on revient à l'espace physique (la couche de fluide), afin de représenter les mouvements du fluide et de la température pour les différents régimes observés.

On souhaite représenter des trajectoires lagrangiennes de particules de fluide. On rappelle qu'elles sont définies par l'ensemble des points $(x(t), y(t))$ vérifiant à tout instant:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t), \quad (5a)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, t), \quad (5b)$$

où u et v sont les deux composantes du champ de vitesses définies Eqs. (2).

- Utiliser le schéma d'Euler explicite afin de calculer la trajectoire de la particule de fluide se trouvant à l'instant initial en (x_0, y_0) pour $r = 10$. Quel problème constatez-vous ? Utiliser un schéma de Runge-Kutta pour obtenir une solution correcte.
- Reprendre les programmes écrits section 2 afin qu'ils puissent accepter comme entrées des séries temporelles $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$. Représentez les mouvements du fluide et de la température pour $r = 10$ et $r = 28$.
- On souhaite reproduire numériquement l'expérience qui consiste à augmenter la température la température afin d'observer les transitions du régime de conduction au régime chaotique. Programmez et représentez sur une même figure la trajectoire dans l'espace des phases lors de cette expérience, ainsi que l'évolution de la température absolue et les mouvements au sein du fluide.

Annexe : notions d'intégration temporelle numérique

Soit un système dynamique de la forme :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (6)$$

avec $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Définir un schéma numérique afin de calculer les courbes solutions du système revient à remplacer le système dynamique continu (6) par une application discrète que l'on notera dans le cas général:

$$\Phi_h : \mathbf{y}_n \mapsto \mathbf{y}_{n+1}$$

où h est le pas de temps et Φ_h le flot numérique ou discret. De nombreuses méthodes existent afin de procéder à cette substitution. D'une manière générale, on cherche à faire en sorte que la solution numérique soit la plus proche possible de la solution continue. Cependant, remplaçant un système continu par une équation aux différences peut substantiellement altérer la solution calculée, on peut ainsi trouver des solutions numériques instables alors que le système initial n'avait que des trajectoires stables. On définit ainsi les propriétés suivantes:

Stabilité d'un schéma

Un schéma est dit stable si les erreurs successives d'arrondis à chaque pas d'itération ainsi que les petites perturbations numériques initiales ou aux limites ne s'amplifient pas mais sont atténuées.

Ordre d'un schéma

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = F(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (7)$$

qui se discrétise, en utilisant une méthode numérique à un pas, par

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + hF(t_n, \mathbf{y}_n, h) \\ \mathbf{y}_{n=0} = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (8)$$

Une méthode numérique à un pas est d'ordre p s'il existe un réel K indépendant de h tel que l'erreur (locale) de consistance $\epsilon_n = \mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n) - hF(t_n, \mathbf{y}(t_n), h)$ vérifie

$$|\epsilon_n| \leq Kh^{p+1} \quad \forall 0 \leq n \leq N. \quad (9)$$

L'erreur de consistance est l'erreur entre la solution exacte des équations continues et la solution exacte des équations discrétisées, ou encore l'erreur commise par la solution exacte dans le schéma numérique. On donne maintenant 3 schémas numériques explicites que l'on pourra utiliser au cours du projet.

Méthode d'Euler explicite

$$\Phi_h : \mathbf{y}_n \mapsto \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + hf(\mathbf{y}_n, t_n). \quad (10)$$

Ce schéma est d'ordre 1 ; il est conditionnellement stable.

Méthodes de Runge-Kutta

Ces méthodes sont fondées sur une meilleure approximation de la pente à l'instant n , obtenue en prenant des valeurs successives de la pente à divers points de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ puis en moyennant astucieusement ces différentes valeurs. Au cours de ce projet on pourra utiliser :

• **la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 classique (Méthode de Heun) :**

Le calcul de \mathbf{y}_{n+1} se fait en trois étapes, en calculant d'abord les pentes aux bornes de l'intervalle puis en prenant la moyenne de ces deux estimations, soit :

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \quad (11a)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1, t_n + h) \quad (11b)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (11c)$$

• **la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :**

Afin d'atteindre une précision d'ordre 4, il faut procéder à 4 calculs préparatoires pour affiner l'estimation de la pente. Ce qui donne :

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, t_n) \tag{12a}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, t_n + \frac{h}{2}\right) \tag{12b}$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \tag{12c}$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3, t_n + h) \tag{12d}$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{12e}$$